A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

ALAPVETŐ MEGÁLLAPÍTÁSOK A LINEÁRIS OPERÁTOROK DEFEKTUS-SZÁMAIRÓL, A GYÖK ÉRTÉKEIRŐL ÉS INDEXEIRŐL

I. C. GOHBERG és M. G. KREIN*

TARTALOM

Bevezetés

Napjainkban a lineáris operátorok elméletében végzett legkülönfélébb kutatások során (a *Hermite*-féle operátorok általános elméletében, a szinguláris integrálegyenletek különböző osztályainak vizsgálatánál az indefinit metrikával ellátott terek operátorainak elméletében, *Hermite*-féle és nem *Hermite*-féle összeadandókkal való perturbációjának elméletében, és így tovább) mind nagyobb és nagyobb szerepet játszanak a lineáris operátor *defektus-száma és indexe* fogalmak.

Bár ezekkel a fogalmakkal a matematikusoknak legalább 35 évvel ezelőtt szoros kapcsolatba kellett kerülniük, és azután a következőkben szintén nemegyszer, ezen fogalmak általános alakban való megfogalmazása, és a rájuk vonatkozó alapvető megállapítások kialakítása aránylag nemrégen történt meg.

Bármennyire meglepő, a funkcionálanalízisnek ez a fontos fejezete, amelynek gyökerei a különböző klasszikus kutatásokba nyúlnak, és amelynek felépítésére — amint látni fogjuk — nem volt szükség olyan különösen jelentős eszközökre, rendkívül lassan fejlődött és, végeredményben, nagyon sok matematikus erőfeszítéseinek eredményeként jött létre.

* И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, *Успехи мат. наук.*, XII. вып. 2 (74) (1957), 43—118.

Szükségesnek tartva legalább röviden rámutatni azon kérdéskörök fejlődésének a főbb korszakaira, amelyekről később szó lesz, legelőször is a következő két eredményről teszünk említést.

1921-ben F. NOETHER [1] észrevette, hogy a szinguláris integrálegyenletek bizonyos osztályainak elméletében lehetséges egy olyan megállapítás, amely különbözik attól, amihez a *Fredholm*-féle integrálegyenletek elméletében hozzászoktunk, nevezetesen, hogy a homogén és transzponált homogén szinguláris egyenletek lineárisan független megoldásainak a száma különböző lehet, ugyanakkor a megfelelő inhomogén egyenletek megoldhatóságának *Fredholm*-féle feltételei érvényben maradnak.

Ha — követve a korszerű terminológiát — a homogén és transzponált homogén integrálegyenletek megoldásai számának a különbségét az egyenlet *indexének* nevezzük, akkor F. NOETHER eredményeinek a sorában rámutathatunk az általa vizsgált egyenlet-osztály indexének meghatározására szolgáló szabályra.

Másik eseményként emlékezhetünk meg arról, hogy 1923-ban T. CARLEMAN [2] bizonyos speciális állítások során, hat év múlva pedig I. von NEUMANN [3] a *Hermite*-féle operátorok általános esetében bevezették és kidolgozták a *Hermite*-féle operátorok defektus-számainak a fogalmát.

Ebben az időben, sőt sokkal később is, nem fedeztek fel semmiféle kapcsolatot és átmenetet a *Hermite*-féle operátorok defektus-számainak elméletéből a szinguláris integrálegyenletek index elméletéhez.

Ezek a kapcsolatok csak akkor tűntek elő, amikor mindkét elméletet tovább fejlesztették és általánosították.

F. NOETHER említett dolgozata és T. CARLEMAN ismert cikke [4] után F. D. GAHOV [5] és a tbiliszi matematikusok iskolája dolgozataikban (ezzel kapcsolatosan l. N. I. MUSZKELISVILI [6] és V. D. KUPRADZE [7] monográfiáját) a főérték típusú maggal rendelkező szinguláris integrálegyenletek elméletének teljes kifejlesztését adják.

SZ. G. MIHLIN [8], [9] dolgozatában a szinguláris integrálegyenletek elméletének egész sor megállapítását és fogását dolgozza fel az L_2 tér operátorainak általános nyelvén. Számunkra az a lényeges, hogy ez a szerző először fogalmazza meg az általános operátorelmélet nyelvén — egyelőre *Hilbert*-térben — a tételt a korlátos operátor indexének stabilitásáról teljesen folytonos perturbáció mellett.

Meg kell még jegyezni, hogy az absztrakt vizsgálati módszereknek a tekintett kérdéskörbe való behatolását jelentős módon segítette SZ. M. NIKOLSZKIJ [10] dolgozata és bizonyos mértékig Z. I. HALILOV [11] dolgozata.

A következő lépést egymástól függetlenül (egyidőben történt publikációval) F. V. ATKINSZON [12] és I. C. GOHBERG [13], [14], [15] tették meg.

Ha az előbbi szerző teljesebb megfogalmazásaiból indulunk ki, akkor azt mondhatjuk, hogy ezekben a dolgozatokban azon korlátos operátorok indexének stabilitását mutatják ki, amelyek tetszőleges *Banach*-térben definiáltak, teljesen folytonos operátorokkal, vagy elég kis normájú korlátos operátorokkal való perturbáció mellett. Ezen kívül F. V. ATKINSZON általános tételt bizonyított be a szorzat indexéről (l. 2.1. tételt).

Ezeket az eredményeket M. G. KREJN, M. A. KRASZNOSZELSZKIJ [16], B. SZ. NAGY [17] és I. G. GOHBERG [18] általánosították nemkorlátos zárt operátorokra. Új momentum volt M. G. KREJN és M. A. KRASZNOSZELSZKIJ dolgozatában a defektus-számok *félstabilitásáról* (l. (2.7) a 2.4. tételben) szóló tétel, és arra a kapcsolatra való rámutatás, amely az indexek elmélete és a defektus-számok elmélete között fennáll.

Ez a dolgozat egyrészt a fent említett dolgozat ciklus, másrészt azon vizsgálatok hatására született, amelyeket annak idején M. G. Krejn, M. A. Krasznoszelszkij és D. P. Milman végeztek, a *Neumann*-féle defektus-számok elméletének a *Hilbert*- és *Banach*-tér tetszőleges operátorainak esetére való általánosítása terén. Ugyancsak helyénvaló megjegyezni, hogy ezekben a vizsgálatokban, ugyanúgy B. Sz. Nagy [20], [21] dolgozataiban is, az általános *Banach*-terek esetében két altér egymástól való eltérésének olyan bizonyos mértékeit jelölik meg, amelyek lehetővé teszik az alterek dimenziójának egyenlőségére való következtetést (l. 1., 6. §). Ezeket az eredményeket a jelen dolgozatban széles körben fogjuk alkalmazni.

A dolgozat nem szorítkozik kizárólag az indexek és defektus-számok stabilitási és félstabilitási tételeinek a leírására. Néhány általános tételt közlünk az operátor spektrumának a viselkedéséről annak különböző perturbációja mellett.

Különös figyelmet szentelünk az operátor izolált sajátértékei létezése kérdésének, amely sajátértékeknek végesdimenziós normálisan leválasztható gyök-alterek (a fogalom definícióját l. 4. § 66 oldalon) felelnek meg. Emellett az operátor indexe és defektus-számai stabilitásáról szóló alapvető tételek itt ki vannak egészítve a gyökérték stabilitásáról szóló tétellel, mely tétel fontos szerepet játszik az operátorok perturbációjának általános elméletében (l. 4.2. tételt).

A gyök-alterek vizsgálata során figyelembe vettük Sz. N. Kracskovszkij és M. A. Goldman [22], [23], [24], [25] néhány eredményét is.

Az önadjungált operátorok önadjungáltakkal való perturbációjának vizsgálata során érintjük a nem önadjungált operátorok gyök-vektorai rendszerének teljességi kérdését, és idézzük M. V. Keldis [26] és M. Sz. Livsic [27] néhány viszonylag nem régi eredményét.

Helyhiány miatt a cikk nem foglalkozik a tárgyalt általános megállapításoknak a differenciáloperátorok peremfeladatai elméletében való nagyszámú alkalmazásaival. Viszont szükségesnek tartottuk az utolsó fejezetben illusztrálni az index stabilitásáról szóló általános megállapításokat a félegyenesen argumentumok különbségétől függő maggal rendelkező integrálegyenleteken, úgyszintén rámutatni az alapvetően új következtetésekre, amelyeket az általános tételeknek az olyan integrálegyenlet-rendszerekhez való alkalmazásával kapunk, amelyek a félegyenesen adottak és magjuk az argumentumok különbségétől függ.

Egy sor megállapítás, amelyet a cikk különböző fejezeteiben kifejtünk, valószínűleg új.

A cikk végén részletesebb bibliográfiát és bizonyos kiegészítő történeti adatokat közlünk minden fejezethez külön.

A dolgozat összeállítása során a szerzők abból indulnak ki, hogy az olvasó ismeri a *Hilbert*- és *Banach*-terek lineáris operátorai elméletének alapjait.

Szerzők élnek az alkalommal őszinte köszönetet mondani M. A. Krasznoszelszkijnek a sok értékes kritikai megjegyzéséért.

1. §. Bevezető tételek két altér nyílásáról

1. Legyen $\mathfrak{B}$-komplex *Banach*-tér. Emlékeztetünk a *Banach*-tér *dimenziójának* a definíciójára. Az $\mathfrak{M}$ halmazt *generátornak* nevezzük, ha az általa generált lineáris tér sűrű $\mathfrak{B}$-ben.

A $\mathfrak{B}$-t generáló $\mathfrak{M}$ halmazok $\mathfrak{a}_{\mathfrak{M}}$ számosságainak legkisebbikét a $\mathfrak{B}$ *Banach*-tér *dimenziójának* nevezzük. Ezt a kardinális számot $\dim \mathfrak{B}$-vel fogjuk jelölni. Véges dimenziós tér esetében a dimenzió fenti definíciója egybeesik a szokásossal, azaz mondhatjuk, hogy a tér dimenziója egyenlő a tér lineárisan független elemeinek maximális számával.

Végtelen dimenziós $\mathfrak{B}$ tér esetében annak $\dim \mathfrak{B}$ dimenziója egybeesik a $\mathfrak{B}$-ben sűrű halmazok számosságai közül a minimális számossággal. Ez abból következik, hogy a $\mathfrak{B}$-t generáló halmaz elemeinek racionális együtthatójú lineáris kombinációinak a halmaza sűrű $\mathfrak{B}$-ben.

Nyilvánvaló, hogy ha két $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{B}_2$ *Banach*-tér izomorf (azaz egymásra lineárisan és folytonosan leképezhetők), akkor $\dim \mathfrak{B}_1 = \dim \mathfrak{B}_2$. Az állítás megfordítása végtelen dimenziós terek esetében nem igaz (l. [28], XI. fejezet).

Állapodjunk meg még a következőkben: $\varrho(x, \mathfrak{C})$ jelölje az $x \in \mathfrak{B}$ elem távolságát a $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ altértől, azaz

$$\varrho(x, \mathfrak{C}) = \inf_{y \in \mathfrak{C}} |x-y|.$$

Fontos számunkra a következő fogalom.

Egy $\mathfrak{B}$ *Banach*-tér két $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ lineáris részhalmaza nyílásának nevezzük a következő módon definiált számot:

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = \max\Big\{\sup_{\substack{x \in \mathfrak{C}_1 \\ |x|=1}} \varrho(x, \mathfrak{C}_2), \sup_{\substack{y \in \mathfrak{C}_2 \\ |y|=1}} \varrho(y, \mathfrak{C}_1)\Big\}. \tag{1.1}$$

A nyílás következő két tulajdonsága nyilvánvaló. Először is, mindig igaz

$$0 \leqq \theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = \theta(\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_1) \leqq 1,$$

másrészt

$$\theta(\overline{\mathfrak{C}}_1, \overline{\mathfrak{C}}_2) = \theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2),$$

ahol $\overline{\mathfrak{C}}_1, \overline{\mathfrak{C}}_2$ megfelelően a $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ lezártjai.

1.1. TÉTEL. *Legyen* $\mathfrak{C}_1$ *és* $\mathfrak{C}_2$ *a* $\mathfrak{B}$ *Banach-tér két lineáris halmaza, mégpedig*

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = a < 1.$$

Ha a $\dim \mathfrak{C}_j$ $(j=1, 2)$[1] *két szám egyike véges, akkor*

$$\dim \mathfrak{C}_1 = \dim \mathfrak{C}_2.$$

Bizonyítás. A tétel ekvivalens azzal az állítással, hogy ha $\dim \mathfrak{C}_1 = n$, $\dim \mathfrak{C}_2 > n$, akkor $\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = 1$. Utóbbi bizonyításához elegendő megmutatni, hogy $\mathfrak{C}_2$-ben létezik ort y $(|y|=1)$, „ortogonális" $\mathfrak{C}_1$-hez, azaz olyan, hogy $\varrho(y, \mathfrak{C}_1) = 1$; miközben az általánosság megszorítása nélkül fel lehet tételezni, hogy $\dim \mathfrak{C}_1 = n+1$.

[1] $\dim \mathfrak{C}$-n a $\dim \overline{\mathfrak{C}}$-t értjük.

Jelölje $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ által generált lineáris teret.

Tételezzük fel először, hogy $\mathfrak{B}_1$-ben a $|z|=1$ $(z\in\mathfrak{B}_1)$ egységgömb felület szigorúan konvex, azaz nem tartalmaz szakaszokat. Akkor bármely $z\in\mathfrak{B}_1$ elemnek csak egy „projekciója" van $\mathfrak{C}_1$-ben, azaz csak egy olyan $x\in\mathfrak{C}_1$, amelyen a z és $\mathfrak{C}_1$ távolsága eléri a $\varrho(z,\mathfrak{C}_1)$ értéket. Könnyű belátni, hogy az $x=\varphi(z)$ $(z\in\mathfrak{B}_1)$ „projektáló" operátor folytonos és rendelkezik a $\varphi(-z)=-\varphi(z)$ tulajdonsággal. z „ortogonalitása" $\mathfrak{C}_1$-hez azt jelenti, hogy $\varrho(z,\mathfrak{C}_1)=|z-\varphi(z)|=|z|$, azaz $\varphi(z)=0$ (a projekció egyetlen volta miatt).

Ha most feltételezzük, hogy a $\mathfrak{C}_2$ tér $\mathfrak{S}_2$ egységgömbjének a felületén $(|y|=1)$ a $\varphi(y)$ operátor mindenütt különbözik 0-tól, akkor az $\mathfrak{S}_2$ kompaktsága miatt állíthatjuk, hogy a $\Phi(y)=\varphi(y)/|\varphi(y)|$ folytonos $\mathfrak{S}_2$-n. Ez az operátor folytonosan képezi le az $\mathfrak{S}_2$ n-dimenziós gömbfelületet a $\mathfrak{C}_1$ tér $(n-1)$-dimenziós $\mathfrak{S}_1(|x|=1)$ gömbfelületébe. méghozzá úgy, hogy a centrálisan szimmetrikus pontok centrálisan szimmetrikusakba mennek át:

$$\psi(-y)=-\Phi(y),$$

ami viszont lehetetlen K. BORSUK [29][2] ismert tétele miatt.

Tehát a tételt bebizonyítottuk azzal a feltételezéssel, hogy a $\mathfrak{B}_1$ egységgömbfelület szigorúan konvex.

Az általános esetet a vizsgált esetre fogjuk visszavezetni, megmutatva, hogy bármely $\varepsilon>0$ esetén mindig konstruálható $\mathfrak{B}_1$-ben olyan új $|z|_0$ norma, amelyre teljesül

$$|z|\leqq|z|_0\leqq(1+\varepsilon)|z| \quad (z\in\mathfrak{B}_1) \tag{1.2}$$

és hogy az új $|z|_0=1$ gömbfelület szigorúan konvex legyen, vagyis hogy bármely két $z_1, z_2\in\mathfrak{B}_1$ különböző irányú két vektor esetén teljesüljön

$$|z_1+z_2|_0<|z_1|_0+|z_2|_0. \tag{1.3}$$

Valóban, az (1.2) egyenlőtlenség nyilvánvaló módon maga után vonja a

$$\theta_0(\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2)\leqq(1+\varepsilon)\theta(\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2)$$

egyenlőtlenséget, ahol $\theta_0(\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2)$ a $|z|_0$ normának megfelelő nyílás a $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ között. Az (1.3) feltétel miatt a tekintett $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ esetén a bizonyítottak szerint $\theta_0(\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2)=1$, következésképp az $\varepsilon>0$ tetszőleges volta miatt $\theta(\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2)=1$ is teljesül.

Most megmutatjuk, hogyan valósítható meg a $|z|_0$ norma konstrukciója.

[2] Megmagyarázzuk ezt kissé részletesebben. A komplex $\mathfrak{C}_2$ tér $\mathfrak{S}_2$ gömbfelülete homeomorf módon leképezhető — centrális szimmetria tartóan — a közönséges euklideszi-tér $2n$-dimenziós S_2 gömbfelületébe. Ezután az $\mathfrak{C}_1$ gömbfelület homeomorf módon leképezhető egy $2(n-1)$-dimenziós S_1 gömbfelületbe — az S_2 szabályos részébe. Ezután már a $\psi(y)$ leképezés természetes módon generálja az S_2 gömbnek saját S_1 részébe való páratlan ψ leképezését. Mivel S_1 nem esik egybe S_2-vel, a leképezés foka nulla lesz. Másrészt a gömbfelület bármely páratlan folytonos leképezésének (önmagába, K. BORSUK említett tétele miatt) a foka különböző kell legyen nullától.

Legyen $|z_1|$ valamilyen norma $\mathfrak{B}_1$-ben, amelynek szigorúan konvex $|z|_1=1$ gömbfelület felel meg; például ez definiálható a következő módon:

$$|\xi_1 e_1+\ldots+\xi_m e_m| = \sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_m^2},$$

ahol $\{e_1, \ldots, e_m\}$ a $\mathfrak{B}_1$ valamely bázisa.

Ha $k(>0)$-val jelöljük a $|z|_1$ maximumát a $|z|=1$ egységgömbfelületen, akkor fel lehet írni, hogy

$$|z|_1 \leqq k|z|.$$

Mivel $|z|_1$ eleget tesz az (1.3) feltételnek, így tetszőleges $\delta>0$ esetén ennek a feltételnek eleget fog tenni a

$$|z|_0 = |z|+\delta|z|_1$$

norma is. Erre a normára teljesül az (1.2) egyenlőtlenség $\varepsilon=\delta k$ mellett.

A $\delta>0$ tetszőleges volta miatt a konstrukciót befejeztük, a tétel bizonyítva van.

A bizonyított tételből közvetlenül adódik a

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen* $\mathfrak{C}_1$ *és* $\mathfrak{C}_2$ *a* $\mathfrak{B}$ *Banach-tér két altere,* $\mathfrak{C}_1$ *végesdimenziós és dimenziója kisebb* $\mathfrak{C}_2$ *dimenziójánál. Akkor létezik* $\mathfrak{C}_2$*-ben olyan* $y(\neq 0)$ *elem, hogy*

$$\min_{x\in\mathfrak{C}_1} |x-y| = |y|.$$

2. *A* $\mathfrak{B}$*-ben definiált valamely* P *lineáris korlátos operátort* projektornak nevezzük, ha

$$P^2 = P.$$

Mint ismeretes, a P projektor értékeinek a $\mathfrak{P}=P\mathfrak{B}$ halmaza mindig zárt. A projektor normája nem kevesebb egynél. Ha P egy projektor, akkor a $Q=I-P$ is projektor, mivel $Q^2=I-2P+P^2=I-P=Q$, méghozzá a P és Q projektorok ortogonálisak, ugyanis $PQ=QP=0$.

Bármely P projektor meghatározza a $\mathfrak{B}$ felbontását a következő direktösszegre:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}\dotplus\mathfrak{Q} \quad (\mathfrak{P} = P\mathfrak{B},\ \mathfrak{Q} = Q\mathfrak{B}).$$

Megfordítva, ha $\mathfrak{B}$-nek létezik két altér direktösszegére való $\mathfrak{B}=\mathfrak{P}\dotplus\mathfrak{Q}$ felbontása, akkor mindig található egy és csakis egy olyan P projektor, hogy $P\mathfrak{B}=\mathfrak{P}$ és $(I-P)\mathfrak{B}=\mathfrak{Q}$.

Megjegyezzük, hogy ha $\mathfrak{C}$ a $\mathfrak{B}$ valamely végesdimenziós altere, akkor könnyen konstruálható olyan P operátor, amely az egész $\mathfrak{B}$ teret projektálja $\mathfrak{C}$-re. Léteznek olyan $\mathfrak{B}$ terek olyan $\mathfrak{C}$ alterükkel, amelyekre nem létezik a $\mathfrak{B}$-t a $\mathfrak{C}$-re projektáló operátor. Ilyen tér például az L_p $(p\neq 2)$.

1.2. TÉTEL. *Legyen* P *és* Q *két olyan projektor, amely a* $\mathfrak{B}$ *Banach teret a* $\mathfrak{P}=P\mathfrak{B}$, *ill.* $\mathfrak{Q}=Q\mathfrak{B}$ *altérre projektálja. Ha* $|P-Q|<1$, *akkor a* $\mathfrak{P}$ *és* $\mathfrak{Q}$ *alterek izomorfak, és így* dim $\mathfrak{P}=$dim $\mathfrak{Q}$.

Bizonyítás. Ha $|P-Q|<1$, akkor $I-(P-Q)$ operátor folytonosan invertálható, mivel

$$(I-P+Q)^{-1} = I+\sum_{n=1}^{\infty}(P-Q)^n$$

és így, $(I-P+Q)\mathfrak{B}=\mathfrak{B}$. Innen $P(I-P+Q)\mathfrak{B}=P\mathfrak{B}$, mivel pedig $P^2=P$, így

$$PQ\mathfrak{B} = P\mathfrak{B}, \quad P\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}.$$

Ilyen módon a P operátor $\mathfrak{Q}$-t leképezi az egész $\mathfrak{P}$-re. Sőt bármely $x\in\mathfrak{Q}$-re:

$$|Px| = |Qx+(P-Q)x| = |x+(P-Q)x| \geqq |x|-|(P-Q)x| \geqq (1-|P-Q|)|x|,$$

ahonnan az következik, hogy a P lineáris folytonos operátor leképezi $\mathfrak{Q}$-t a $\mathfrak{P}$-re lineárisan kölcsönösen egyértelműen és kölcsönösen folytonosan. Ilyen leképezés létezése éppen azt jelenti, hogy $\mathfrak{P}$ és $\mathfrak{Q}$ izomorfak.

Az 1.2. tételt SZŐKEFALVI-NAGY B. [20] dolgozatában először a *Hilbert*-tér ortogonális projektoraira, majd [21]-ben a legáltalánosabb esetre is bebizonyította.

Megjegyezzük, hogy mindig teljesül

$$\theta(\mathfrak{P},\mathfrak{Q}) \leqq |P-Q|. \tag{1.4}$$

Valóban, ha $x\in\mathfrak{P}$, $|x|=1$, akkor $|x-Qx|=|Px-Qx|\leqq|P-Q|$, és emiatt $\varrho(x, \mathfrak{Q})\leqq|P-\mathfrak{Q}|$. Analóg módon, ha $y\in\mathfrak{Q}$, $|y|=1$, akkor $\varrho(y,\mathfrak{P})\leqq|P-Q|$. Visszaemlékezve az (1.1) definícióra, megkapjuk (1.4)-et.

Ilyen módon abban a fontos esetben, amikor a $\mathfrak{P}$ és $\mathfrak{Q}$ terek valamelyike végesdimenziós, az 1.2. tétel következménye az 1.1. tétel.

A $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-tér esetén minden nehézség nélkül bebizonyítható ([29], 34 §), hogy $\mathfrak{H}$ bármely két $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ alterének a nyílása meghatározható a

$$\theta(\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2) = |P_{\mathfrak{C}_1}-P_{\mathfrak{C}_2}|$$

képlettel, ahol $P_{\mathfrak{C}_1}$ és $P_{\mathfrak{C}_2}$ olyan projektorok, amelyek ortogonálisan projektálják $\mathfrak{H}$-t megfelelően a $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$-re. Ilyen módon ebben az esetben az 1.1. tétel a végtelen dimenziós terekre is igaz, és következménye az 1.2. tételnek.

2. §. A Φ-operátorok indexének stabilitásáról és defektus-számainak félstabilitásáról szóló tételek

1. Először megállapodunk néhány jelölésben és terminológiában, majd emlékeztetünk egy sor eredményre.

Azt mondva, hogy valamely A operátor egy $\mathfrak{B}_1$ *Banach*-térből egy $\mathfrak{B}_2$ *Banach*-térbe *hat,* mindössze azt fogjuk érteni, hogy az A operátor értelmezési tartománya (amelyet $\mathfrak{D}_A$-val fogunk jelölni) $\mathfrak{B}_1$-ben van, értékkészlete pedig (amelyet $\mathfrak{R}_A$-val jelölünk) benne van $\mathfrak{B}_2$-ben. Ha $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}_2=\mathfrak{B}$, akkor azt fogjuk mondani, hogy az A operátor a $\mathfrak{B}$-ben van értelmezve.

A következőkben az összes tekintett operátorokról fel fogjuk tételezni (nagyrészt nem megfogalmazva ezt), hogy azok *lineárisak,* azaz hogy azok $\mathfrak{D}_A$ értelmezési tartománya lineáris, és hogy azok additívak és homogének.

Ha $\mathfrak{B}$ valamely *Banach*-tér, akkor $\mathfrak{B}^\dagger$ a konjugált *Banach*-teret fogja jelölni, azaz a $\mathfrak{B}$-n értelmezett össze lineáris folytonos funkcionálok terét.

Az $Ax=0$ egyenlet összes megoldásainak $\mathfrak{Z}_A$ lineáris sokaságát az *A operátor zérushelyei lineáris sokaságának (alterének)*, az $\mathfrak{R}_A$-hoz ortogonális összes $f\in\mathfrak{B}_2^\dagger$ lineáris funkcionálok $\mathfrak{Z}_A$ alterét (azaz olyan funkcionálokét, hogy $f(y)=0$ az összes $y\in\mathfrak{R}_A$-ra) pedig az A operátor *defektus-alterének* fogjuk nevezni.

A $\mathfrak{Z}_A$ és $\mathfrak{Z}_A^\dagger$ dimenzióját megfelelően α_A és β_A-val fogjuk jelölni, azaz

$$\alpha_A = \dim \mathfrak{Z}_A, \quad \beta_A = \dim \mathfrak{Z}_A^\dagger.$$

A β_A számot az A operátor *defektus-számának* nevezzük.

Mint ismeretes, a $\mathfrak{Z}_A^\dagger$ altér véges dimenziós akkor és csakis akkor, ha a $\mathfrak{B}_2/\overline{\mathfrak{R}}_A$ faktortér véges dimenziós, és ebben az esetben

$$\beta_A = \dim (\mathfrak{B}_2/\overline{\mathfrak{R}}_A). \tag{2.1}$$

Végtelen β_A esetén a (2.1) képlet általában nem igaz. Ugyanakkor mindaz, amit a következőkben bizonyítani fogunk a β_A defektus-számról, igaz marad akkor is, ha a β_A szám definíciójaként a $\mathfrak{B}_2/\overline{\mathfrak{R}}_A$ faktortér dimenzióját fogadjuk el.

A rendezett (α_A, β_A) számpárt az A operátor *d-karakterisztikájának* nevezzük.

Ha mindkét α_A és β_A szám véges, akkor az A operátor *d*-karakterisztikáját *végesnek* nevezzük, a $\varkappa_A=\beta_A-\alpha_A$ különbséget pedig az A operátor *indexének* nevezzük.[3]

Ha az α_A és β_A számok közül csak az egyik véges, akkor az A operátor *d*-karakterisztikáját *szeminfinitnek* nevezzük.

Ha $\alpha_A=0$, akkor az A operátor kölcsönösen egyértelműen képezi le $\mathfrak{D}_A$-t $\mathfrak{R}_A$-ba. Ebben az esetben létezik $\mathfrak{R}_A$-n egy A^{-1} inverz operátor, amely leképezi $\mathfrak{R}_A$-t $\mathfrak{D}_A$-ba, úgy hogy

$$A^{-1}Ax = x \quad (x\in\mathfrak{D}_A), \quad AA^{-1}y = y \quad (y\in\mathfrak{R}_A).$$

Megjegyezzük, hogy az A operátorhoz létezik az $\mathfrak{R}_A$-n egy korlátos inverz operátor akkor és csakis akkor, ha található olyan $m>0$ pozitív szám, hogy $|Ax|\geqq m|x|$ $(x\in\mathfrak{D}_A)$.

Megállapodunk, hogy azt fogjuk mondani, hogy az A operátor *folytonosan invertálható,* ha $\mathfrak{R}_A=\mathfrak{B}_2$ és annak létezik korlátos inverze.

Mint ismeretes, az A operátort *normálisan feloldhatónak* nevezzük, ha $y\in\mathfrak{B}_2$ esetén az $Ax=y$ egyenlet akkor és csakis akkor megoldható, ha $f(y)=0$ az összes $f\in\mathfrak{Z}_A^\dagger$-ra.

Utóbbi feltétel ekvivalens azzal, hogy az A operátor $\mathfrak{R}_A$ értelmezési tartománya zárt.

Most emlékeztetünk arra, hogy az A operátort *zártnak* nevezzük, ha az $x_n\to x$ $(x_n\in\mathfrak{D}_A)$ és $Ax_n\to y$-ból következik, hogy $x\in\mathfrak{D}_A$ és $Ax=y$.

Ha az A operátorra $\alpha_A=0$, akkor az A operátor zártságából következik az A^{-1} operátor zárt volta, és megfordítva.

BANACH tétele szerint (l. a [28] 35. oldalát) a teljes *Banach*-térben értelmezett lineáris zárt operátor mindig folytonos (korlátos).

[3] Ez a definíció különbözik az általánosan elfogadott $\varkappa_A=\beta_A-\alpha_A$-tól.

Ez a tétel lehetővé teszi azt állítani, hogy ha az A operátor zárt és $\alpha_A=0$, akkor az normálisan feloldható akkor és csakis akkor, ha az A^{-1} operátor korlátos.

Valóban, ha az A operátor normálisan feloldható, akkor az $\mathfrak{R}_A$ zárt, és ezért az A^{-1} zárt operátor korlátos.

Megfordítva, ha az A^{-1} operátor korlátos, akkor az $y_n \to y$ ($y_n \in \mathfrak{R}_A$)-ból következik, hogy az $\{y_n\}$ sorozattal együtt az $\{x_n\}=\{A^{-1}y_n\}$ sorozat is egy konvergens sorozat lesz $\mathfrak{B}_1$-ben valamely $x \in \mathfrak{B}_1$ elemhez. Mivel pedig az A operátor zárt, ezért $Ax=y, y \in \mathfrak{R}_A$. Ilyen módon $\mathfrak{R}_A$ zárt, azaz az A operátor normálisan feloldható.

2. A továbbiakban szükségünk lesz az alábbi tételre:

2.1. LEMMA. *Legyen a $\mathfrak{B}$ Banach-tér egy $\mathfrak{R}$ altér és egy végesdimenziós $\mathfrak{N}$ altér direkt összege:*

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{R} \dotplus \mathfrak{N},$$

$\mathfrak{D}$ pedig a $\mathfrak{B}$ sűrű lineáris része. Akkor

1) *A $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{R}$ lineáris halmaz sűrű $\mathfrak{R}$-ben, és*

2) *a $\mathfrak{B}$ tér előállítható az $\mathfrak{R}$ és olyan $\mathfrak{N}'$ alterek*

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{R} \dotplus \mathfrak{N}'$$

direktösszegeként, ahol $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{D}$.

Bizonyítás. Legyen $e_1, \ldots, e_n$ az $\mathfrak{N}$ altér bázisa, az $f_1, \ldots, f_n$ pedig olyan $\mathfrak{B}^\dagger$-beli lineáris funkcionálok, hogy

$$f_j(e_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, n), \quad f_j(x) = 0 \quad (x \in \mathfrak{R},\ j = 1, \ldots, n).$$

Tehát az $\mathfrak{R}$ altér az f_j $(j=1, \ldots, n)$ funkcionálok közös zérushelyeinek az összessége. Legyenek a $\mathfrak{D}$-beli $\tilde{e}_k$ $(k=1, \ldots, n)$ elemek olyan közeliek a megfelelő e_k $(k=1, \ldots, n)$ elemekhez, hogy a $\det \|f_j(\tilde{e}_k)\|$ determináns nullától különböző.

Abból, hogy $\mathfrak{D}$ sűrű $\mathfrak{B}$-ben, következik, hogy tetszőleges $y \in \mathfrak{R}$ esetén található olyan $\{z_\nu\} \subset \mathfrak{D}$ sorozat, amely konvergál y-hoz:

$$z_\nu \to y \quad (\nu \to \infty).$$

Képezzük a

$$\tilde{z}_\nu = z_\nu + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{\nu k} \tilde{e}_k$$

sorozatot, ahol az $\alpha_{\nu k}$-k komplex számok, amelyeket később definiálunk. Nyilvánvaló, hogy az összes $\tilde{z}_\nu \in \mathfrak{D}$.

Kiválasztjuk az $\alpha_{\nu k}$-t úgy, hogy $\tilde{z}_\nu \in \mathfrak{D}_1 (= \mathfrak{R} \cap \mathfrak{D})$. Ennek érdekében szükséges és elegendő, hogy

$$f_j(\tilde{z}_\nu) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots),$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{\nu k} f_j(e_k) + f_j(z_\nu) = 0 \quad (j = 1, \ldots, k;\ \nu = 1, 2, \ldots).$$

Ilyen módon az $\alpha_{\nu k}$ $(k=1, \ldots, n)$ számok egy olyan egyenletrendszernek a megoldásai, amelynek a determinánsa nullától különböző. Azonkívül a

$$\lim_{\nu\to\infty} f_j(z_\nu) = f_j(y) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

egyenlőségből következik, hogy

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_{\nu k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n), \quad \lim_{\nu\to\infty} \tilde{z}_\nu = \lim_{\nu\to\infty} z_\nu = y.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\overline{\mathfrak{D}}_1 = \mathfrak{N}$.

A lemma bizonyításának befejezéséhez meg kell még jegyeznünk, hogy az $\tilde{e}_k$ $(k=1, \ldots, n)$ bázisú $\mathfrak{N}'$ altérnek ugyanolyan a dimenziója, mint az $\mathfrak{N}$ altéré, és mivel ezenkívül $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{D}$, $\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{N} = 0$, így

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{N} \dotplus \mathfrak{N}'.$$

A lemmát bebizonyítottuk.

Az egyszerűsítés érdekében megállapodunk *Φ-operátornak* nevezni minden lineáris zárt normálisan feloldható véges d-karakterisztikájú operátort.

A következő állítással kezdjük.

2.1. TÉTEL. *Legyen A és B a $\mathfrak{B}$ Banach-térben definiált valamely két Φ-operátor, és legyen $\mathfrak{D}_A$ sűrű $\mathfrak{B}$-ben. Az AB szorzat is Φ-operátor, méghozzá*

$$\varkappa_{AB} = \varkappa_A + \varkappa_B.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{C}_1$ az $\mathfrak{N}_B$ és $\mathfrak{Z}_A$ alterek $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{N}_B \cap \mathfrak{Z}_A$ metszete. Legyen a $\mathfrak{C}_1$ altér dimenziója n_1. Akkor

$$\alpha_{AB} = \alpha_B + n_1. \tag{2.2}$$

A $\mathfrak{Z}_A$ altér előállítható a $\mathfrak{C}_1$ altér és valamely $\mathfrak{C}_2$ altér direkt összegeként, ahol $\mathfrak{C}_2$ dimenziója $\alpha_A - n_1$.

Akkor a 2.1. lemmának megfelelően $\mathfrak{B}$ előállítható az $\mathfrak{N}_B \dotplus \mathfrak{C}_2$ altér és valamely véges dimenziós $\mathfrak{C}_3$ altér direktösszegeként, ahol $\mathfrak{C}_3$ kiválasztható úgy, hogy $\mathfrak{D}_A$-ból való legyen.

Legyen $\dim \mathfrak{C}_3 = n_3$. A $\mathfrak{C}_2 \dotplus \mathfrak{C}_3$ altér ekvivalens a $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}_B$ faktortérrel. Ezért $\dim (\mathfrak{C}_2 \dotplus \mathfrak{C}_3) = \beta_B$, azaz $\alpha_A - n_1 + n_3 = \beta_B$, vagyis

$$n_1 - n_3 = \alpha_A - \beta_B. \tag{2.3}$$

Felhasználjuk most azt, hogy

$$\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_A \cap (\mathfrak{N}_B \dotplus \mathfrak{C}_2 \dotplus \mathfrak{C}_3) = \mathfrak{D}_1 \dotplus \mathfrak{C}_2 \dotplus \mathfrak{C}_3,$$

ahol $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{N}_B$.

Alkalmazva $\mathfrak{D}_A$-ra az A operátort, azt kapjuk, hogy

$$A\mathfrak{D}_A = A\mathfrak{D}_1 \dotplus A\mathfrak{C}_3.$$

Másrészt, $A\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{N}_{AB}$, tehát

$$\mathfrak{N}_A = \mathfrak{N}_{AB} \dotplus A\mathfrak{C}_3.$$

Utóbbi egyenlőség maga után vonja az $\mathfrak{R}_{AB}$ zártságát, és ezzel az AB operátor normális feloldhatóságát, ezenkívül ebből az is következik, hogy

$$(2.4) \qquad \beta_{AB} = \beta_A + \dim (A\mathfrak{C}_3) = \beta_A + n_3 .$$

A (2.2), (2.3) és (2.4)-ből azt kapjuk, hogy

$$\varkappa_{AB} = \beta_{AB} - \alpha_{AB} = \beta_A + n_3 - \alpha_B - n_1 = \beta_A - \alpha_A + \beta_B - \alpha_B = \varkappa_A + \varkappa_B .$$

MEGJEGYZÉS. A bebizonyított tétel érvényben marad minden olyan esetben, amikor az A és B operátorok a $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ egyikéből a másikba hatnak, és az AB szorzatnak van értelme.

3. Mint ismeretes, az $\tilde{A}$ operátort az A operátor *bővítésének* nevezzük, ha $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ és $\tilde{A}x = Ax$ az $x \in \mathfrak{D}_A$ mellett. Ha eközben a $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}/\mathfrak{D}_A$ faktortérnek véges k dimenzió száma van, akkor az $\tilde{A}$ operátort az A operátor *k dimenziós bővítésének* nevezzük. Ebben az esetben $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ mindig előállítható $\mathfrak{D}_{\tilde{A}} = \mathfrak{D}_A \dotplus \mathfrak{M}$ direktösszeg alakjában, ahol $\mathfrak{M}$ valamely k-dimenziós tér, és akkor tetszőleges $x \in \mathfrak{D}_A$ és $y \in \mathfrak{M}$-re, $\tilde{A}(x+y) = Ax + Cy$, ahol C valamely véges dimenziós az $\mathfrak{M}$-en értelmezett operátor.

2.2. LEMMA. *Legyen $\tilde{A}$ az A Φ-operátornak k dimenziós bővítése. Akkor az $\tilde{A}$ operátor szintén Φ-operátor, mégpedig*

$$\varkappa_{\tilde{A}} = \varkappa_A - k, \quad \alpha_{\tilde{A}} \leqq \alpha_A + k.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{M}$ egy olyan k-dimenziós altér, amelynek a $\mathfrak{D}_A$-val való metszete csak a nulla, és legyen $\tilde{A}$ az A operátornak k dimenziós bővítése:

$$\tilde{A}(x+y) = Ax + Cy,$$

ahol $x \in \mathfrak{D}_A, y \in \mathfrak{M}$ és C egy, az $\mathfrak{M}$-en értelmezett, véges dimenziós operátor.

A lemmát először arra az esetre fogjuk bizonyítani, amikor $\alpha_A = 0$.

Jelöljük $\mathfrak{N}$-el azt az alteret, amely a C képe ($C\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$). Legyen $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}_A$. Az összes olyan $y \in \mathfrak{M}$ elemek halmazát, amelyekre $Cy \in \mathfrak{N}_1$, jelöljük $\mathfrak{M}_1$-el. Speciálisan, $\mathfrak{M}_1$ tartalmazza az összes olyan $y \in \mathfrak{M}$ elemet, amelyekre $Cy = 0$.

Az $\mathfrak{M}$ altér előállítható $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \dotplus \mathfrak{M}_2$ alakban. Akkor az $\mathfrak{N}$ altér előáll az $\mathfrak{N}_1$ és az $\mathfrak{N}_2 = C\mathfrak{M}_2$ altér direktösszegeként. Az $\mathfrak{M}_2$ és $\mathfrak{N}_2$ altereknek azonos $s \leqq k$ a dimenziójuk. Az $\mathfrak{M}_1$ altér dimenziója így $k-s$.

Az $\tilde{A}$ operátor értékkészlete akkor $\mathfrak{R}_{\tilde{A}} = \mathfrak{R}_A \dotplus \mathfrak{N}_2$ direktösszege az $\mathfrak{R}_A$ altérnek és a végesdimenziós $\mathfrak{N}_2$ altérnek. Következésképp az $\tilde{A}$ operátor normálisan feloldható. Ezenkívül, a mondottakból következik, hogy $\beta_{\tilde{A}} = \beta_A - s$.

Tetszőleges $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$-beli y elem előállítható

$$y = x + z_1 + z_2 \quad (x \in \mathfrak{D}_A, \ z_1 \in \mathfrak{M}_1, \ z_2 \in \mathfrak{M}_2)$$

alakban.

Ha $y \in \mathfrak{Z}_{\tilde{A}}$, akkor $\tilde{A}y = \tilde{A}(x+z_1+z_2) = 0$, vagyis $\tilde{A}(x+z_1) = -\tilde{A}z_2$. Viszont $\tilde{A}(x+z_1) \in \mathfrak{R}_A$, de $Az_2 \in \mathfrak{N}_2$, ezért

$$z_2 = 0, \quad Ax + Cz_1 = 0.$$

Beszámítva, hogy az A operátornak $\mathfrak{R}_A$-n van korlátos inverze, azt kapjuk, hogy $x=-A^{-1}Cz_1$. Tehát az $\tilde{A}$ operátor összes zérushelye

$$y=-\tilde{A}^{-1}Cz_1+z_1 \tag{2.5}$$

alakú, és megfordítva, az összes ilyen alakú elem zérushelye az $\tilde{A}$ operátornak. Ez azt jelenti, hogy $\alpha_{\tilde{A}}$ a (2.5) alakú elemek alterének a dimenziója. Viszont ennek a térnek a dimenziója egyenlő az $\mathfrak{M}_1$ dimenziójával, és ezért egyenlő $k-s$-sel, azaz $\alpha_{\tilde{A}}=k-s$. Az utóbbi két egyenlőségből azonnal adódik, hogy

$$\varkappa_{\tilde{A}}=\varkappa_A-k, \quad \alpha_{\tilde{A}}\leqq k.$$

Most tételezzük fel, hogy $\alpha_A\neq 0$. A $\mathfrak{D}_A$ altér mindig előállítható a $\mathfrak{D}_A=\mathfrak{Z}_A+\mathfrak{N}$ direktösszeggel, ahol $\mathfrak{N}$ egy altér.

Legyen $\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{N}$ és jelöljük A_1-gyel az $\mathfrak{N}$-ből $\mathfrak{B}_2$-be ható, az $A_1x=Ax$ $(x\in\mathfrak{D}_1)$ egyenlőséggel definiált operátort. Az A_1 operátor normálisan feloldható, méghozzá $\alpha_{A_1}=0, \beta_{A_1}=\beta_A$. Az A operátor tekinthető az A operátor $k+\alpha_A$ dimenziós bővítésének. Alkalmazva erre a lemma bebizonyított részét, azt kapjuk, hogy

$$\varkappa_{\tilde{A}}=\beta_A-\alpha_A-k=\varkappa_A+k, \quad \text{és} \quad \alpha_{\tilde{A}}\leqq\alpha_A+k.$$

A lemmát bebizonyítottuk.

4. Az egyszerűsítés kedvéért a lineáris korlátos operátorokra bevezetünk egy $|A|_C$ félnormát, mely

$$|A|_C=\inf_T|A+T|,$$

ahol az infimum az összes olyan lineáris teljesen folytonos T operátorok szerinti, amelyek $\mathfrak{B}_1$-ből $\mathfrak{B}_2$-be hatnak. A bevezetett félnorma rendelkezik a norma összes szokásos tulajdonságaival, annak kivételével, hogy a $|A|_C$ egyenlő lehet nullával, amikor $A\neq 0$. Nyilvánvaló, hogy az $|A|_C=0$ egyenlőség fennáll akkor és csakis akkor, ha az A operátor teljesen folytonos. Ha A és B lineáris korlátos operátorok $(\mathfrak{D}_A=\mathfrak{D}_B=\mathfrak{B}_1)$, amelyek teljesen folytonos (speciálisan, véges dimenziós) összeadandóban eltérnek egymástól: $A=B+T$, akkor

$$|A|_C=|B|_C.$$

Végül megjegyezzük még, hogy ha a $\mathfrak{B}$ Banach térben definiált A operátor olyan, hogy $|A|_C<1$, akkor az $A-I$ operátor normálisan feloldható, d-karakterisztikája véges, és $\varkappa_{A-I}=0$.

Valóban, ebben az esetben az A operátor előállítható két lineáris korlátos operátor összegeként: $A=A_1+T$, ahol $|A_1|<1$, T pedig teljesen folytonos.

Figyelembe véve, hogy a $B=A_1-I$ operátor folytonosan invertálható:

$$B^{-1}=-I-\sum_{j=1}^{\infty}A^j,$$

azt kapjuk, hogy az $A-I$ operátor előállítható egy folytonosan invertálható operátor és egy teljesen folytonos $A-I=B+T$ összegeként, vagyis

$$A-I=B(I+T_1),$$

ahol $T_1 = B^{-1}T$ teljesen folytonos operátor. F. RIESZ [31] tételei szerint az $I+T_1$ operátor normálisan feloldható, d-karakterisztikája véges, indexe pedig egyenlő nullával. Ugyanilyen tulajdonságokkal rendelkezik a B operátor, mint folytonosan invertálható operátor. Alkalmazva az operátorok $B(I+T_1)$ szorzatához a 2.1. tételt, meggyőződhetünk a fent megfogalmazott állítás helyességéről.

2.2. TÉTEL. *Legyen A a $\mathfrak{B}_1$-ből a $\mathfrak{B}_2$-be ható valamely Φ-operátor. Akkor található számára egy olyan ϱ pozitív szám, hogy bármilyen legyen is a $\mathfrak{B}_1$-ből $\mathfrak{B}_2$-be ható olyan B operátor, amelyre $|B|_C < \varrho$, az $A+B$ operátor szintén Φ-operátor, mégpedig*

$$\varkappa_{A+B} = \varkappa_A.$$

Bizonyítás. $\mathfrak{B}_1$ tér előállítható alterek

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{Z}_A \dot{+} \mathfrak{C}$$

direktösszegeként.

Legyen $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{C}$, és jelöljük A_1-gyel a $\mathfrak{D}_{A_1} = \mathfrak{D}_1$ operátor tartománnyal rendelkező azon operátort, amely ebben a tartományban ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint az A operátor.

Nyilvánvaló, hogy az A_1 operátor normálisan feloldható, és d-karakterisztikája $(0, \beta_A)$ alakú. Innen következik, hogy az A_1 operátornak $\mathfrak{R}_A$-n korlátos A_1^{-1} inverze van. $\tilde{A}_1^{-1}$-gyel jelöljük azt a tetszőleges lineáris korlátos operátort, amely az A_1^{-1} operátor β_A dimenziós bővítése, és ezzel definiálva van az egész $\mathfrak{B}_2$ térben. Nyilvánvaló, hogy a bővítés módjától függetlenül teljesül

$$\tilde{A}_1^{-1} A_1 x = x \quad (x \in \mathfrak{D}_1),$$

azaz az $\tilde{A}_1^{-1}$ operátor baloldali inverze az A_1 operátornak.

Legyen

$$\varrho = 1/|\tilde{A}^{-1}|_C$$

és megjegyezzük, hogy a ϱ szám nem függ az $\tilde{A}_1^{-1}$ operátor kiválasztásától, ugyanis bármely két olyan operátor, amelyek az A_1-nek baloldali inverzei, olyan összeadandóban különböznek egymástól, amely véges dimenziós operátor.

Legyen most B tetszőleges olyan lineáris korlátos operátor, amely $\mathfrak{B}_1$-et $\mathfrak{B}_2$-be képezi le és amelyre $|B|_C < \varrho$.

Jelöljük B_1-gyel a B-nek azt a részét, amelynek értelmezési tartománya $\mathfrak{D}_{B_1} = \mathfrak{D}_1$. Az A_1+B_1 operátor előállítható

$$A_1+B_1 = (I+B_1\tilde{A}_1^{-1})A_1 \tag{2.6}$$

alakban. Abból, hogy $|B_1\tilde{A}_1^{-1}|_C \leqq |B_1|_C |\tilde{A}_1^{-1}|_C < 1$, következik, hogy a $C = I + B_1\tilde{A}_1^{-1}$ operátor egy Φ-operátor, és $\varkappa_C = 0$.

Alkalmazva most a (2.6) szorzathoz a 2.1. tételt, azt kapjuk, hogy az A_1+B_1 operátor normálisan feloldható, d-karakterisztikája véges, és

$$\varkappa_{A_1+B_1} = \varkappa_C + \varkappa_{A_1} = \beta_{A_1} = \beta_A.$$

Másrészt az $A+B$ operátor az A_1+B_1 operátornak α_A dimenziós bővítése. Valóban, az $A+B$ operátor normálisan feloldható, d-karakterisztikája véges, és

$$\varkappa_{A+B} = \varkappa_{A_1+B_1} - \alpha_A = \varkappa_A.$$

A 2.2. tétel azonnali következménye a

2.3. TÉTEL. *Legyen A egy Φ-operátor. Akkor bármilyen legyen a T lineáris teljesen folytonos operátor, az $A+T$ operátor normálisan feloldható, d-karakterisztikája véges és $\varkappa_{A+T}=\varkappa_A$.*

Ugyanilyen közvetlen következménye a 2.1. tételnek a következő tétel valamennyi állítása, kivéve a legutolsót.

2.4. TÉTEL. *Bármely A Φ-operátorhoz létezik olyan ϱ pozitív szám, hogy az összes B lineáris korlátos olyan operátor esetén, amelyekre $|B|<\varrho$, az $A+B$ operátor normálisan feloldható, d-karakterisztikája véges, $\varkappa_{A+B}=\varkappa_A$, és azonkívül*

$$\alpha_{A+B} \leqq \alpha_A. \tag{2.7}$$

Bebizonyítjuk a (2.7) egyenlőtlenséget.

Az A operátor természetes módon generálja a $\mathfrak{B}_1/\mathfrak{Z}_A$ faktortérben a $\mathfrak{D}_A/\mathfrak{Z}_A$ értelmezési tartományú és $\mathfrak{R}_{\hat{A}}=\mathfrak{R}_A$ értékkészletű $\hat{A}$ operátort. Az $\hat{A}$ operátornak létezik korlátos $\hat{A}^{-1}$ inverze.

Legyen most $\varrho=|\hat{A}^{-1}|^{-1}$. Legyen B a $\mathfrak{B}_1$-ből a $\mathfrak{B}_2$-be ható korlátos operátor, mégpedig $|B|<\varrho$.

Ha x tetszőleges $\mathfrak{Z}_{A+B}$-beli elem, $\hat{x}$ pedig a megfelelő $\mathfrak{B}_1/\mathfrak{Z}_A$ faktortérbeli elem, akkor

$$\min_{y\in\mathfrak{E}_A} |x-y| = |\hat{x}| = \hat{A}^{-1}Ax| \leqq \frac{1}{\varrho}|Ax|.$$

Másrészt, ha $x\in\mathfrak{Z}_{A+B}$, akkor $Ax=-Bx$ és $x\neq 0$ mellett

$$|Ax| = |Bx| < \varrho|x|.$$

Ilyen módon

$$\min_{y\in\mathfrak{Z}_A} |x-y| < |x| \quad (x\in\mathfrak{Z}_{A+B},\ x\neq 0).$$

Visszaemlékezve a nyílásról szóló első 1.1. tétel következményére, megállapíthatjuk, hogy $\dim\mathfrak{Z}_{A+B}\leqq\dim\mathfrak{Z}_A$, azaz

$$\alpha_{A+B} \leqq \alpha_A.$$

5. Az előbbi 2.3. és 2.4. tételek általánosíthatók az operátorok nem korlátos operátorokkal való perturbációjának esetére.

Ez az általánosítás a SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA [17], [21] által kimutatott megjegyzéseken alapul.

Legyen A lineáris zárt, a $\mathfrak{B}_1$-ből $\mathfrak{B}_2$-be ható operátor. Az $x\in\mathfrak{D}_A$ elemekre új normát vezetünk be:

$$\|x\| = |x|+|Ax|. \tag{2.8}$$

Az A operátor zárt voltának következménye az a tény, hogy a $\mathfrak{D}_A$ az új normában *Banach*-térré válik. Ebben az új térben, amelyet $\boldsymbol{\mathfrak{D}}_A$-val fogunk jelölni, az A operátor eleget tesz az

$$|Ax| \leqq \mathbf{|}x\mathbf{|}$$

egyenlőségnek, következésképp korlátos operátor (amely a $\boldsymbol{\mathfrak{D}}_A$-ból a $\mathfrak{B}_2$-be hat).

Bevezetünk most egy fogalmat.

Legyen A és B a $\mathfrak{B}_1$-ből $\mathfrak{B}_2$-be ható $\mathfrak{D}_A$ és $\mathfrak{D}_B$ értelmezési tartománnyal rendelkező két lineáris zárt operátor. Akkor a B operátort *A-korlátosnak* nevezzük, ha $\mathfrak{D}_B \supset \mathfrak{D}_A$.

Ha a B operátor A-korlátos, akkor $\mathbf{B}$-vel fogjuk jelölni a $\boldsymbol{\mathfrak{D}}_A$-ból $\mathfrak{B}_2$-be való

$$\mathbf{B}x = Bx$$

egyenlőséggel definiált operátort.

A bevezetett fogalmat a következő körülmények világítják meg:

Ha a B operátor A-korlátos, akkor a $\mathbf{B}$ operátor korlátos, tehát létezik olyan $k>0$ szám, hogy

$$|\mathbf{B}x| \leqq k\mathbf{|}x\mathbf{|}.$$

Valóban, a $\mathbf{B}$ operátor lineáris, és definiálva van az egész $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$ téren. Megmutatjuk, hogy ezenkívül zárt is. Legyen az $\{x_n\}$ $(x_n \in \boldsymbol{\mathfrak{D}})$ olyan sorozat, hogy $x_n \to x$ (azaz $\mathbf{|}x_n - x\mathbf{|} \to 0$) és $\mathbf{B}x_n \to y$. Akkor, speciálisan, $|x_n - x| \to 0$. A B operátor zárt voltából következik, hogy $Bx = y$, tehát $\mathbf{B}x = y$.

A teljes téren értelmezett lineáris zárt operátor korlátosságáról szóló *Banach*-tétel szerint a $\mathbf{B}$ operátor korlátos.

Most megfogalmazhatjuk a 2.4. tétel következő általánosítását.

2.5. TÉTEL. *Legyen A egy Φ-operátor. Akkor található olyan $\varrho>0$ szám, hogy az összes A-korlátos B olyan operátorok esetén, amelyek eleget tesznek a*

$$|Bx| \leqq \varrho(|x| + |Ax|)$$

egyenlőtlenségnek, az $A+B$ operátor szintén Φ-operátor, mégpedig $\varkappa_{A+B} = \varkappa_A$ és $\alpha_{A+B} \leqq \alpha_A$.

Bizonyítás. Valóban, az $|x| = 0$ és $\mathbf{|}x\mathbf{|} = 0$ egyenlőségek ekvivalensek, tehát a $\mathfrak{D}_A$-ban lineárisan független elemek $\boldsymbol{\mathfrak{D}}_A$-ban is lineárisan függetlenek lesznek, és megfordítva. Innen speciálisan az is következik, hogy a $\mathfrak{D}_A$ értelmezési tartománnyal rendelkező tetszőleges operátor zérushelyei alterének a dimenziója nem változik a $\mathfrak{D}_A$-ról a $\boldsymbol{\mathfrak{D}}_A$-ra való áttéréssel.

A (2.8) új norma bevezetése sehogyan sem érzékelhető az $\mathfrak{N}_{A+B}$ és a $\mathfrak{B}_2$ struktúráján, és ezért nem borítja fel az operátorok normális feloldhatóságát, és nem változtatja d-karakterisztikájukat.

Ilyen módon, az új norma bevezetése után a 2.5. tétel a 2.4. tétel közvetlen következményeként adódik.

KÖVETKEZMÉNY. *A tetszőleges A-korlátos B operátorhoz található olyan $\varepsilon>0$, hogy a $|\lambda|<\varepsilon$ körhöz tartozó összes λ-ra az $A+\lambda B$ Φ-operátor lesz, mégpedig $\varkappa_{A+\lambda B} = \varkappa_A$ és $\alpha_{A+\lambda B} \leqq \alpha_A$.*

Abból a célból, hogy analóg módon általánosíthassuk a 2.3. tételt, bevezetjük az *A-teljes folytonosság* fogalmát.

Egy lineáris zárt B operátort (amely, mint az A_1, a $\mathfrak{B}_1$-ből a $\mathfrak{B}_2$-be hat) *A-teljesen folytonosnak* fogunk nevezni, ha $\mathfrak{D}_B \supset \mathfrak{D}_A$ és a megfelelő **B** operátor, amely már a $\mathfrak{D}_A$-ból a $\mathfrak{B}_2$-be hat, teljesen folytonos.

Megjegyezzük, hogy ha valamely lineáris térben értelmezve van két norma, akkor ezek a normák a következő két tulajdonság teljesülése esetén lesznek topológikusan ekvivalensek: 1) a tér teljes mindkét normára nézve, és 2) a tér elemeiből képzett bármely olyan sorozat, amely fundamentális mindkét normára nézve, ugyanazon határértékkel rendelkezik mindkét normában. Ezért ha egy lineáris zárt A_1 operátornak ugyanaz az értelmezési tartománya, mint az A operátornak, akkor bármely harmadik olyan zárt B operátor, amely A-teljesen folytonos, A_1-teljesen folytonos is egyben.

Ilyen módon az A-teljesen folytonosság fogalma (ugyanúgy, mint az A-korlátosság fogalma) nem magával az A operátorral kapcsolatos, hanem csak annak értelmezési tartományával.

2.6. TÉTEL. *Legyen A egy Φ-operátor, B pedig tetszőleges A-teljesen folytonos operátor. Akkor az $A+B$ egy Φ-operátor, mégpedig*

$$\varkappa_{A+B} = \varkappa_A .$$

6. Mivel a következőkben meg fogunk fogalmazni egy egész sor olyan állítást, amelyben szerepelni fog az A-korlátosság és az A-teljes folytonosság fogalma, ezért már itt megfogalmazunk néhány egyszerű állítást ezekről a fogalmakról.

Legyen A egy lineáris zárt operátor, amely a $\mathfrak{B}$ *Banach*-térben van definiálva. Tételezzük fel hogy valamely komplex λ esetén az $A-\lambda I$ operátor folytonosan invertálható, azaz létezik folytonos $R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}(R_\lambda\mathfrak{B}=\mathfrak{D}_A)$ rezolvens. Akkor

1°. Ha a B operátor A-korlátos, akkor a BR_λ operátor egyszerűen korlátos.

2°. Ahhoz, hogy egy B operátor A-teljesen folytonos legyen, szükséges és elegendő, hogy teljesüljön $\mathfrak{D}_B \supset \mathfrak{D}_A$ és hogy a BR_λ operátor teljesen folytonos legyen.

Valóban, ha teljesülnek az 1° állítás feltételei, akkor a BR_λ operátor lineáris, az egész $\mathfrak{B}$ téren értelmezve van, és zárt. Következésképp, az említett *Banach*-tétel szerint, korlátos.

A 2° állítás bizonyítása céljából megjegyezzük, hogy ha valamely $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{B}$ halmaz korlátos a $\mathfrak{B}$ metrikájában, akkor annak $\mathfrak{N}=R_\lambda\mathfrak{M}$ képe korlátos a $\mathfrak{D}$ metrikájában és megfordítva.

Valóban, ha $x\in\mathfrak{B}$ és $y=R_\lambda x$, akkor egyrészt

$$\|y\| = |y|+|Ay| = |R_\lambda x|+|x+\lambda R_\lambda x| \leqq [(1+|\lambda|)|R_\lambda|+1]|x|,$$

másrészt viszont

$$|x| = |(A-\lambda I)y| \leqq |\lambda||y|+|Ay| \leqq (1+|\lambda|)\|y\|.$$

Figyelembe véve, továbbá, a

$$BR_\lambda x = \mathbf{B}y \quad (x\in\mathfrak{M})$$

egyenlőséget, megjegyezzük, hogy ha a $BR_\lambda\mathfrak{M}$, $\mathbf{B}\mathfrak{N}$ halmazoknak legalább egyike kompakt, akkor a másik is az.

3. §. Tételek a lineáris zárt operátor Φ-pontjairól

1. Legyen A egy valamely $\mathfrak{B}$ *Banach*-térben definiált lineáris zárt operátor. A komplex sík λ pontját az A operátor *Φ-pontjának* nevezzük, ha az $A-\lambda I$ operátor normálisan feloldható, és d-karakterisztikája véges, azaz $A-\lambda I$ Φ-operátor. Az A operátor Φ-pontjainak a halmazát az A operátor *Φ-halmazának* nevezzük, és Φ_A-val jelöljük.

Legyen $\lambda_0 \in \Phi_A$. Mivel $A-\lambda I = A-\lambda_0 I+(\lambda-\lambda_0)I$, így a 2.4. tétel szerint található olyan $\varepsilon>0$, hogy az $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$ kör összes pontja az A operátor Φ-pontja, miközben $\varkappa_{A-\lambda I}=\varkappa_{A-\lambda_0 I}$.

Ebből a megjegyzésből a következő állítás adódik:

3.1. TÉTEL. *A lineáris zárt A operátor Φ_A halmaza nyílt halmaz, és ezért összefüggő komponensek véges vagy megszámlálható halmazának az összege.*

A Φ_A halmaz egy és ugyanazon összefüggő komponensének minden λ pontjára az A operátor indexe konstans.

Sokkal finomabb a következő

3.2. TÉTEL. *Legyen A a $\mathfrak{B}$-ben definiált valamely lineáris korlátos operátor ($A\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}$). Ha a komplex sík bármely pontja annak Φ-pontja, akkor a $\mathfrak{B}$ tér véges dimenziós.*

Bizonyítás. Nagy abszolútértékű λ számokra ($|\lambda|>|A|$) az $A-\lambda I$ operátor invertálható, és így $\varkappa_{A-\lambda I}=0$ (ha $|\lambda|>|A|$). Mivel, másrészt, a Φ_A a sík összes pontjából áll, így $\varkappa_{A-\lambda I}=0$ az összes λ számra.

Legyen Ω az összes lineáris korlátos operátorok normált gyűrűje, a $\mathfrak{T}$ pedig a $\mathfrak{B}$-ben ható összes lineáris teljesen folytonos operátorok halmaza. A $\mathfrak{T}$ halmaz kétoldali zárt ideál Ω-ban.

Jelöljük $\hat{\Omega}$-val az $\Omega/\mathfrak{T}$ faktor-gyűrűt. Az A-t tartalmazó $\hat{\Phi}$-beli maradékosztályt $\hat{A}$-val jelöljük. Az $\hat{A}$ elem normáját a következő egyenlőséggel definiáljuk:

$$|\hat{A}| = |A|_C = \inf_{T\in\mathfrak{T}} |A+T|.$$

Most tételezzük fel, hogy a $\mathfrak{B}$ tér nem véges dimenziós. Akkor tetszőleges λ esetén az $A-\lambda I$ operátor nem lesz véges dimenziós (ugyanis $\beta_{A-\lambda I}$ véges) sőt, nem lesz teljesen folytonos, ugyanis az operátor normális feloldhatósága és teljes folytonossága magukkal vonják annak véges dimenziós voltát.

Ilyen módon, tetszőleges λ esetén, az $\hat{A}-\lambda\hat{I}$ elem nullától különböző. Másrészt, tetszőleges λ-ra az $\hat{A}-\lambda\hat{I}$ elem invertálható az $\hat{\Phi}$-ban. Valóban, az A operátor összes reguláris λ pontjában az $A-\lambda I$ operátor folytonosan invertálható, és ezzel együtt az $\hat{A}-\lambda\hat{I}$ elem is az. Meg kell még vizsgálnunk azt az esetet, amikor λ az A operátor sajátértéke. Legyen $B=A-\lambda I$ és jelöljük $e_1, \ldots, e_n$-nel a $\mathfrak{Z}_B$ altér bázisát, $g_1, \ldots, g_n$-nel az $\mathfrak{R}_B$-ig való valamely direkt komplementer bázisát $\mathfrak{B}$-ben. Legyen továbbá $f_1, \ldots, f_n$ $\mathfrak{B}^\dagger$-beli funkcionálok olyan rendszere, hogy

$$f_j(e_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, n).$$

Tekintsük a

$$B_1 x = Bx + \sum_{j=1}^{n} f_j(x) g_j$$

egyenlőséggel definiált B_1 operátort, amelyre nyilván $\mathfrak{R}_{B_1}=\mathfrak{B}$.

Jelöljük $\mathfrak{N}(\subset\mathfrak{B})$-nel az összes olyan elemek alterét, amelyeken az összes f_j $(j=1, \ldots, n)$ funkcionál egyenlő nullával. Akkor a $\mathfrak{B}$ tér előállítható alterek

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{N} \dotplus \mathfrak{Z}_B$$

direktösszegeként.

Ennek megfelelően a B_1 operátor értékei előállíthatók

$$B_1 x = By + \sum_{j=1}^{n} f_j(z) g_j \quad (x = y+z,\ y\in\mathfrak{N},\ z\in\mathfrak{Z}_B)$$

alakban.

Nyilvánvaló, hogy a $B_1 x=0$ egyenlet felbomlik a $By=0$ és $\sum_1^n f_j(z) g_j = 0$ $(y\in\mathfrak{N}, z\in\mathfrak{Z}_B)$ két egyenletre, amelyek mindegyikének egyetlen triviális megoldása van.

Következésképp, a $B_1 x=0$ egyenlet egyetlen megoldása $x=0$. Másrészt, a B_1 operátor értékkészlete az egész $\mathfrak{B}$ tér. Ilyen módon, a B_1 operátor folytonosan invertálható, a B operátor pedig előáll egy folytonosan invertálható és egy teljesen folytonos (véges dimenziós) operátor összegeként.

Innen következik, hogy a $\hat{B}=\hat{A}-\lambda\hat{I}$ elem invertálható a tekintett esetben is.

Ellentmondáshoz jutottunk, ugyanis a normált gyűrűk elméletéből ismert (l. [32] 2. §), hogy az R normált gyűrű minden a elemének van spektruma, azaz ahhoz létezik olyan μ szám, hogy $a-\mu e$ (e a gyűrű egységeleme) elemnek nincs a gyűrűben inverze.

A bebizonyított tétel egy másik alakban így fogalmazható meg:

3.2'. TÉTEL. *Ha a $\mathfrak{B}$ tér végtelen dimenziós, akkor bármely lineáris korlátos A operátorhoz létezik legalább egy olyan λ pont, amely nem Φ-pontja ennek az operátornak.*

2. Most megvizsgáljuk, hogyan viselkednek az

$$\alpha_A(\lambda) = \alpha_{A-\lambda I} \quad \text{és} \quad \beta_A(\lambda) = \beta_{A-\lambda I}$$

függvények a Φ_A minden komponensében.

Ennek érdekében szükségünk lesz a következő eredményre.

3.1. LEMMA. *Legyen A a $\mathfrak{B}_1$ térből a $\mathfrak{B}_2$-be képező valamely Φ-operátor, B pedig egy tetszőleges lineáris korlátos operátor, amely szintén a $\mathfrak{B}_1$-ből a $\mathfrak{B}_2$-be képez. Akkor létezik olyan $\varepsilon>0$, hogy a $0<|\lambda|<\varepsilon$ egyenlőtlenségnek eleget tevő összes λ számra az*

$$(A-\lambda B)x = 0$$

egyenlet lineárisan független megoldásainak a száma ugyanaz.

Bizonyítás. Először bizonyítjuk a lemmát a $\varkappa_A=0$ esetre.

Legyen $e_1, \ldots, e_n$ $(n=\alpha_A)$ a $\mathfrak{Z}_A$ altér bázisa a $g_1, \ldots, g_n$ pedig az $\mathfrak{R}_A$-hoz való valamely direkt komplementer bázisa $\mathfrak{B}_2$-ben. Legyen továbbá $f_1, \ldots, f_n$ a $\mathfrak{B}_1^*$-beli funkcionálok olyan rendszere, hogy

$$f_j(e_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, n).$$

Az

$$A_1 x = Ax + \sum_{j=1}^{n} f_j(x) g_j$$

egyenlőséggel definiált A_1 operátor folytonosan invertálható (l. az előbbi tétel bizonyítását). Akkor a $|\lambda| < \varrho = |A_1^{-1}|^{-1}|B|$ kör minden λ pontjára az $A_1 - \lambda B$ operátor szintén folytonosan invertálható, és

$$R_\lambda = (A_1 - \lambda B)^{-1} = A_1^{-1}\left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k (BA_1^{-1})^k\right).$$

Az $(A - \lambda B)x = 0$ egyenlet nyilván ekvivalens az

$$(A_1 - \lambda B)x = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) g_j$$

egyenlettel, vagy az

$$\begin{cases} x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j R_\lambda g_j, & (3.1) \\ \xi_k = f_k(x) \quad (k = 1, \ldots, n) & (3.2) \end{cases}$$

egyenletrendszerrel.

Behelyettesítve a (3.2) egyenlőségbe az x kifejezését a (3.1)-ből, a ξ_k $(k=1, \ldots$ $\ldots, n)$ számok meghatározására egy n algebrai egyenletből álló homogén

$$\sum_{j=1}^{n} [\delta_{jk} - f_k(R_\lambda g_j)]\xi_j = 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

egyenletrendszert kapunk.

Nyilvánvaló, hogy az $\alpha_{A-\lambda B}$ szám egybeesik a (3.3) rendszer lineárisan független megoldásainak a számával.

A (3.3) egyenlet $\Delta(\lambda)$ determinánsának minden eleme a λ paraméter analitikus függvénye a $|\lambda| < \varrho$ körben. Ha azok azonosan egyenlők nullával, akkor a (3.3) rendszernek n lineárisan független megoldása van, és ezért a $|\lambda| < \varrho$ kör összes λ száma esetén

$$\alpha_{A-\lambda B} = n.$$

Legyen a $\Delta(\lambda)$ determináns legalább egy eleme nullától különböző a $|\lambda| < \varrho$ kör valamely pontjában. Jelöljük $\Delta_p(\lambda)$-val a $\Delta(\lambda)$ determináns valamely olyan legmagasabb rendű minorát, amely nem egyenlő nullával a $|\lambda| < \varrho$ kör legalább egy λ pontjában, és legyen p ezen minor rendje. Nyilvánvaló, hogy a tekintett kör λ-ira, kivéve talán valamely izolált pontokat, teljesül $\Delta_p(\lambda) \neq 0$. Azon λ pontokban, amelyekben a $\Delta_p(\lambda)$ determináns nem egyenlő nullával, a (3.3) rendszernek $n-p$ lineárisan független megoldása van.

Található olyan legnagyobb $|\lambda| < \varepsilon$ kör, amelynek minden belső pontjában, kivéve esetleg a $\lambda = 0$-t, teljesül $\Delta_p(\lambda) \neq 0$. Az összes olyan λ-ra, amelyek eleget tesznek a $0 < |\lambda| < \varepsilon$ egyenlőtlenségnek, igaz $\alpha_{A-\lambda B} = n - p$.

Ilyen módon, a $\varkappa_A = 0$ esetben a lemmát bebizonyítottuk.

Tekintsük most azt az esetet, amikor $\varkappa_A<0$. Legyen $\mathfrak{N}$ egy $|\varkappa_A|$-dimenziós normált tér. Jelöljük $\tilde{\mathfrak{B}}_2$-vel a $\mathfrak{B}_2$ és $\mathfrak{N}$ terek direktösszegét, amelyben a normát a következő képlettel definiáljuk

$$|y+z| = |y|+|z| \quad (y\in\mathfrak{B}_2,\ z\in\mathfrak{N}).$$

Most az A és B operátorokat úgy fogjuk tekinteni, mint a $\mathfrak{B}_1$-ből a $\tilde{\mathfrak{B}}_2$-be ható operátorokat. Akkor az A operátor indexe $\varkappa_A$-val nő, és ezért egyenlő lesz nullával. Alkalmazva az A operátorra a lemma bizonyított részét, és megjegyezve, hogy a $\tilde{\mathfrak{B}}_2$ térnek $\mathfrak{B}_2$ térrel való felcserélésétől az $\alpha_{A-\lambda B}$ szám nem változik, meggyőződhetünk a lemma igaz voltáról ebben az esetben is.

Meg kell még vizsgálnunk az utolsó $\varkappa_A>0$ esetet. Jelöljünk $\mathfrak{C}$-vel egy $\varkappa_A$-dimenziós normált teret, $\tilde{\mathfrak{B}}_1$-vel pedig a $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{C}$ terek direktösszegét a $\tilde{\mathfrak{B}}_2$ konstrukciójával analóg módon.

Bővítjük az A és B operátorokat $\varkappa_A$ dimenziószámmal, feltételezve $\tilde{A}z=\tilde{B}z=0$-t az összes $z\in\mathfrak{C}$-re. Akkor $\varkappa_{\tilde{A}}=0$ és az $\tilde{A}$ operátorra alkalmazható a lemma. Megjegyezve továbbá, hogy az összes tekintett λ értékekre: $\alpha_{\tilde{A}-\lambda\tilde{B}}=\alpha_{A-\lambda B}+\varkappa_A$, meggyőződhetünk a lemma igaz voltáról az utolsó esetben is.

A bizonyított lemma segítségével a Φ_A tartomány összefüggő komponenseire bizonyos tulajdonságokat állapíthatunk meg.

3.3. TÉTEL. *Legyen A egy lineáris zárt operátor és G a Φ_A tartomány valamely összefüggő komponense.*

Akkor az összes $\lambda\in G$ pontra, kivéve esetleg némely izolált pontokat, az $\alpha_A(\lambda)$ konstans

$$\alpha_A(\lambda) = n$$

értékkel rendelkezik, az említett izolált pontokban pedig

$$\alpha_A(\lambda) > n.$$

Bizonyítás. Legyen $n=\min \alpha_A(\lambda)$ $(\lambda\in G)$ és ezt a minimumot a $\lambda=\lambda_0$ pontban érje el, azaz $\alpha_A(\lambda_0)=n$.

Jelöljük λ_1-el azt a tetszőleges G-beli pontot, amelyre $\alpha_A(\lambda_1)>n$. Megmutatjuk, hogy λ_1 izolált pont, azaz található olyan $\varepsilon_1>0$, hogy az összes $0<|\lambda-\lambda_1|<\varepsilon_1$ egyenlőtlenségnek eleget tevő — λ-ra igaz $\alpha_A(\lambda)=n$. Ebből a célból kössük össze a λ_0 és λ_1 pontokat egy — teljesen a G-ben fekvő — Γ görbével. Alkalmazva a 3.1. lemmát az $A-\lambda I$ és $B=I$ operátorokra, azt kapjuk, hogy a Γ görbe minden λ pontjának megfelel egy olyan $\varepsilon_\lambda>0$ szám, hogy a $0<|\mu-\lambda|<\varepsilon_\lambda$ egyenlőtlenségnek eleget tevő μ-kre az $\alpha_A(\mu)$ függvény konstans. Konstruálva ilyen U_λ környezetet minden $\lambda\in\Gamma$ ponthoz, a Γ-nak egy lefedését kapjuk. Kiválasztunk abból egy véges $U_1, U_2, \ldots, U_N$ $(\lambda_1\in U_N)$ lefedést. Megjegyezve, hogy ebben a lefedésben a szomszédos környezetek metszik egymást, megállapíthatjuk, hogy az U_j $(j=1,\ldots,N)$ környezetek minden pontjában, kivéve esetleg azok középpontjait, az $\alpha_A(\lambda)$ függvény megőrzi ugyanazt az értéket. Mivel pedig a λ_0 pontot tartalmazó U_1 környezetben $\alpha_A(\lambda)=n$, így a λ_1 pont egész U_N környezetében, kivéve esetleg magát a λ_1 pontot, fennáll $\alpha_A(\lambda)=n$.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha az összefüggő $G\subset\Phi_A$ komponensben létezik legalább egy olyan λ pont, amelyben az $A-\lambda I$ operátor folytonosan invertálható, akkor a kompo-*

nens összes λ pontjában is, kivéve esetleg bizonyos izolált pontokat, az $A-\lambda I$ operátor folytonosan invertálható.

A 2.6. tétel segítségével könnyen belátható a

3.4. TÉTEL. *Legyen A egy lineáris zárt operátor, B pedig egy A-teljesen folytonos operátor. Akkor az A és $A+B$ operátorok Φ-halmazai egybeesnek: $\Phi_{A+B}=\Phi_A$.*

3. A bebizonyított 3.1. és 3.3. tételeknek természetes általánosításuk van. Legyen G a komplex sík valamely nyílt összefüggő tartománya, és legyen adva ebben a tartományban egy A_λ $(\lambda \in G)$ operátorfüggvény, amelynek értékei a $\mathfrak{B}_1$-ből $\mathfrak{B}_2$-be ható lineáris zárt operátorok.

Az A_λ operátor-függvényt *holomorfnak* fogjuk nevezni a G tartományban, ha az összes $\lambda_0 \in G$ pont környezetében az A_λ függvény az operátorok normájára nézve konvergens sorba fejthető:

$$A_\lambda = A_{\lambda_0} + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^k C_k,$$

ahol C_k $(k=1, ..., n)$ lineáris korlátos operátor $(C_k \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2;\ k=1, 2, ...)$.

Könnyen belátható a következő állítás.

3.5. TÉTEL. *Legyen A_λ holomorf operátor-függvény a G tartományban, és bármely $\lambda \in G$ pontban az A_λ operátor legyen Φ-operátor. Akkor az összes $\lambda \in G$ pontban az A_λ operátor indexe ugyanazt az értéket veszi fel.*

Megjegyezzük, hogy a 3.1. lemma érvényben marad, ha megfogalmazásában az $A-\lambda B$ operátort olyan A_λ operátorral helyettesítjük, amely eleget tesz a 3.5. tétel feltételeinek.

Innen könnyen kijön, hogy a 3.3. tétel a következő módon általánosítható:

3.6. TÉTEL. *Az összes $\lambda \in G$ pontokra, kivéve esetleg bizonyos izolált pontokat, az α_{A_λ} függvény konstans értéket vesz fel:*

$$\alpha_{A_\lambda} = n,$$

az említett izolált pontokban pedig $\alpha_{A_\lambda} > n$.

3.7. TÉTEL. *Legyen A_λ egy holomorf operátor-függvény a G tartományban, amely függvénynek értékei $\mathfrak{B}$-ben definiált lineáris teljesen folytonos operátorok. Akkor az összes $\lambda \in G$ komplex pontban, kivéve esetleg bizonyos izolált pontokat, az $\alpha(\lambda) = \alpha_{I-A\lambda}$ függvénynek konstans értéke van: $\alpha(\lambda)=n$; az említett izolált pontokban pedig $\alpha(\lambda)>n$.*

Ha legalább egy pontban az $\alpha(\lambda)=0$, akkor az összes $\lambda \in G$ pontban, kivéve esetleg bizonyos izolált pontokat, az $I-A_\lambda$ operátornak létezik korlátos inverze.

4. §. Tételek a gyök-alterekről és gyökértékekről

1. Előbb emlékeztetünk a lineáris operátorok rezolvens elméletének egy sor fogalmára és állítására.

Legyen A egy lineáris operátor, amely valamely $\mathfrak{B}$ *Banach*-térben hat.

A komplex sík λ pontját az A operátor *reguláris pontjának* nevezzük, ha az $A-\lambda I$ operátor folytonosan invertálható, azaz létezik az egész $\mathfrak{B}$-n definiált korlátos olyan R_λ operátor (amelyet *rezolvensnek* nevezzük), hogy

$$R_\lambda(A-\lambda I) = (A-\lambda I)R_\lambda = I.$$

Ha az A operátornak létezik legalább egy λ_0 reguláris pontja, akkor nyilván az $A-\lambda_0 I$ és vele az A operátor is zárt.

Az A operátor összes reguláris pontjainak az O_A halmaza mindig nyílt. Valóban, ha $\lambda_0 \in O_A$, akkor az

$$A-\lambda I = A-\lambda_0 I+(\lambda_0-\lambda)I = (A-\lambda_0 I)(I+(\lambda_0-\lambda)R_{\lambda_0})$$

előállításból következik, hogy a

$$|\lambda-\lambda_0| < |R_{\lambda_0}|^{-1}$$

körben létezik R_λ rezolvens, amelyet az

$$R_\lambda = (I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0})^{-1}R_{\lambda_0} = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R_{\lambda_0}^{k+1}$$

képlettel kaphatunk meg.

Egyidejűleg meggyőződhetünk arról, hogy az O_A halmaz minden összefüggő komponensében az R_λ rezolvens holomorf operátor-függvény.

Mint ismeretes, az A operátor *spektrumának* nevezzük az O_A halmaz S_A komplementerét az egész komplex síkban. Ilyen módon, az S_A spektrum mindig zárt halmaz.

Szükségünk lesz F. Riesz [33] egy sor alapvető eredményére, amelyeket a *Hilbert*-tér korlátos operátoraira még 1912-ben megállapított, de amelyek közvetlenül átvihetők a *Banach*-tér zárt operátorainak az esetére.

Legyen Γ egy olyan egyszerű vagy összetett vektifikálható kontúr, amely valamely G_Γ tartományt határol, és az A operátor reguláris pontjaiból áll, úgy hogy az $R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$ egy analitikus reguláris operátor függvény a Γ-n. Feltételezve, hogy a Γ kontúrnak pozitív irányítása van a G_Γ tartományra nézve, képezzük a következő integrált

$$P_\Gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\lambda \, d\lambda.$$

Akkor a következőket állíthatjuk:

I) A P_Γ operátor egy projektor, méghozzá a

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_\Gamma \dotplus \mathfrak{Q}_\Gamma \quad (\mathfrak{P}_\Gamma = P_\Gamma \mathfrak{B},\ \mathfrak{Q}_\Gamma = (I-P_\Gamma)\mathfrak{B})$$

felbontásban mindkét $\mathfrak{Q}_\Gamma$ és $\mathfrak{P}_\Gamma$ összeadandó invariáns altér az A operátorra nézve, és rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

1) Az A operátor az egész $\mathfrak{P}_\Gamma$-n definiálva van, és spektruma teljes egészében benne van G_Γ-ban.

2) Az A operátor $\mathfrak{Q}_\Gamma$-ban a $\mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{Q}_\Gamma$-n van definiálva és spektruma teljes egészében a zárt G_Γ tartományon kívül fekszik.

II) Ha Γ_1 és Γ_2 a fenti tulajdonságokkal rendelkező két kontúr, és a G_{Γ_1} és G_{Γ_2} tartományoknak nincs közös pontjuk, akkor az azoknak megfelelő projektorok ortogonálisak, azaz

$$P_{\Gamma_1} \cdot P_{\Gamma_2} = P_{\Gamma_2} \cdot P_{\Gamma_1} = 0.$$

Megjegyezzük, hogy az I)-ből — a zárt altérben definiált lineáris zárt operátor korlátosságáról szóló BANACH [28] tétel szerint — következik, hogy az A operátor korlátos a $\mathfrak{P}_\Gamma$ altérben.

Ezenkívül (I és II)-ből következik, hogy ha a G_Γ tartományban az A operátor spektrumának véges sok pontja van, és ezek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, akkor

$$P_\Gamma = P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2} + \ldots + P_{\lambda_n}, \quad P_{\lambda_j} \cdot P_{\lambda_k} = 0 \quad (j \neq k), \tag{4.1}$$

ahol P_{λ_j} $(j=1, \ldots, n)$ projektorok, amelyek $\mathfrak{B}$-t az A-ra nézve invariáns olyan $P_{\lambda_j}\mathfrak{B}(\subset \mathfrak{D}_A)$ alterekbe projektálják, amelyek mindegyikében az A operátor teljes spektruma egyetlen λ_j számból áll.

Valóban, legyenek a γ_j-k páranként idegen, λ_j középpontú körök, amelyek teljes egészében benne vannak G_Γ-ban. Akkor

$$P_\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_j} R_\lambda \, d\lambda = \sum_{j=1}^{n} P_{\lambda_j}.$$

2. Egy x vektort az A operátor λ számnak megfelelő *gyök-vektorának*[4] nevezzük, ha létezik olyan n természetes szám, hogy

$$(A-\lambda I)^n x = 0.$$

Ha a λ_0 számnak megfelel legalább egy $x_0 \neq 0$ gyök-vektor, akkor λ_0 az operátor sajátértéke. Valóban, ha k az a legkisebb természetes szám, amelyre $(A-\lambda_0 I)^k x_0 = 0$, akkor $Ay_0 = \lambda_0 y_0$, ahol $y_0 = (A-\lambda_0 I)^{k-1}$.

Az A operátor ugyanazon λ_0 számhoz tartozó összes gyökvektorainak $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$ halmazát az A operátor λ_0 számnak megfelelő *gyök-lineáris* halmazának (vagy, ha az zárt, *gyök alterének*) nevezzük.

A $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$ altér dimenzióját a λ_0 sajátérték *multiplicitásának* fogjuk nevezni, és $\nu_A(\lambda_0)$-al fogjuk jelölni.

Megállapodunk azt mondani, hogy a λ_0 pontnak az A operátor *normálisan leválasztható* $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$ *gyök-altere* felel meg, ha az egész tér előállítható két alterének

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C}_{\lambda_0} \dot{+} \mathfrak{N}_{\lambda_0} \tag{4.2}$$

direkt összegeként, mégpedig az $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ második összeadandó az A operátorra nézve invariáns altér, az $A-\lambda_0 I$ operátor pedig folytonosan invertálható az $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$-ban.

Ha a normálisan leválasztható $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$ gyök altér véges dimenziós, akkor a $\mathfrak{B}$ tér (2.2) felbontása a fenti tulajdonságokkal egyértelmű. Valóban, ha ν a λ_0 multiplicitása, akkor, mivel az A operátornak $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$-ban a spektruma az egyetlen λ_0 pontból áll, azt kapjuk, hogy

$$(A-\lambda_0 I)^\nu \mathfrak{C}_{\lambda_0} = 0.$$

Figyelembe véve, továbbá, hogy az $A-\lambda_0 I$ operátor folytonosan invertálható az $\mathfrak{N}$-ben, állíthatjuk, hogy a valamely $\mathfrak{D}_\nu$ értelmezési tartománnyal rendelkező $(A-\lambda_0 I)^\nu$ operátor is folytonosan invertálható $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$-ban, miközben

$$(A-\lambda_0 I)^\nu \mathfrak{D}_\nu = (A-\lambda_0 I)^\nu \mathfrak{C}_{\lambda_0} + (A-\lambda_0 I)(\mathfrak{D}_\nu \cap \mathfrak{N}_{\lambda_0}) = \mathfrak{N}_{\lambda_0}.$$

[4] A „gyök-vektor" terminus helyett az irodalomban használnak úgyszintén „null-elem" (F. RIESZ) és „adjungált elem" elnevezéseket.

Ilyen módon, $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ az $(A-\lambda I)^\nu$ operátor értékkészlete.

Nyilvánvaló, hogy az a λ_0 pont, amelynek az A operátor véges dimenziós normálisan leválasztható gyök-altere felel meg, az A operátor Φ-pontja.

Azonkívül a λ_0 pont valamely környezetéhez tartozó összes $\lambda \neq \lambda_0$ pont az A operátor reguláris pontja. Valóban, jelöljük A_1 és A_2-vel az A operátor által megfelelően az $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$ és $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ alterekben indukált operátoroknak. Amint azt már megjegyeztük, az $A_1-\lambda_0 I$ operátor nulpotens, azaz $(A_1-\lambda_0 I)^\nu=0$.

Jelöljük n-nel a legkisebb olyan természetes számot, hogy $(A_1-\lambda_0 I)^n=0$. Akkor, feltételezve $B_1=A_1-\lambda_0 I$-t, azt kapjuk, hogy

$$-(\lambda-\lambda_0)^n I = B_1^n-(\lambda-\lambda_0)^n I = (A_1-\lambda I)[(\lambda-\lambda_0)^{n-1}I+(\lambda-\lambda_0)^{n-2}B_1+\ldots+B_1^{n-1}].$$

Innen

$$-(A_1-\lambda I)^{-1} = (\lambda-\lambda_0)^{-1}I+\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda-\lambda_0)^{-j-1}B_1^j.$$

Másrészt az $A_2-\lambda_0 I$ operátor folytonosan invertálható az $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ altérben. Következésképp, a $|\lambda-\lambda_0|<1/|(A_2-\lambda_0 I)^{-1}|$ körből vett összes λ számra létezik

$$(A_2-\lambda I)^{-1} = R_0+(\lambda-\lambda_0)R_0^2+\ldots+(\lambda-\lambda_0)^n R_0^{n+1}+\ldots$$

rezolvens, ahol $R_0=(A_2-\lambda_0 I)^{-1}$. Innen következik, hogy az $0<|\lambda-\lambda_0|<|R_0|^{-1}$ egyenlőtlenségnek eleget tevő összes λ pont reguláris pontja az A operátornak, mégpedig ezekre a pontokra a rezolvens a következő képlettel fejezhető ki:

$$R_\lambda = (\lambda-\lambda_0)^{-n}B_1^{n-1}+\ldots+(\lambda-\lambda_0)^{-2}B_1+(\lambda-\lambda_0)^{-1}P+\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R_0^{k+1}, \tag{4.3}$$

ahol a B_1 és R_0 lineáris operátorok bővítve vannak az egész térre úgy, hogy

$$B_1 y = 0, \quad R_0 x = 0 \quad (x\in\mathfrak{C}_{\lambda_0},\ y\in\mathfrak{N}_{\lambda_0}),$$

P pedig egy projektor, amely az egész $\mathfrak{B}$ teret projektálja a $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$ altérre az $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$-lal párhuzamosan.

Integrálva a (4.3) egyenlőség mindkét oldalát a Γ kontúr mentén, azt kapjuk, hogy

$$P = P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\lambda\, d\lambda. \tag{4.4}$$

Csak keveset kell az előbbiekhez hozzátennünk, hogy bebizonyítsuk a következő állítást.

4.1. TÉTEL. *Legyen Γ egy olyan rektifikálható kontúr, amely valamely G_Γ tartományt határol, és a zárt A operátor reguláris pontjaiból áll. A G_Γ tartomány az A operátor spektrumának végesszámú olyan pontját fogja tartalmazni, amelyek sajátértékek véges dimenziós normálisan leválasztható gyök alterekkel, akkor és csakis akkor, ha a P_Γ projektor véges dimenziós.*

Ennek a feltételnek a teljesülése mellett a $\mathfrak{P}$ altér az A operátor különböző $\lambda\in G_\Gamma$ sajátértékeinek megfelelő összes gyök altereinek a direkt összege.

Bizonyítás. Álljon az A operátor G_Γ-ban levő egész spektruma a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ véges sok olyan sajátértékből, amelyeknek véges dimenziós normálisan leválasztható gyök alterek felelnek meg. Akkor a (4.2) és (4.4) összefüggések miatt

$$P_\Gamma = P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2} + \ldots + P_{\lambda_n} \quad (P_{\lambda_j} P_{\lambda_k} = 0, \text{ ha } j \neq k),$$

ahol a P_{λ_j} $(j=1, \ldots, n)$ projektor az egész $\mathfrak{B}$ teret az A operátor λ_j sajátértékének megfelelő véges dimenziós gyök-altérbe projektálja.

Következésképp, a P_Γ projektor véges dimenziós és

$$\mathfrak{P}_\Gamma = P_\Gamma \mathfrak{B} = \sum_{j=1}^{n} P_{\lambda_j} \mathfrak{B} = \mathfrak{C}_{\lambda_1} \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{C}_{\lambda_n}.$$

Megfordítva, legyen a P_Γ projektor véges dimenziós.

Akkor a $\mathfrak{B}$ tér előállítható az A operátorra nézve invariáns $\mathfrak{P}_\Gamma$ és $\mathfrak{Q}_\Gamma$ alterek

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_\Gamma \dotplus \mathfrak{Q}_\Gamma$$

direktösszegeként.

Jelöljük A_1, A_2-vel az A operátor által a megfelelő $\mathfrak{P}_\Gamma$ és $\mathfrak{Q}_\Gamma$ alterekben indukált operátorokat. A $\mathfrak{P}_\Gamma$ altér véges dimenziós, ezért az A_1 operátor spektruma véges sok λ_j $(j=1, \ldots, n;\ \lambda_j \in G_\Gamma)$ sajátértékből áll. A véges matrixok elméletének ismert eredményei alapján a $\mathfrak{P}_\Gamma$ altér felbontható az A operátorra nézve invariáns olyan $\mathfrak{C}_j$ $(j=1, \ldots, n)$ alterek direktösszegére, hogy az $A_1 - \lambda_j I$ operátor nilpotens a megfelelő $\mathfrak{C}_j$ altérben. Innen, mellesleg, következik, hogy az $A_1 - \lambda_j I$ operátor invertálható az összes $\mathfrak{C}_k$ $(k \neq j)$ altérben.

Az $A_2 - \lambda I$ operátor invertálható az összes $\lambda \in G_\Gamma$-ra, ezért az A operátor spektruma a G_Γ tartományban egybeesik az A_1 operátor spektrumával. Ilyen módon az A operátornak G_Γ-ban végesszámú λ_j $(j=1, \ldots, n)$ sajátértéke van, amelyeknek végesdimenziós $\mathfrak{C}_j$ $(j=1, \ldots, u)$ gyök-alterek felelnek meg. Ezek az alterek normálisan leválaszthatóak, ugyanis a $\mathfrak{B}$ tér felbontható az A operátorra nézve invariáns alterek

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C}_j \dotplus \mathfrak{N}_j \quad (j = 1, \ldots, u)$$

direktösszegére, méghozzá az $A - \lambda_j I$ operátor folytonosan invertálható a

$$\mathfrak{N}_j = \mathfrak{P}_\Gamma + \sum_{k \neq j} \mathfrak{C}_k \quad (j = 1, \ldots, u)$$

altérben.

A tételt bebizonyítottuk.

3. Az előbbi állítások egy része általánosítható. Ismerjük ezeket, bár a következőkben nem fogjuk őket használni. Legelőször is rámutatunk a következő tényre. Ha a Γ kontúr eleget tesz a 4.1. tétel feltételeinek, akkor a megfelelő $\mathfrak{P}$ altér mindig fogja tartalmazni az összes olyan $x \in \mathfrak{D}_A$ vektort, amelyekre legalább egy $\lambda \in G_\Gamma$ mellett teljesül

$$\lim_{n \to \infty} |(A - \lambda I)^n x|^{1/n} = 0. \tag{4.5}$$

Valóban, teljesüljön valamely $x_0 \in \mathfrak{D}_A$ és $\lambda_0 \in G_\Gamma$-ra a (4.5) feltétel. Akkor, felhasználva az $x_0 = y_0 + z_0$ ($y_0 \in \mathfrak{P}_\Gamma$, $z_0 \in \mathfrak{Q}_\Gamma$) felbontást, azt kapjuk, hogy

$$(A-\lambda_0 I)^n x_0 = (A-\lambda_0 I)^n y_0 + (A-\lambda_0 I)^n z_0$$

és így

$$|(A-\lambda_0 I)^n z_0| = |(I-P_\Gamma)(A-\lambda_0 I)^n x_0| \leqq |I-P_\Gamma| |(A-\lambda_0 I)^n x_0|.$$

Innen

$$\lim_{n\to\infty} |(A-\lambda_0 I)^n z_0|^{1/n} = 0. \tag{4.6}$$

Másrészt, az $A-\lambda_0 I$ operátor folytonosan invertálható $\mathfrak{Q}_\Gamma$-ban, ezért létezik olyan $m>0$, hogy

$$|(A-\lambda_0 I)z| \geqq m|z| \quad (z \in \mathfrak{Q}_\Gamma).$$

Innen

$$|(A-\lambda_0 I)^n z_0| \geqq m^n |z_0|,$$

ami a (4.6)-tal összevetve azt adja, hogy $z_0 = 0$, azaz $x_0 \in \mathfrak{P}_\Gamma$.

Ha a G_Γ tartományban az A operátor spektrumának csak egy λ_0 pontja van, akkor a bizonyított állítás erősíthető, mégpedig, ebben az esetben $\mathfrak{P}_\Gamma$ egybeesik az összes $x \in \mathfrak{D}_A$ olyan elemek halmazával, amelyekre

$$\lim_{n\to\infty} |(A-\lambda_0 I)^n x|^{1/n} = 0.$$

Sőt, ebben az esetben $\mathfrak{P}_\Gamma$ az A operátor legnagyobb invariáns olyan altere, amelyben az A operátor a

$$\lim_{n\to\infty} |(A_1-\lambda_0 I)^n x|^{1/n} = 0$$

feltételnek eleget tevő korlátos A_1 operátort indukál.

Ez a tény közvetlenül adódik az előbbiből, ha figyelembe vesszük az ismert eredményt (l. [33] 149. §), amely szerint a *Banach*-teret saját részébe leképező korlátos V operátor spektruma egyetlen $\lambda=0$ pontból áll akkor és csakis akkor, ha

$$\lim_{n\to\infty} |V^n|^{1/n} = 0.$$

4.2. TÉTEL. *Ahhoz, hogy a λ_0 számnak az A zárt operátor véges dimenziós normálisan leválasztható gyök-altere feleljen meg, szükséges és elegendő, hogy a λ_0 a következő két feltételnek tegyen eleget:*

1) *a λ_0 szám az A operátor spektrumának izolált pontja;*

2) *Az $A-\lambda_0 I$ operátor normálisan feloldható, és véges d-karakterisztikája van.*

Bizonyítás. A tétel feltételének szükségességét tisztáztuk a 2. pontban.

Bebizonyítjuk annak elegendőségét. Tegyen eleget λ_0 az 1) és 2) feltételeknek, azaz λ_0 legyen az A operátor spektrumának izolált pontja, amely benne van Φ_A-ban.

Akkor egy elég kis $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ kör minden $\lambda \neq \lambda_0$ pontja reguláris pontja lesz az A operátornak, és így λ_0 benne van a Φ_A halmaz valamely C komponensében, amelyben vannak reguláris pontok. A 3.1. tétel alapján az összes $\lambda \in C$ pontra a $\varkappa_A(\lambda)=0$ és, speciálisan, $\varkappa_A(\lambda_0)=0$.

Ilyen módon λ_0 az A operátor sajátértéke, mégpedig $\alpha_A(\lambda_0) = \beta_A(\lambda_0)$.

Tekintsük azt a $\mathfrak{C}$ alteret, amelyre a

$$P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda-\lambda_0|=\delta} (A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda$$

projektor az egész $\mathfrak{B}$ teret projektálja.

Jelöljük A_1-el az A operátor által a $\mathfrak{C}$-ben indukált korlátos operátort.

Minden λ pont, a λ_0 kivételével, reguláris pontja az A_1 operátornak, a λ_0 pedig, amint azt tisztáztuk, az A operátor véges multiplicitású sajátértéke, tehát az A_1-nek is az. Azonkívül az A_1 operátor normálisan feloldható, és $\varkappa_{A_1}(\lambda_0)=0$.

Innen a 3.2. tétel szerint a $\mathfrak{C}$ altér véges dimenziós.

Következésképp, a 4.1. tétel miatt, a λ_0 pontnak normálisan leválasztható gyök-altér felel meg.

A tételt bebizonyítottuk.

4. Legyen Γ egy tetszőleges rektifikálható kontúr, amely egy G_Γ tartományt határol, és amely a zárt A operátorra nézve a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) a G_Γ-ben véges sok $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sajátértéke van az A operátornak, amelyeknek véges dimenziós normálisan leválasztható gyök-alterek felelnek meg.

b) a zárt G_Γ tartomány összes többi λ $(\lambda \neq \lambda_j)$ pontja az A operátor reguláris pontja.

Az operátor Γ kontúrnak megfelelő *gyök értékének* nevezzük az A operátor összes λ_j $(j=1, \ldots, n)$ a G_Γ tartományba eső sajátértékei multiplicitásainak az összegét, azaz a

$$\nu_A(\Gamma) = \nu_A(\lambda_1) + \ldots + \nu_A(\lambda_n)$$

számot.

A (4.1) képletnek megfelelően

$$\nu_A(\Gamma) = \dim P_\Gamma \mathfrak{B},$$

ahol P_Γ a

$$P_\Gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda \tag{4.7}$$

képlettel definiált projektor.

Áttérünk most a gyökérték *stabilitási* tulajdonságának a bizonyítására.

4.3. Tétel. *Legyen Γ egy valamely G_Γ tartományt határoló rektifikálható zárt kontúr, amely a zárt A operátorra nézve eleget tesz az* a) *és* b) *tulajdonságoknak. Akkor létezik olyan $\varrho > 0$, hogy a $|B| < \varrho$ egyenlőtlenségnek eleget tevő összes B lineáris korlátos operátorra $(B\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B})$ a Γ kontúr rendelkezik az* a) *és* b) *tulajdonságokkal az $A+B$ operátorra nézve is, méghozzá*

$$\nu_{A+B}(\Gamma) = \nu_A(\Gamma).$$

Bizonyítás. Az előbbiekhez hasonlóan R_λ-val jelöljük az A operátor rezolvensét és legyen

$$\delta = 1/\max_{\lambda \in \Gamma} |R_\lambda|.$$

Akkor

$$\varrho = \delta^2/\left(\delta+\frac{l}{2\pi}\right) \quad (<\delta),$$

ahol l a Γ kontúr hossza, amely számnak a létezését a tétel állítja. Valóban, legyen B tetszőleges olyan lineáris korlátos operátor, amely eleget tesz a

(4.8) $$|B| < \varrho$$

egyenlőtlenségnek.

Az összes $\lambda\in\Gamma$ pont reguláris pontja az $A+B$ operátornak, ugyanis, amint könnyen látható, $\lambda\in\Gamma$ mellett létezik

(4.9) $$(A+B-\lambda I)^{-1} = [(I+BR_\lambda)(A-\lambda I)]^{-1} = R_\lambda\left(I+\sum_{j=1}^{\infty}(-BR_\lambda)^j\right),$$

ahol az egyenlőség jobb oldalán levő sor konvergenciáját az garantálja, hogy a (4.8) miatt

$$|BR_\lambda| \leqq |B||R_\lambda| < 1 \quad (\lambda\in\Gamma).$$

Bevezetjük most a

$$\tilde{P}_\Gamma = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (A+B-\lambda I)^{-1}\,d\lambda$$

egyenlőséggel definiált $\tilde{P}_\Gamma$ projektort.

A (4.7) és (4.9)-ből következik, hogy

$$|\tilde{P}_\Gamma - P_\Gamma| = \frac{1}{2\pi}\left(\int_\Gamma R_\lambda \sum_{j=1}^{\infty}(-BR_\lambda)^j\,d\lambda\right) \leqq \frac{1}{2\pi}\max_{\lambda\in\Gamma}\frac{|B||R_\lambda|^2}{1-|B||R_\lambda|}.$$

Felhasználva

$$|B| < \varrho = 2\pi\delta^2/(l+2\pi\delta), \quad |R_\lambda| < \delta^{-1} \quad (\lambda\in\Gamma)$$

egyenlőtlenségeket, azt kapjuk, hogy

$$|\tilde{P}_\Gamma - P_\Gamma| < 1.$$

Innen az 1.2. tétel miatt

(4.10) $$\dim \tilde{P}_\Gamma\mathfrak{B} = \dim P_\Gamma\mathfrak{B},$$

és ezért a P_Γ-val együtt véges dimenziós a $\tilde{P}_\Gamma$ projektor is.

Akkor viszont, a 4.1. tétel miatt, a Γ kontúr rendelkezni fog az a) és b) tulajdonságokkal az $A+B$ operátorra nézve is. Ezen kívül, a (4.10) egyenlőség azt jelenti, hogy $\nu_\Gamma(A+B)=\nu_\Gamma(A)$.

Megjegyzés. A bizonyításból következik, hogy a tétel érvényben marad akkor is, ha a B operátorra tett feltételezést általánosabbal helyettesítjük, éspedig hogy B olyan A-korlátos operátor, amely minden $\lambda\in\Gamma$-ra eleget tesz a

$$|BR_\lambda| < 2\pi\delta/(l+2\pi\delta)$$

egyenlőtlenségnek.

Könnyű belátni, hogy ez az egyenlőtlenség teljesül minden $\lambda \in \Gamma$-ra, ha a B operátornak elég kicsi A-normája van, azaz ha a

$$|Bx| < k(|x| + |Ax|)$$

egyenlőtlenség teljesül elég kicsi k mellett, például ha

$$(0 <)k < 2\pi\delta(l+2\pi\delta)^{-1}\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^{-1}.$$

Azonkívül, ha a $\nu_A(\Gamma)$ számot úgy definiáljuk mint $\dim P_\Gamma\mathfrak{B}$-t abban az esetben is, ha $P_\Gamma\mathfrak{B}$ végtelen dimenziós, akkor a B-re vonatkozó ugyanolyan feltételek mellett állítható, hogy $\nu_\Gamma(A+B) = \nu_\Gamma(A)$.

5. §. Tételek az önadjungált operátorok perturbációjáról

1. Legyen H egy önadjungált (azaz *Hermite*-féle hipermaximális) operátor, amely a $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-térben hat. Akkor, amint ismeretes, bármely nem valós λ pont reguláris pontja a H-nak, azaz létezik hozzá korlátos $R_\lambda = (H-\lambda I)^{-1}$ rezolvens, mégpedig

(5.1) $$|R_\lambda| \leqq 1/|\mathrm{Im}\,\lambda|.$$

Ilyen módon az önadjungált H operátor Φ-halmaza mindenesetre tartalmazza az összes nem valós pontokat. Egy valós λ pont akkor lesz a H operátor Φ-pontja, ha az vagy reguláris pontja a H operátornak, vagy izolált (a spektrum többi pontjától) véges multiplicitású sajátérték.

Ezért az önadjungált operátor Φ-halmazát úgy kapjuk, hogy kidobáljuk az egész komplex síkból a H operátor végtelen multiplicitású sajátértékeit és a H spektrumának összes határpontjait (és így az egy, vagy két komponensből áll).

5.1. TÉTEL. *Legyen H egy önadjungált operátor és B egy tetszőleges H-teljesen folytonos operátor. Akkor a $H+B$ operátor egész nem valós spektruma olyan izolált sajátértékekből áll, amelyeknek normálisan leválasztható véges dimenziós gyökalterek felelnek meg. Azonkívül*

$$\Phi_{H+B} = \Phi_H.$$

Bizonyítás. A tételt bebizonyítottuk, ha belátjuk a következő két állítást:

1) $\Phi_{H+B} = \Phi_H$;

2) A félsíkok mindegyikében létezik a $H+B$ operátornak legalább egy reguláris pontja.

Az első állítás következik az általánosabb 3.4. tételből.

A második állítást először abban a feltételezésben bizonyítjuk be, hogy B korlátos operátor.

λ tegyen eleget az

$$|\mathrm{Im}\,\lambda| > |B|$$

egyenlőtlenségnek. Akkor $|R_\lambda|<|B|^{-1}$, és annál inkább $|BR_\lambda|<1$. Az $|BR_\lambda|<1$ egyenlőtlenségnek eleget tevő összes λ-ra a $H+B-\lambda I$ operátor folytonosan invertálható:

(5.2) $$(H+B-\lambda I)^{-1} = R_\lambda \left[I + \sum_{j=1}^{\infty} (-BR_\lambda)^j \right].$$

A korlátos B operátor esetére ismertetett bizonyítás érvényben marad általános esetben is, ha megmutatjuk, hogy valamely nem valós λ-ra fennállnak az

$$|BR_\lambda| < 1 \quad \text{és} \quad |BR_{\bar\lambda}| < 1$$

egyenlőtlenségek.

Most ennek a bizonyításával fogunk foglalkozni.

Felhasználjuk az R_λ és R_μ rezolvensek közötti ismert $R_\lambda = R_\mu + (\lambda-\mu) R_\lambda R_\mu$ összefüggést. Feltételezve ebben $\lambda = i\eta$ és $\mu = i$-t, azt kapjuk, hogy

$$R_{i\eta} = R_i + (\eta-1) i R_i R_{i\eta}.$$

A kapott egyenlőségre tagonként alkalmazva a B operátort, azt kapjuk, hogy

(5.3) $$BR_{i\eta} = BR_i (I + (\eta-1) i R_{i\eta}).$$

Jelölve az $I+(\eta-1)iR_{i\eta}$ operátort C_η-val, annak két tulajdonságát szűrhetjük le:

a) az $|\eta|>1$ egyenlőtlenségnek eleget tevő összes η valós számokra

$$|C_\eta| < 1;$$

b) az összes $f \in \mathfrak{H}$-ra

$$\lim_{\eta\to\infty} |C_\eta^* f| = 0,$$

ahol C_η^* a C_η konjugált operátora.

Legyen E_λ $(-\infty<\lambda<\infty)$ a H operátor spektrálfüggvénye. Akkor, amint ismeretes [30],

$$R_{i\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\lambda}{\lambda - i\eta},$$

és ezért

$$C_\eta = I + i(\eta-1) R_{i\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} dE_\lambda + (\eta-1) i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\lambda}{\lambda-i\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - i\eta} dE_\lambda.$$

Innen

$$|C_\eta f|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda-i}{\lambda-i\eta} dE_\lambda \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2+\eta^2} d(E_\lambda f, f) \leqq |f|^2, \quad \text{ha} \quad \eta^2 > 1.$$

A C_η operátor b) tulajdonságának a bizonyításához megadunk egy tetszőleges $\varepsilon>0$-t, és kiválasztunk valamilyen $N=N_\varepsilon$ pozitív számot úgy, hogy

$$\left(\int_{-\infty}^{-N} + \int_{N}^{\infty} \right) d(E_\lambda f, f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Akkor, megjegyezve, hogy

$$C_\eta^* f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda + i}{\lambda + \eta i} dE_\lambda f,$$

azt kapjuk, hogy

$$|C_\eta^* f|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2+\eta^2} d(E_\lambda f, f) < \Big(\int_{-\infty}^{-N} + \int_{N}^{\infty} \Big) d(E_\lambda f, f) + \int_{-N}^{N} \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2+\eta^2} d(E_\lambda f, f),$$

úgy, hogy

$$|C_\eta^* f| < \varepsilon,$$

amilyen hamar η^2 olyan nagy, hogy

$$\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2+\eta^2} < \frac{\varepsilon}{2|f|}, \quad \text{ha} \quad -N < \lambda < N.$$

A BR_i operátor (l. a 2. §. 2° állítását) teljesen folytonos, és ezért létezik olyan véges dimenziós

$$Kf = \sum_{j=1}^{n} (f, \psi_j) \varphi_j$$

operátor, hogy

$$|BR_i - K| < \frac{1}{2}.$$

A KC_η operátor előállítható

$$KC_\eta f = \sum_{j=1}^{n} (C_\eta f, \psi_j) \varphi_j = (f, C_\eta^* \psi_j) \varphi_j$$

alakban.

Innen

$$|KC_\eta f| \leqq |f| \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j| |C_\eta^* \psi_j|.$$

A C_η^* operátor b) tulajdonsága miatt kiválasztható olyan M szám, hogy az összes $\eta^2 > M$-re

$$|C_\eta^* \psi_j| < 1/2n|\psi_j| \quad (j = 1, \dots, n).$$

Akkor

$$|KC_\eta f| < 1/2|f|, \quad \text{azaz} \quad |KC_\eta| < 1/2 \quad (\eta^2 > M).$$

Visszatérve most az (5.3) egyenlőséghez, azt kapjuk, hogy

$$|BR_{i\eta}| = |BR_i C_\eta| \leqq |BR_i - K| |C_\eta| + |KC_\eta| < 1,$$

ha $\eta^2 = \max\{1, M\}$.

A tételt bebizonyítottuk.

A bebizonyított tételből adódik az

5.1. Következmény. *A $H+B$ operátor valós sajátértékének szintén normálisan leválasztható véges dimenziós gyök-altér felel meg, hacsak ez a szám nem határpontja a H operátor spektrumának, vagy a H operátor végtelen multiplicitású sajátértéke.*

5.2. KÖVETKEZMÉNY. *Ha a H operátor spektruma diszkrét, akkor a $H+B$ operátor spektruma olyan izolált sajátértékekből áll, amelyeknek véges dimenziós normálisan leválasztható gyök-alterek felelnek meg.*

Szükséges még a következő

MEGJEGYZÉS. Ha az operátor rendelkezik még az

$$\operatorname{Im}(Bf, f) \geqq 0 \quad (f \in \mathfrak{D}_A)$$

tulajdonsággal, akkor a $H+B$ operátor egész nem valós spektruma a felső síkon fekszik.

Valóban, ha λ a $H+B$ operátor spektrumának egy nem valós pontja, φ a megfelelő sajátaltér, azaz

$$(A+B)\varphi = \lambda\varphi,$$

akkor skalárisan szorozva az utóbbi egyenlőséget φ-vel, azt kapjuk, hogy

$$(A\varphi, \varphi)+(B\varphi, \varphi) = \lambda,$$

ahonnan

$$\operatorname{Im}\lambda = \operatorname{Im}(B\varphi, \varphi) > 0.$$

Megjegyezzük, hogy ha B egy korlátos operátor, akkor

$$\operatorname{Im}(Bf, f) = \frac{1}{2i}[(Bf, f)-(f, Bf)] = (B_I f, f),$$

ahol

$$B_I = \frac{1}{2i}(B-B^*)$$

a B operátor *képzetes Hermite-féle komponense.*

Ilyen módon a korlátos B operátor esetében az $\operatorname{Im}(Bf, f) \geqq 0$ feltétel ekvivalens a B_I komponens nemnegatív voltával.

2. Az 5.2. következménnyel kapcsolatosan természetes módon vetődik fel a kérdés arról, hogy mikor lesz a $H+B$ operátor összes gyök-vektorainak a rendszere teljes (azaz a nemlineáris zárt burka az egész $\mathfrak{H}$ teret adja).

Az ilyen rendszer teljességének fontos kritériumát (általánosabb tételek következményeként) adta M.V. KELDIS [26].

KELDIS TÉTELE. *Ha az önadjungált H operátornak diszkrét $\{\lambda_j\}$ $(j=1, 2, \ldots)$ olyan spektruma*[5] *van, hogy valamely $p>0$-ra*

$$\sum_{\lambda_j \neq 0} |\lambda_j|^{-p} < \infty, \tag{5.4}$$

[5] Arról beszélve, hogy a H operátornak *diszkrét spektruma* van, mindig azt fogjuk érteni, hogy annak spektruma véges multiplicitású sajátértékekből áll egyetlen határponttal a végtelenben. Elrendezve ezeket a sajátértékeket egy $\{\lambda_j\}$ sorozatba, mindig fel fogjuk tételezni, hogy ebben a sorozatban bármely sajátérték annyiszor fordul elő, amennyi annak a multiplicitása.

és ha B egy H-teljesen folytonos operátor, akkor a $H+B$ operátor gyök-vektorainak rendszere teljes. [6]

A teljesség néhány más, ehhez közeli, de egyszerűbben bizonyítható, kritériuma található M. A. NAJMARK [35] cikkében.

3. Külön kitérünk az önadjungált operátornak korlátossal való perturbációjára. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy az (5.1) egyenlőség egy speciális következménye az általánosabb és pontosabb

$$|R_\lambda| \leqq \frac{1}{d_\lambda} \tag{5.5}$$

összefüggésnek, ahol λ az önadjungált H operátor valamely reguláris pontja, a d_λ pedig a λ pontnak a H operátor S_H spektrumától való távolsága.

Az (5.5) egyenlőtlenség az alábbi következtetésre ad módot:

Legyen H egy önadjungált operátor és B egy tetszőleges korlátos operátor. Akkor a $H+B$ operátor teljes spektruma benne van az M sík azon zárt részében, amelyet a $|B|$ sugarú olyan körök fednek le, amelyek középpontjai befutják a H operátor spektrumának összes pontját.

Ha a $\lambda \notin M$, akkor az (5.5) egyenlőtlenség miatt $|R_\lambda| < 1/|B|$, és ezért a $\lambda \notin M$ pontban létezik korlátos $(H+B-\lambda I)^{-1}$ olyan operátor, amelyet az (5.2) képlettel kaphatunk. Ezt felhasználva bebizonyítjuk a következő állítást:

5.2. TÉTEL. *Legyen H egy önadjugált operátor, B pedig korlátos operátor, és legyen λ_0 a H operátor véges ν_0 multiplicitású valamely sajátértéke, amely a H spektrumának minden más pontjától $d_0 > 2|B|$ távolságra van.*

Akkor az $|\lambda-\lambda_0| < |B|$ zárt körben a $H+B$ operátornak véges számú sajátértéke van, amelyeknek normálisan leválasztható végesdimenziós gyök-alterek felelnek meg, méghozzá ezen sajátértékek multiplicitásainak az összege pontosan egyenlő ν_0-al.

Bizonyítás. Jelöljük Γ-val az $|\lambda-\lambda_0| = \varrho$ kört, ahol ϱ úgy van kiválasztva, hogy

$$|B| < \varrho < \frac{d_0}{2}.$$

Ez a kör a $H+B$ operátor reguláris pontjaiból áll, sőt, reguláris pontokból áll az egész

$$|B| < |\lambda-\lambda_0| \leqq \varrho \tag{5.6}$$

gyűrű.

A Γ kör összes pontjára fennáll az

$$|R_\lambda| < \frac{1}{\varrho} \quad \text{és} \quad |BR_\lambda| < 1 \tag{5.7}$$

[6] Valószínűleg, az (5.4) feltétel jelentősen gyengíthető. Nemrég M. G. KREJNnek sikerült bebizonyítania, hogy az operátor gyök — vektorainak a rendszere teljes lesz, ha H *tetszőleges* önadjungált operátor, amelynek diszkrét spektruma van, a B pedig véges dimenziós operátor (l. úgyszintén az utalást M. Sz, LIVSIC tételére a 426. oldalon).

egyenlőtlenség, és ezért (l. a 4.3. tétel bizonyítását), az $|\lambda-\lambda_0|\leqq\varrho$ kör összes pontja Φ-pontja a $H+B$ operátornak. Mivel az (5.6) gyűrű a $H+B$ operátor reguláris pontjaiból áll, így a Γ körben véges sok sajátértéke van a $H+B$ operátornak.

A B operátornak εB $(0\leqq\varepsilon\leqq 1)$ operátorral való felcserélésével az M halmaz csak szűkülhet, és az (5.7) összes relációja érvényben marad. Következésképp a $H+B$ operátor spektrumának jellemzésére a Γ-ban kimondott fenti állítások átvihetők a $H+\varepsilon B$ operátorra is.

A 4.3. tétel szerint a $\nu_{H+\varepsilon B}(\Gamma)$ gyökérték (azaz a $H+\varepsilon B$ operátor Γ-ra eső összes sajátértékei multiplicitásainak az összege) az ε folytonos függvénye lesz, mivel pedig ez a függvény csak egész értékeket vehet fel, így az konstans. Speciálisan,

$$\nu_H(\Gamma) = \nu_{H+B}(\Gamma).$$

A tételt bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. Mint ismeretes, az (5.5) képlet igaz nemcsak az önadjungált operátorokra, hanem az unitér és általános tetszőleges normális operátorra. Ezért a tétel átvihető arra az esetre is, amikor H egy tetszőleges normális operátor.

4. A H operátor nem valós spektrumára részletesebb jellemzést lehet adni, ha a H és B operátorokra bizonyos újabb megszorításokat teszünk. Ebből a célból egy sor fogalmat vezetünk be.

Azt fogjuk mondani, hogy a teljesen folytonos A operátornak *véges spektrálnyoma* van, ha a sajátértékeiből alkotott

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_j \tag{5.8}$$

sor abszolút konvergens, miközben feltételezzük, hogy az (5.8) sorban minden sajátérték annyiszor szerepel, amennyi a multiplicitása.

Az (5.8) sort az A operátor *spektrálnyomának* nevezzük, és $\sigma_S(A)$-val jelöljük.

A következőkben szükséges lesz a következő elemi

5.1. LEMMA. *Legyen T egy nemnegatív teljesen folytonos, véges spektrálnyommal rendelkező operátor. Akkor, bármilyen legyen az ω_j $(j=1, 2, \ldots)$ ortonormált rendszer, teljesül a*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (T\omega_\nu, \omega_\nu) \leqq \sigma_S(T)$$

egyenlőtlenség.

Az egyenlőség itt akkor és csakis akkor áll fenn, ha az $\{\omega_\nu\}$ rendszer lineáris zárt burka tartalmazza a T operátor nullától különböző sajátértékeihez tartozó összes saját vektorokat.

Bizonyítás. Legyen μ_j $(j=1, 2, \ldots; \mu\geqq 0)$ a T operátor összes sajátértékeinek a sorozata, az e_j $(j=1, 2, \ldots)$ pedig a megfelelő összes normált saját vektorok sorozata. Akkor

$$\omega_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} e_k, \quad a_{jk} = (\omega_j, e_k) \quad (j, k = 1, 2, \ldots)$$

és

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

(5.9)
$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \leqq 1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Az (5.9)-ben az egyenlőség az összes k-ra akkor és csakis akkor áll fenn, ha az összes e_k vektorok benne vannak az $\{\omega_j\}$ rendszer lineáris burkában.

Az ω_j felbontásából kapjuk, hogy

$$T\omega_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\mu_k e_k \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

és ezért

$$\sum_{j=1}^{\infty} (T\omega_j, \omega_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2\mu_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k,$$

azaz

(5.10)
$$\sum_{j=1}^{\infty} (T\omega_j, \omega_j) \leqq \sigma_S(T).$$

Az (5.10)-ben az egyenlőség jele akkor és csakis akkor áll fenn, amikor az fennáll az (5.9)-ben is az összes $k=1, 2, \ldots$-re, és ezért abban és csakis abban az esetben igaz, amikor az összes e_j benne van az $\{\omega_j\}$ sorozat lineáris burkában.

A lemmából az alábbi következmény adódik:

1°. Ha a teljesen folytonos önadjungált A operátornak véges spektrálnyoma van, akkor, bármilyen legyen a φ_j $(j=1, 2, \ldots)$ ortonormált bázis $\mathfrak{H}$-ban, teljesül

$$\sigma_S(A) = \sum_{j=1}^{\infty} (A\varphi_j, \varphi_j),$$

ahol a jobboldalon álló sor abszolút konvergens.

Valóban, legyen $\{e_j\}$ az A operátor sajátvektorainak teljes ortonormált rendszere: $A_{e_j} = \lambda_j e_j$ $(j=1, 2, \ldots)$.

Definiáljuk az A^+ és A^- nemnegatív operátorokat az

$$A^+ e_j = \lambda_j^+ e_j, \quad A^- e_j = \lambda_j^- e_j \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

egyenlőségekkel, ahol $\lambda_j^+ = 1/2\,(|\lambda_j| + \lambda_j)$, $\lambda_j^- = 1/2\,(|\lambda_j| - \lambda_j)$ $(j=1, 2, \ldots)$. Akkor $A = A^+ - A^-$, és nyilván

$$\sigma_S(A) = \sigma_S(A^+) - \sigma_S(A^-) = \sum_{j=1}^{\infty} (A^+\varphi_j, \varphi_j) - \sum_{j=1}^{\infty} (A^-\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} A(\varphi_j, \varphi_j).$$

Az olvasóra bízzuk bebizonyítani, hogy nemnegatív operátorok esetében igaz az 5.1. lemma következő pontosítása.

Legyen A egy nemnegatív operátor és $\{\varphi_j\}$ ortonormált bázis $\mathfrak{H}$-ban. Akkor az A operátor teljesen folytonos lesz és véges spektrálnyoma lesz akkor és csakis akkor, ha a

$$\sum_{j=1}^{\infty}(A\varphi_j, \varphi_j)$$

sor konvergens, miközben a sor összege $\sigma_S(A)$-t adja.

Innen következik, hogy a nemnegatív operátorok pozitív együtthatós tetszőleges lineáris kombinációja, és ezért, a véges spektrálnyommal rendelkező önadjungált operátorok valós együtthatós tetszőleges lineáris kombinációja is, szintén véges spektrálnyommal rendelkezik.

A véges nyommal rendelkező teljesen folytonos önadjungált operátorok lineáris burkát Λ-val fogjuk jelölni.

Nyilvánvaló, hogy $A \in \Lambda$ akkor és csakis akkor, ha Λ-ben benne vannak az A operátor *Hermite*-féle komponensei:

$$A_R = \frac{1}{2}(A+A^*), \quad A_I = \frac{1}{2i}(A-A^*).$$

Ennek a birtokában állíthatjuk, hogy a Λ osztály minden A operátorára a

$$\sum_{j=1}^{\infty}(A\varphi_j, \varphi_j) \tag{5.11}$$

sor konvergens és összege nem függ a $\{\varphi_j\}$ teljes ortonormált bázis kiválasztásától $\mathfrak{H}$-ban.

Az (5.11) összeget az $A \in \Lambda$ operátor *matrixnyomának* fogjuk nevezni és $\sigma_M(A)$-val fogjuk jelölni.

Az 1° állítás azt jelenti, hogy önadjungált operátorok esetében mindkét σ_S és σ_M nyom egybeesik. Amint a következőkben látni fogjuk, a nem önadjungált operátorok esetében ez nem mindig igaz.

5.3. TÉTEL. *Az A operátor legyen előállítható*

$$A = H + iK$$

alakban, ahol H önadjungált operátor (korlátos vagy nem korlátos) K pedig tetszőleges önadjungált teljesen folytonos véges nyommal rendelkező operátor.

Akkor az A operátor $\{\tilde{\lambda}_j\}$ nem valós spektruma rendelkezik a

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\mathrm{Im}\,\tilde{\lambda}_j| < \infty$$

tulajdonsággal, ha pedig K nemnegatív operátor, akkor ezenkívül

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{Im}\,\tilde{\lambda}_j \leqq \sigma_S(K).$$

Bizonyítás. Ha az A operátor minden $\mathfrak{C}_j = \mathfrak{C}_{\lambda_j}$ gyök-alterében kiválasztunk egy *Jordan*-féle bázist, akkor, átindexelve az elemeket az így kapott bázisban, egy $\{\varphi_n\}$ sorozatot kapunk, amely eleget tesz a feltételnek, hogy bármely j-re teljesül a két

(5.12) $$A\varphi_j = \tilde{\lambda}_j \varphi_j, \quad A\varphi_j = \tilde{\lambda}_j \varphi_j + \varphi_{j-1}$$

egyenlőség egyike. .

Jelöljük $\{\omega_j\}$-vel azt az ortonormált rendszert, amelyet a $\{\varphi_j\}$ rendszerből egymásutáni ortogonalizációval kapunk. Akkor könnyű látni, hogy

$$A\omega_j = a_{j1}\omega_1 + \ldots + a_{jj-1} + \omega_{j-1}\tilde{\lambda}_j \omega_j \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Mivel

$$\tilde{\lambda}_j = (A\omega_j, \omega_j) = (H\omega_j, \omega_j) + i(K\omega_j, \omega_j),$$

így

$$\operatorname{Im} \tilde{\lambda}_j = (K\omega_j, \omega_j) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

A K operátornak véges nyoma van, tehát a $\sum (K\omega_j, \omega_j)$ sor abszolút konvergens. Ilyen módon

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\operatorname{Im} \tilde{\lambda}_j| \leqq \sum_{j=1}^{\infty} |(K\omega_j, \omega_j)| \leqq \sigma_S(K^+) + \sigma_S(K^-),$$

ha pedig K nemnegatív operátor, akkor

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} \tilde{\lambda}_j = \sum_{j=1}^{\infty} (K\omega_j, \omega_j) \leqq \sigma_S(K).$$

5.3. KÖVETKEZMÉNY. *Bármely $\mathcal{A} \ni A$ operátornak véges spektrálnyoma van.*

Valóban, az A operátor előáll $A = A_R + iA_I$ alakban, ahol A_R és A_I véges nyommal rendelkező önadjungált operátorok. Következésképp, az A-operátor sajátértékeinek imaginárius részeiből összeállított sor abszolút konvergens. Mivel pedig $iA = -A_I + iA_R$, így az A operátor sajátértékeinek valós részeiből összeállított sor konvergens.

5.4. TÉTEL. *Legyen A egy*

$$A = H + B$$

alakú operátor, ahol H egy önadjungált félkorlátos (alulról) operátor, amely diszkrét $\{\lambda_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ olyan spektrummal rendelkezik, hogy

(5.13) $$\sum_{\lambda_j \neq 0} \frac{1}{\lambda_j} < \infty,$$

B pedig tetszőleges lineáris korlátos operátor. Akkor a $H+B$ operátor $\{\tilde{\lambda}_j\}$ spektruma diszkrét, izolált sajátértékekből áll, amelyekhez normálisan leválasztható véges dimenziós gyök-alterek tartoznak, és azonkívül, azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy a

(5.14) $$\sum_{\tilde{\lambda}_j \neq 0} \frac{1}{\tilde{\lambda}_j}$$

sor abszolút konvergens.

Bizonyítás. A $H+B$ operátor spektruma diszkrét, sőt olyan sajátértékekből áll, amelyeknek véges dimenziós normálisan leválasztható gyök-alterek felelnek meg, ugyanis a B egy teljesen folytonos operátor (l. az 5.2. következményt).

Tekintsük először azt az egyszerű esetet, amikor a B önadjungált operátor, és ezért az összes $\tilde{\lambda}_j$ valós. Nyilvánvaló, hogy a H-val együtt a $H+B$ operátor is félig korlátos alulról. Rendezzük el a λ_j, $\tilde{\lambda}_j$ számokat növekedésük sorrendjében:

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots; \quad \tilde{\lambda}_1 \leqq \tilde{\lambda}_2 \leqq \ldots.$$

Mivel bármely $f \in \mathfrak{H}$-ra

$$(Af, f) = (Hf, f) + (Bf, f),$$

így

(5.15) $$(Hf, f) - |B|(f, f) \leqq (Af, f) \leqq (Hf, f) + |B|(f, f).$$

Visszaemlékezve a sajátértékek minimaximális tulajdonságaira, konstatáljuk, hogy az (5.15)-ből következik

$$\lambda_j - |B| \leqq \tilde{\lambda}_j \leqq \lambda_j + |B| \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Innen, és az (5.13) sor konvergenciájából következik az (5.14) sor abszolút konvergenciája.

Áttérve annak az esetnek a vizsgálatára, amikor a B nem önadjungált operátor, az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy

$$B = iK,$$

ahol K korlátos önadjungált operátor.

Valóban, A mindig előállítható $A = H + B_R + iB_I$ alakban, ahol B_I önadjungált operátor, a $H + B_R$ pedig félig korlátos (alulról) operátor, amely ugyanúgy eleget tesz az (5.14) feltételnek, mint a H (az éppen bizonyítottak szerint).

Sőt, az $A = H + iK$ előállításban feltételezhetjük, hogy H pozitív operátor, amely teljesíti a

$$(Hf, f) \geqq (f, f)$$

feltételt.

Valóban, ez mindig elérhető, ha helyettesítjük az A operátort egy $A + cI$ operátorral (és megfelelően H-t a $H + cI$ operátorral), ahol c egy elég nagy szám, úgy, hogy a helyettesítéstől az (5.14) feltétel érvényben maradjon. Másrészt, ha az $A_I = A + cI$ operátorra bebizonyítjuk a tételt, akkor, érthetően, be lesz az bizonyítva az A operátorra is.

Legyen $\{e_j\}$ a H operátor sajátelemeinek teljes ortonormált rendszere:

$$He_j = \lambda_j e_j \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Tekintsük a $H^{1/2} e_j = \lambda_j^{1/2} e_j$ ($\lambda_j^{1/2} > 0, j = 1, 2, \ldots$) egyenlőségekkel megadott $H^{1/2}$ operátort. Mint ismeretes, az értelmezési tartományra igaz: $\mathfrak{D}_{H^{1/2}} \supset \mathfrak{D}_H$.

A $H^{1/2}$ operátornak van korlátos inverze:

$$(H^{1/2})^{-1} e_j = H^{-1/2} e_j = \lambda_j^{-1/2} e_j \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Az A operátor előállítható

$$A = H^{1/2}(I+i\Gamma)H^{1/2}$$

alakban, ahol

$$\Gamma = H^{-1/2}KH^{-1/2}.$$

A Γ operátor korlátos önadjungált, és ezért az $I+i\Gamma=i(\Gamma-iI)$ operátornak van korlátos inverze. Sőt,

$$(I+i\Gamma)^{-1} = (I-i\Gamma)(I+\Gamma^2)^{-1} = (I+\Gamma^2)^{-1}-i\Gamma(I+\Gamma^2)^{-1}.$$

Innen

$$A^{-1} = H^{-1/2}(I+\Gamma^2)H^{-1/2}-iH^{-1/2}\Gamma(I+\Gamma^2)^{-1}H^{-1/2}.$$

Emlékezve az 5.3. következményre, megállapítjuk, hogy a tétel bizonyításának befejezéséhez azt kell már csak megmutatni, hogy $A^{-1}\in A$, vagy, ami ugyanaz, annak minden *Hermite*-féle komponense véges spektrálnyommal rendelkezik.

Tekintsük, például, az első komponenst:

$$(A^{-1})_R = H^{-1/2}(I+\Gamma^2)H^{-1/2}.$$

Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $f\in\mathfrak{H}$-ra

$$((A^{-1})_R f, f) = ((I+\Gamma^2)H^{-1/2}f, H^{-1/2}f) \geqq 0$$

és

$$((A^{-1})_R f, f) \leqq |I+\Gamma^2||H^{-1/2}f|^2 = \gamma(H^{-1}f, f) \quad (\gamma = |I+\Gamma^2|). \tag{5.16}$$

A feltétel szerint a H^{-1} operátornak véges spektrálnyoma van. Másrészt, az (5.16) egyenlőtlenség és a sajátértékek ismert minimaximalitási tulajdonságainak a következtében az $(A^{-1})_R$ operátor tetszőleges μ_j $(\mu_1\geqq\mu_2\geqq\dots)$ sajátértéke kisebb a H^{-1} operátor megfelelő sajátértékének γ-val való szorzatánál: $\mu_j\leqq\gamma\lambda_j^{-1}$ $(j=1, 2, \dots)$. Innen

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j \leqq \gamma\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{-1}.$$

A tételt bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS: M. V. KELDIS tétele alapján azt állíthatjuk, hogy az 5.4. tétel feltételei mellett a $H+B$ operátor gyök vektorainak a rendszere teljes $\mathfrak{H}$-ban. Ezt a következtetést KELDIS általános tétele nélkül is levonhatjuk az M. A. NAJMARK [35] által leírt egyszerű módszerrel.

5. Visszatérve az (5.3) tételre, természetes feltenni a kérdést, mikor teljesül az $A=H+iK$ alakú A operátorra (ahol H és K véges spektrálnyommal rendelkező önadjungált operátorok) a

$$\sum_{j=1}^{\infty}\operatorname{Im}\tilde{\lambda}_j = \sigma_S(K) \tag{5.17}$$

egyenlőség, ahol $\{\lambda_j\}$ az A operátor nem valós spektruma. Erre a kérdésre választ adott M. Sz. LIVSIC [27] abban az esetben, ha K egy A-beli nemnegatív operátor, H pedig tetszőleges önadjungált teljesen folytonos operátor.

M. Sz. LIVSIC TÉTELE. *Ha A egy olyan teljesen folytonos operátor, amelynek imaginárius Hermite-féle A_I komponense nemnegatív, és véges spektrálnyoma van, akkor*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} \tilde{\lambda}_j \leqq \sigma_S(A_I).$$

Az A operátor gyök-vektorainak rendszere teljes lesz akkor és csakis akkor, ha ebben az egyenlőtlenségben az egyenlőség áll fenn.[7]

Ennek a fontos tételnek rendkívül egyszerű bizonyítását adta B. P. MUKMINOV [36]. Kiderül, hogy a bizonyításnak ez az elemi módszere egy általánosabb tétel kimondását is lehetővé teszi.

5.5. TÉTEL. *Legyen H a következő tulajdonságokkal rendelkező önadjungált operátor:*

1) *H-nak létezik sajátvektoraiból alkotott teljes ortonormált rendszere;*

2) *a H operátor minden sajátértékének a multiplicitása véges;*

3) *a valós számegyenesen létezik a H operátornak legalább egy reguláris pontja.*

Legyen továbbá, K egy véges spektrálnyommal rendelkező nemnegatív operátor. Akkor ahhoz, hogy teljesüljön az (5.17) *egyenlőtlenség, szükséges és elegendő, hogy az $A=H+iK$ operátor gyök-vektorainak a rendszere teljes legyen.*

Bizonyítás. Használni fogjuk az 5.3. tétel jelöléseit és bizonyításának a következtetéseit.

Az 5.1. lemmának megfelelően a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} \tilde{\lambda}_j = \sum_{j=1}^{\infty} (K\omega_j, \omega_j) \leqq \sigma_S(K)$$

összefüggésben az egyenlőség abban és csakis abban az esetben érhető el, ha az $\{\omega_n\}$ sorozat lineáris zárt burka, vagyis ami ugyanaz, az A operátor összes $\mathfrak{C}_\nu$ gyökalterének a lineáris zárt burka, tartalmazza a K operátor pozitív sajátértékeihez tartozó összes sajátvektorait.

A mondottakból következik, hogy ha az A operátor gyökelemeinek $\{\varphi_j\}$ rendszere teljes $\mathfrak{H}$-ban, akkor

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} \tilde{\lambda}_j = \sigma_S(K).$$

Megfordítva, teljesüljön az (5.17) egyenlőtlenség. Akkor, mindenesetre, a $\{\varphi_j\}$ rendszer lineáris zárt burka tartalmazza a K operátor összes pozitív sajátértékű sajátvektorait. Ezért, ha $\mathfrak{N}$ az összes φ_j $(j=1, 2, \ldots)$-hez ortogonális maximális altér, akkor $K\mathfrak{N}=0$, azaz $K\varphi=0$, ha $\varphi\in\mathfrak{N}$.

Mivel a 3) feltétel miatt a H operátornak létezik valós reguláris pontja, ezért létezik egy egész valós intervallum, amely reguláris pontokból áll. Ennek az intervallumnak bármely zárt részében az A operátor spektrumának csak végesszámú pontja van. Ezért, az általánosság megszorítása nélkül, állíthatjuk, hogy $\lambda=0$

[7] Nemrég V. B. LIDSZKIJ közölte a szerzők egyikével a tétel bizonyítását, amely szerint az $A=A_R+iA_I$ teljesen folytonos operátor gyök-vektorainak rendszere teljes, amint annak A_R és A_I komponensei nemnegatívak, és legalább egyikük véges spektrálnyommal rendelkezik.

reguláris pontja az A és H operátoroknak. Valóban, ez mindig elérhető, ha helyettesítjük az A operátort az $A+cI$ operátorral, és megfelelően a H operátort a $H+cI$ operátorral, ahol c egy szükséges módon kiválasztott olyan valós szám, hogy a helyettesítéssel az (5.17) egyenlőség nem borul fel, és a gyök-vektorok ugyanazok maradnak.

Az A operátorral együtt az A^* operátor is folytonosan invertálható.

Feltételezve $\mathfrak{N}_1 = A^{*-1}\mathfrak{N}$-t, megmutatjuk, hogy $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}$.

Valóban, legyen $h \in \mathfrak{N}_1$. Akkor az összes $j=1, 2, \ldots$-re

$$(h, A\varphi_j) = (A^*h, \varphi_j) = 0,$$

és ezért $h \in \mathfrak{N}$.

Ilyen módon, ha $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_{A^*} \cap \mathfrak{N}$, akkor $\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{N}_1$. Másrészt, tetszőleges $h \in \mathfrak{D}_1$ esetén

$$(A^*h, \varphi_j) = (h, A\varphi_j) = 0,$$

azaz $A^*\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{N}$. Tehát $A^*\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{N}$.

Figyelembe véve, hogy $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{Z}_k$ és $A^* = H - iK$, azt kapjuk, hogy az A^* operátor $\mathfrak{N}$-ben egy *Hermite*-féle H_1 operátort indukál, amely egy olyan része a H operátornak, amelyet utóbbi $\mathfrak{D}_H$ értelmezési tartományának a $\mathfrak{D}_1$-ig való szűkítésével kapunk.

Mivel feltétel szerint a H operátor folytonosan invertálható $\mathfrak{N}$-ben, így a H_1 operátor is folytonosan invertálható az $\mathfrak{N}$-ben, azaz létezik olyan önadjungált korlátos H_1^{-1} inverz operátor, amely az egész $\mathfrak{N}$-en van definiálva, és azt leképezi saját $\mathfrak{D}_1$ sűrű részébe (H_1^{-1}-nek nincsenek zérusai).

Ilyen módon, az $\mathfrak{N}$ altér invariáns a H^{-1} korlátos önadjungált operátorra nézve, és ezért a H^{-1} operátor felcserélhető a $P_{\mathfrak{N}}$ operátorral, amely ortogonálisan projektálja az egész $\mathfrak{H}$ teret az $\mathfrak{N}$-re. Ennek alapján, ha e a H operátor saját vektora, azaz

$$He = \lambda e, \quad \text{azaz} \quad H^{-1}e = \lambda^{-1}e,$$

akkor

$$H^{-1}P_{\mathfrak{N}}e = \lambda P_{\mathfrak{N}}e.$$

Ilyen módon vagy $P_{\mathfrak{N}}e = 0$, vagy $P_{\mathfrak{N}}e$ sajátvektora a H operátornak.

A második eset nem lehetséges, mivel, azt megengedve, állítani lehet azt, hogy a $P_{\mathfrak{N}}e \in \mathfrak{N}$ az A operátor sajátvektora lesz, ugyanakkor pedig $\mathfrak{N}$ ortogonális az A operátor minden sajátvektorára.

Következésképp, mindig igaz $P_{\mathfrak{N}}e = 0$, azaz $\mathfrak{N}$ ortogonális a H operátor összes sajátvektorához, amelyek teljes rendszert alkotnak, ahonnan $\mathfrak{N}$ csak a nullából áll. A tételt bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. A tétel bizonyításának a menetéből következik, hogy ha a K operátornak nincs nullával egyenlő sajátértéke, akkor a tétel igaz az 1), 2) és 3) feltételek megkövetelése nélkül is.

Más dolog, hogy maga az (5.17) egyenlőség létezése, valószínűleg (l. M. V. KELDIS tételét és a 418. és 425. oldalon levő utalásokat), kapcsolatban van a H operátor valamilyen speciális spektrálstruktúrájával, amelyet érdekes volna tisztázni.

Az ebben a paragrafusban ismertetett tételeknek fontos alkalmazásuk van a differenciál- és integrálegyenletek elméletében, viszont hely hiányában ezeket itt nem ismertettük. Egy sor ilyen alkalmazást találhat az olvasó a [26], [27], [32], [35], [36] eredeti dolgozatokban.

6. §. További tételek két altér nyílásáról

1. A $\mathfrak{B}$ *Banach*-tér két végtelen dimenziós altere nyílásának további tulajdonságai vizsgálata előtt néhány fogalomra és állításra van szükségünk.

Az $\mathfrak{N}$ $(\subset \mathfrak{B})$ halmaz elemeinek $\mathfrak{M}$ részhalmazát az $\mathfrak{N}$ halmaz *α-rácsának* fogjuk nevezni, ha tetszőleges $x, y \in \mathfrak{M}$-ra teljesül

$$|x-y| \geqq \alpha.$$

Ha az $\mathfrak{N}$ halmaz $\mathfrak{M}$ α-rácsa nem szabályos része az $\mathfrak{N}$ halmaz semmilyen más α-rácsának, akkor azt *maximálisnak* nevezzük.

Ilyen módon, ha $\mathfrak{M}$ egy maximális α-rácsa az $\mathfrak{N}$ halmaznak, akkor minden $z \in \mathfrak{N}$-re

$$\varrho(z, \mathfrak{M}) = \inf_{x \in \mathfrak{M}} |z-x| < \alpha.$$

Transzfinit eljárással minden α-rács folytatható a maximálisig. Innen speciálisan következik maximális α-rács létezése bármely $\mathfrak{N}$ $(\subset \mathfrak{B})$ halmaz esetén.

6.1. LEMMA. *Legyen* $\mathfrak{B}$ *egy végtelen dimenziós Banach-tér. Akkor* $0<\alpha<1$ *mellett a* $\mathfrak{K}$ *egységhipergömb minden* $\mathfrak{M}$ *maximális α-rácsának a számossága megegyezik a* dim $\mathfrak{B}$*-vel.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{M}$ valamely maximális α-rácsa $(0<\alpha<1)$ a $\mathfrak{K}$: $|x| \leqq 1$ egységhipergömbnek. Tételezzük fel, hogy annak $\mathfrak{a}$ számossága kisebb a dim $\mathfrak{B}$-nél.

Akkor az $\mathfrak{C}$ elemeinek racionális együtthatós lineáris kombinációiból álló $\mathfrak{M}$ halmaz nem sűrű $\mathfrak{B}$-ben. Következésképp, RIESZ ismert lemmája szerint, bármely $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $x \in \mathfrak{B}$ $(|x|=1)$, hogy $\varrho(x; \mathfrak{C}) \geqq 1-\varepsilon$. Kiválasztva a pozitív $\varepsilon < 1-\alpha$-t, ellentmondáshoz jutunk azzal, hogy $\mathfrak{M}$ maximális α-rács. Ilyen módon $\mathfrak{a}$ nem kevesebb dim $\mathfrak{B}$-nél.

Másrészt, $\mathfrak{a}$ nem lehet nagyobb dim $\mathfrak{B}$-nél, mivel az α-rács elemeinek $\alpha/2$ sugarú környezetei nem metszik egymást, viszont mindegyikükben van legalább egy elem minden $\mathfrak{B}$-ben sűrű halmazból.

A lemmát bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. Könnyű meggyőződni arról, hogy a 6.1. lemma érvényben marad akkor, ha a $\mathfrak{K}$ hipergömböt az $\mathfrak{S}$: $|x|=1$ hiperszférával helyettesítjük.

A 6.1. lemma egyszerű *következményei* az alábbi állítások.

1°. *Legyen* $\mathfrak{B}_1$ *a* $\mathfrak{B}$ *Banach-tér valamely altere, akkor* dim $\mathfrak{B}_1 \leqq$ dim $\mathfrak{B}$.

Valóban, legyen $\mathfrak{M}_1$ valamely maximális α-rácsa $(0<\alpha<1)$ a $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{B}_1$ egység hipergömbnek, és legyen $\mathfrak{a}_1$ az $\mathfrak{M}_1$ számossága. Akkor dim $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{a}_1$. Jelöljük $\mathfrak{M}$-mel a $\mathfrak{B}$ olyan maximális α-rácsát, amely bővítése $\mathfrak{M}_1$-nek, és $\mathfrak{a}$-vel annak számosságát. Akkor, egyrészt, dim $\mathfrak{B} = \mathfrak{a}$, másrészt pedig, nyilván $\mathfrak{a}_1 \leqq \mathfrak{a}$.

A teljesség kedvéért ismertetjük még a következő állítást, amelyet a következőkben használni fogunk.

2°. *A* $\mathfrak{B}$ *Banach-tér dimenziója nem nagyobb a* $\mathfrak{B}^\dagger$ *konjugált tér dimenziójánál. Speciálisan, ha a* $\mathfrak{B}$ *tér reflexív, akkor*

$$\dim \mathfrak{B} = \dim \mathfrak{B}^\dagger.$$

Valóban, ha $\mathfrak{B}$ végesdimenziós, akkor a 2° állítás nyilvánvaló.

Legyen a $\dim \mathfrak{B}$ végtelen. Kiválasztunk $\mathfrak{B}$-ben olyan elemek transzfinit maximális $\{x_\alpha\}$ ($|x_\beta|=1$) sorozatát, hogy

$$\varrho(x_\beta, \mathfrak{C}_\beta) > 1/2,$$

ahol $\mathfrak{C}_\beta$ azon x_α-k lineáris burka, amelyekre $\alpha<\beta$. Az $\{x_\alpha\}$ sorozat elemei lineáris burkának a lezártja a $\mathfrak{B}$, a sorozat α indexei halmazának a számossága egyenlő $\dim \mathfrak{B}$.

Konstruáljuk most olyan funkcionálok $\{f_\alpha\}$ ($|f_\alpha|=1$) sorozatát, amelyekre $|f_\alpha(x_\alpha)|>1/2, f_\alpha(x)=0$, ha $x\in\mathfrak{C}_\alpha$.

Legyenek $f_{\alpha'}$ és $f_{\alpha''}$ ($\alpha'<\alpha''$) a megkonstruált sorozat funkcionáljai. Akkor

$$|f_{\alpha'}-f_{\alpha''}| \geqq \frac{|(f_{\alpha'}-f_{\alpha''})x_{\alpha'}|}{|x_{\alpha'}|} = |f_{\alpha'}(x_{\alpha'})| > \frac{1}{2}.$$

Következésképp, a konstruált $\{f_\alpha\}$ funkcionál transzfinit sorozat része a $\mathfrak{B}^\dagger$ tér egységhipergömbje valamely maximális α-rácsának ($\alpha=1/2$ mellett). Tehát $\dim \mathfrak{B} \leqq \dim \mathfrak{B}^\dagger$.

2. Áttérünk most a végtelen dimenziós terek nyílásairól szóló fő tételek bizonyítására.

6.1. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ a $\mathfrak{B}$ Banach-tér két lineáris halmaza és legyen*

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) < 1/2.$$

Akkor

$$\dim \mathfrak{C}_1 = \dim \mathfrak{C}_2.$$

Bizonyítás. Az 1.1. tétel szerint csak azt az esetet kell megvizsgálnunk, amikor $\dim \mathfrak{C}_1$ és $\dim \mathfrak{C}_2$ végtelenek. Legyen

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = \frac{1}{2}-b \quad \left(0<b<\frac{1}{2}\right).$$

A $\mathfrak{C}_1$ lineáris halmaz $\mathfrak{K}_1$ egységhipergömbben konstruálunk egy $\mathfrak{M}$ maximális α-rácsot, feltéve $\alpha=1-\frac{b}{2}$-t. Feltétel szerint, minden $x\in\mathfrak{M}$ ($\subset\mathfrak{C}_1$) elemhez található olyan $y_x\in\mathfrak{C}_2$ elem, hogy

$$|y_x-x| < \frac{1}{2}-\frac{b}{2}.$$

Ha $x_1, x_2\in\mathfrak{M}$, akkor $|x_1-x_2|>1-\frac{b}{2}$ és

$$|y_{x_1}-y_{x_2}| \geqq |x_1-x_2|-|x_1-y_{x_1}|-|x_2-y_{x_2}| > \frac{b}{2}.$$

A kapott egyenlőtlenségből következik, hogy a $\mathfrak{K}_1$ hipergömb $\mathfrak{M}$ maximális $\left(1-\frac{b}{2}\right)$-rácsa x elemeihez tartozó y_x elemek benne vannak a $\mathfrak{C}_2$ lineáris halmaz $\frac{3}{2}$ sugarú hipergömbjének $\left(|y_x|\leqq|y_x-x|+|x|<\frac{3}{2}\right)$ valamely $\frac{b}{2}$-rácsában. Következésképp, a 6.1. lemma alapján $\dim \mathfrak{C}_1 < \dim \mathfrak{C}_2$.

Felcserélve a $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ szerepét, a tétel állításához jutunk.

3. Legyen $\mathfrak{C}$ egy lineáris halmaz $\mathfrak{B}$-ben. Azt a $\mathfrak{C}^{\perp}\subset\mathfrak{B}^{\dagger}$ alteret, amely az összes olyan funkcionálokból áll, amelyek a $\mathfrak{C}$ összes elemein nullával egyenlők, a $\mathfrak{C}$ *ortogonális komplementerének* nevezzük $\mathfrak{B}^{\dagger}$-ban.

6.2. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ két lineáris részhalmaz $\mathfrak{B}$-ben, $\mathfrak{C}_1^{\perp}$ és $\mathfrak{C}_2^{\perp}$ pedig azok ortogonális komplementerei a $\mathfrak{B}^{\dagger}$-ban. Akkor*

$$\theta(\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2)=\theta(\mathfrak{C}_1^{\perp},\mathfrak{C}_2^{\perp}).$$

Bizonyítás. HAHN ismert lemmája szerint tetszőleges $f\in\mathfrak{B}$ esetén

$$\varrho(y,\mathfrak{C})=\max_{f\in\mathfrak{C}^{\perp},|f|=1}|f(y)|.$$

Következésképp, a $\theta(\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2)$ kifejezhető így:

$$\theta(\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2)=\sup\{|g(x)|,|f(y)|\},$$

ahol a supremmumot az egész

$$x\in\mathfrak{C}_1,\quad y\in\mathfrak{C}_2,\quad g\in\mathfrak{C}_2^{\perp},\quad f\in\mathfrak{C}_1^{\perp};\quad |x|=|y|=|g|=|f|=1 \tag{6.1}$$

szerint vettük.

Emlékeztetünk arra, hogy ha valamely $\mathfrak{C}^*\subset\mathfrak{B}^{\dagger}$ altér regulárisan zárt (azaz tetszőleges $f_0\notin\mathfrak{C}^{\dagger}$ funkcionálhoz található olyan $x_0\in\mathfrak{B}$ elem, hogy $f_0(x_0)\neq 0$, de $f(x_0)=0$ az összes $f\in\mathfrak{C}^*$ esetén), akkor BANACH ismert tétele szerint (l. [28], 106 old.) bármely $f_0\notin\mathfrak{C}^*$ és $\varepsilon>0$-hoz található olyan $x_0\in\mathfrak{B}$ ($|x_0|=1$) elem, hogy $|f_0(x_0)|\geqq\varrho(f_0,\mathfrak{C}^{\perp})-\varepsilon, f(x_0)=0$ az összes $f\in\mathfrak{C}^*$-ra.

Eközben nyilván mindig $|f_0(x_0)|\leqq\varrho(f_0,\mathfrak{C}^*)$.

Mivel a $\mathfrak{C}$ lineáris halmaz $\mathfrak{C}^{\perp}$ ortogonális komplementere nyilvánvalóan regulárisan zárt, így a tétel szerint

$$\varrho(f,\mathfrak{C}^{\perp})=\sup_{x\in\mathfrak{C},|x|=1}|f(x)|.$$

Tehát úgyszintén

$$\theta(\mathfrak{C}_1^{\perp},\mathfrak{C}_2^{\perp})=\sup\{|g(x)|,|f(y)|\},$$

ahol a supremmumot az összes (6.1)-nek eleget tevő x, y, g, f szerint vettük. A tételt bebizonyítottuk.

A 6.1. és 6.2. tételekből közvetlenül következik a

6.3. TÉTEL. *Legyenek $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ a $\mathfrak{B}$ Banach-tér lineáris részhalmazai, $\mathfrak{C}_1^{\perp}$ és $\mathfrak{C}_2^{\perp}$ azok ortogonális komplementerei $\mathfrak{B}^{\dagger}$-ben.*

Akkor, ha

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) < 1/2, \tag{6.2}$$

akkor

$$\dim \mathfrak{C}_1^{\perp} = \dim \mathfrak{C}_2^{\perp}.$$

Legyen $\mathfrak{C}$ a $\mathfrak{B}$ *Banach*-tér altere. Mint ismeretes, a $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ faktor-térrel konjugált tér ekvivalens a $\mathfrak{C}^{\perp} \subset \mathfrak{B}^{\dagger}$ altérrel.

4. Ha a $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ tér reflexiv (ami, például, teljesül akkor, ha a $\mathfrak{B}$ reflexív, l. [37]), akkor

$$\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}) = \dim \mathfrak{C}^{\perp}.$$

Ezért a 6.3. tétel miatt ebben az esetben a (6.2)-ből következik a

$$\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1) = \dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2)$$

egyenlőség.

Kiderül, hogy ez a tény érvényben marad a nem reflexív terekre is.

6.4. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ a $\mathfrak{B}$ Banach-tér két altere, és legyen*

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) < 1/2.$$

Akkor

$$\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1) = \dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2). \tag{6.3}$$

Ha $\mathfrak{B}$ Hilbert-tér vagy a $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2$ terek egyike véges dimenziós, akkor a (6.3) *teljesül, amint*

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) < 1. \tag{6.4}$$

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{B}$ *Hilbert*-tér, akkor a második állítás nyilvánvaló módon következik az 1.2. tételből.

Ha a két $\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1)$ és $\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2)$ szám közül az egyik, például az első, véges, akkor $\dim \mathfrak{C}_1^{\perp} = \dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1) < \infty$, akkor viszont a (6.4)-ből a 6.2. és 1.1. tételek alapján következni fog

$$\dim \mathfrak{C}_2^{\perp} = \dim \mathfrak{C}_1^{\perp}, \quad \dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2) = \dim \mathfrak{C}_2^{\perp} = \dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1).$$

Be kell még bizonyítanunk a tétel első állítását arra az esetre, amikor $\mathfrak{B}$ *Banach*-tér és mindkét $\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1)$ és $\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2)$ kardinális szám végtelen. Ehhez azonban elegendő megmutatni, hogy ha

$$\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1) > \dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2), \tag{6.5}$$

akkor $\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) \geqq 1/2$.

Kiválasztva egy tetszőleges $\beta < 1$ pozitív számot, a $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1$ faktor-tér $\mathfrak{S}_1$ egységszférájában konstruálunk egy $\mathfrak{M}_1$ maximális $(1-\beta)$-rácsot. Ennek a rácsnak a számossága egyenlő lesz $\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1)$-val (l. a megjegyzést a 6.1. lemmához). Az $\mathfrak{M}_1$ definíciója szerint

$$|\hat{x} - \hat{y}| \geqq 1 - \beta, \quad |\hat{x}| = |\hat{y}| = 1, \quad (\hat{x}, \hat{y} \in \mathfrak{M}_1, \hat{x} \neq \hat{y}).$$

Rögzítve egy tetszőleges $\gamma>0$-t, kiválasztunk minden $\hat{x}\in\mathfrak{M}_1$ mellékosztályban egy $x\in\mathfrak{B}$ elemet, hogy $|x|<|\hat{x}|+\gamma=1+\gamma$. Az így kapott $x\in\mathfrak{B}$ elemek összességét $\mathfrak{M}_1$-vel jelöljük. Mivel mindig teljesül $|\hat{x}-\hat{y}|\leqq|x-y|$ $(x\in\hat{x}, y\in\hat{y})$, így $\mathfrak{M}_1'$ egy $(1-\beta)$-rács lesz $\mathfrak{B}$-ben. A $\mathfrak{B}$ térnek a $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2$ faktor-térbe való $x\to\tilde{x}$ természetes leképezése hatására $\mathfrak{M}_1$ átmegy egy $\mathfrak{M}_2$ halmazba, amely benne van a $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2$ tér $\mathfrak{K}$: $\|\tilde{x}\|<1+\gamma$ hipergömbjében. Mivel állítás szerint fennáll a (6.5), így a 6.1. lemma alapján állíthatjuk, hogy semmilyen $\alpha(0<\alpha<1+\gamma)$-ra az $\mathfrak{M}_2$ halmaz nem lesz α-rácsa az $\mathfrak{K}$ hipergömbnek. Utóbbi azt jelenti, hogy léteznek olyan $x, y\in\mathfrak{M}_1'$ $(x\neq y)$ elemek és olyan $z\in\mathfrak{C}_2$ elem, hogy $|x-y-z|<\alpha$. Akkor

$$1-\beta-\alpha < |x-y|-\alpha < |z| < \alpha+|x-y| < \alpha+2+2\gamma,$$

és így

$$\frac{\varrho(x-y, \mathfrak{C}_1)-|x-y-z|}{|z|} = \frac{|\hat{x}-\hat{y}|-|x-y-z|}{|z|} > \frac{1-\beta-\alpha}{2+2\gamma+\alpha}. \tag{6.6}$$

Másrészt, mivel tetszőleges $u\in\mathfrak{C}_1$-re $|u-z|\geqq|u-(x-y)|-|x-y-z|$, ezért

$$\varrho\left(\frac{z}{|z|}, \mathfrak{C}_1\right) = \frac{1}{|z|}\varrho(z, \mathfrak{C}_1) \geqq \frac{\varrho(x-y,\mathfrak{C}_1)-|x-y-z|}{|z|}. \tag{6.7}$$

Mivel az α, β, γ pozitív számok tetszőlegesen kicsinek választhatók, a (6.6) és (6.7)-ből következik, hogy $\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)\geqq 1/2$. A tételt bebizonyítottuk.

7. §. Tételek a szemiinfinit d-karakterisztikájú operátorok indexének stabilitásáról

1. Az általunk az előbbi paragrafusokban elfogadott terminológiát tovább fejlesztve, a $\mathfrak{B}_1$-ből a $\mathfrak{B}_2$-be ható valamely A lineáris zárt operátort Φ_+*-operátornak* fogjuk nevezni, ha az A operátor normálisan feloldható, α_A véges és β_A végtelen. A lineáris zárt normálisan feloldható A operátort Φ_-*-operátornak* nevezzük, ha β_A véges és α_A végtelen. A továbbiakban szükségünk lesz a következő két lemmára.

7.1. LEMMA. *Legyen $\tilde{A}$ az $A\Phi_+$-operátor k-dimenziós bővítése. Akkor $\tilde{A}$ szintén Φ_+-operátor, mégpedig*

$$\alpha_{\tilde{A}} \leqq \alpha_A+k, \quad \beta_{\tilde{A}} = \alpha_A.$$

7.2. LEMMA. *Legyen $\tilde{A}$ Φ_--operátor egy A operátornak k-dimenziós bővítése. Akkor az $\tilde{A}$ operátor szintén Φ_--operátor, mégpedig*

$$\beta_A \geqq \beta_{\tilde{A}}-k, \quad \alpha_{\tilde{A}} = \alpha_A.$$

Ezeknek a lemmáknak a bizonyítása lényegében ugyanazokon az ötleteken alapszik, mint a 2.2. lemma bizonyítása, ezért azt elhagyjuk.

7.1. TÉTEL. *Legyen A egy Φ_+-operátor $(\mathfrak{D}_A\subset\mathfrak{B}_1, \mathfrak{R}_A\subset\mathfrak{B}_2)$. Akkor található olyan $\varrho>0$ szám, hogy bármilyen legyen is a B lineáris korlátos operátor $(B\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}_2)$, amelyre $|\mathfrak{B}|<\varrho$, az $A+B$ operátor szintén Φ_+-operátor lesz, mégpedig*

$$\alpha_{A+B} \leqq \alpha_A, \quad \beta_{A+B} = \alpha_A.$$

Bizonyítás. A $\mathfrak{B}_1$ tér előállítható alterek $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{Z}_A \dotplus \mathfrak{C}$ direktösszegeként, ahol $\mathfrak{C}$ valamely komplementer altér az A operátor nulláinak $\mathfrak{Z}_A$ halmazához.

Jelöljük A_1-el a $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{C}$ értelmezési tartományú olyan operátort, amely ebben a tartományban ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint az A operátor. Nyilvánvaló, hogy az A_1 operátor normálisan feloldható, és d-karakterisztikája $(0, \beta_A)$ alakú. Az A_1 operátor normális feloldhatóságából és az α_{A_1}-nek nullával való egyenlőségéből következik olyan $m > 0$ létezése, hogy

$$|A_1 x| \geqq m|x| \quad (x \in \mathfrak{D}_1).$$

Legyen B egy tetszőleges lineáris korlátos operátor, amely $\mathfrak{B}_1$-et a $\mathfrak{B}_2$-be viszi át, és amelyre

$$|B| < \varrho,$$

ahol $\varrho = \frac{m}{3}$. Akkor

$$|(A_1 + B)x| \geqq (m - |B|)|x| \geqq \frac{2}{3} m|x| \quad (x \in \mathfrak{D}_1).$$

Az utóbbi egyenlőtlenségből következik, hogy az $A+B$ operátor normálisan feloldható, és $\alpha_{A_1+B} = 0$. Azonkívül, nyilvánvalóan, tetszőleges $x \in \mathfrak{D}_1$-re

$$|(A_1 + B)x - A_1 x| \leqq \frac{1}{3} |A_1 x|$$

és

$$|A_1 x - (A_1 + B)x| \leqq \frac{3|B|}{2m} |(A_1 + B)x| \quad \left(\frac{3}{2m} |B| < \frac{1}{2}\right).$$

Ezek az egyenlőtlenségek maguk után vonják az $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_{A_1+B}$ és $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_{A_1}$ terek nyílásának

$$\theta(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2) < 1/2$$

értékelését.

Alkalmazva az $\mathfrak{R}_1$ és $\mathfrak{R}_2$ alterekre a 6.3. tételt, azt kapjuk, hogy

$$\dim \mathfrak{R}_1^\perp = \dim \mathfrak{R}_2^\perp,$$

és ezért

$$\beta_{A_1+B} = \beta_{A_1} = \beta_A.$$

Megjegyezve most, hogy az $A+B$ operátor az A_1+B operátornak α_A-dimenziós bővítése, a 7.1. tételnek megfelelően azt kapjuk, hogy az $A+B$ operátor Φ_+-operátor, mégpedig

$$\alpha_{A+B} \leqq \alpha_A, \quad \beta_{A+B} = \beta_A.$$

A tételt bebizonyítottuk.

7.2. TÉTEL. *Legyen A egy tetszőleges Φ_--operátor. Akkor létezik olyan $\varrho > 0$ szám, hogy bármilyen is a $|B| < \varrho$-nak eleget tevő lineáris korlátos B operátor $(B\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2)$, az $A+B$ operátor Φ_--operátor lesz, mégpedig*

$$\alpha_{A+B} = \alpha_A, \quad \beta_{A+B} \leqq \beta_A.$$

Bizonyítás. A tételt előbb arra az esetre bizonyítjuk, amikor az A operátor korlátos $\mathfrak{D}_A=\mathfrak{B}_1$ és $\beta_A=0$.

Akkor HAUSDORFF tétele szerint (l. [38] vagy [28]) az A operátorral együtt úgyszintén normálisan feloldható a konjugált $A^\dagger$ operátor is.

Ezenkívül igaz $\alpha_{A^\dagger}=\beta_A=0$, ugyanakkor a $\beta_{A^\dagger}$ végtelen.

Alkalmazva most az $A^\dagger$ operátorra az előbbi 7.1. tételt, a bizonyítása közben a $\theta(\mathfrak{R}_{A+B}, \mathfrak{R}_A)$ nyílásra kapott értékeléssel együtt, megállapítjuk, hogy van olyan $\varrho>0$ szám, a ϱ-nál kisebb normájú összes lineáris korlátos B operátorra ($|B|=|B^\dagger|<\beta$), az $A^\dagger+B^\dagger$ operátor normálisan feloldható, arra

$$\alpha_{A^\dagger+B^\dagger}=0$$

és ezenkívül,

$$\theta(\mathfrak{R}_{A^\dagger+B^\dagger}, \mathfrak{R}_{A^\dagger})<1/2. \tag{7.1}$$

Az $\mathfrak{R}_{A^\dagger+B^\dagger}$ és $\mathfrak{R}_{A^\dagger}$ alterek ortogonális komplementerei megfelelően a $\mathfrak{Z}_{A+B}$ és $\mathfrak{Z}_A$-nak, ugyanis, amint F. HAUSDORFF [38] megmutatta, a korlátos normálisan feloldható C operátor $C^\dagger$ konjugáltjának az értelmezési tartománya ortogonális komplementere az előbbi nullái $\mathfrak{Z}_C$ halmazának. A 6.2. tételnek megfelelően innen a (7.1) egyenlőtlenség magával vonja a

$$\theta(\mathfrak{Z}_{A+B}, \mathfrak{Z}_A)<1/2$$

egyenlőtlenséget, és így

$$\dim \mathfrak{Z}_{A+B}=\dim \mathfrak{Z}_A \quad \text{vagy} \quad \alpha_{A+B}=\alpha_A.$$

Áttérünk most a tétel bizonyítására a $\beta_A\neq 0$ esetében.

Legyen $\mathfrak{N}$ az $\mathfrak{R}_A$ direkt komplementere a $\mathfrak{B}_2$-ben és $\mathfrak{M}$ egy normált β_A-dimenziós altér. Jelöljük C-vel az $\mathfrak{M}$ teret $\mathfrak{N}$-re leképező lineáris operátort (speciálisan ebben a konstrukcióban feltételezhető, hogy $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$, $C=I$).

Legyen $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ a $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{M}$ terek direktösszege, amelyben a normát az alábbi egyenlőséggel definiáljuk:

$$|x+y|=|x|+|y| \quad (x\in\mathfrak{B}_1,\ y\in\mathfrak{M}). \tag{7.2}$$

Bővítjük az operátort β_A dimenzió számmal az $\tilde{A}$ operátorig, feltéve

$$\tilde{A}(x+y)=Ax+Cy \quad (x\in\mathfrak{D}_A,\ y\in\mathfrak{M}).$$

Nyilvánvaló, hogy az $\tilde{A}$ operátor normálisan feloldható

$$\beta_{\tilde{A}}=0, \quad \alpha_{\tilde{A}}=\alpha_A.$$

Következésképp, az operátorra alkalmazható a tétel bebizonyított része. Ennek megfelelően létezik olyan $\varrho>0$ szám, hogy a ϱ-nál kisebb normájú összes $B(B\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}_2)$ lineáris korlátos operátorra az $\tilde{A}+\tilde{B}$ operátor, ahol $\tilde{B}$ a B operátornak β_A-dimenziós bővítése és a $\tilde{B}\mathfrak{M}=0$ [8] egyenlőséggel van definiálva, normálisan feloldható, és

$$\beta_{\tilde{A}+\tilde{B}}=0, \quad \alpha_{\tilde{A}+\tilde{B}}=\alpha_{\tilde{A}}.$$

Figyelembe véve, hogy az $\tilde{A}+\tilde{B}$ operátor az $A+B$ operátornak β_A-dimenziós bővítése, a 7.2. lemma alapján megállapíthatjuk, hogy az $A+B$ operátor normálisan feloldható, és

$$\alpha_{A+B}=\alpha_A, \quad \beta_{A+B}\leqq\beta_A.$$

Tekintsük végül az utolsó esetet, amikor az A tetszőleges Φ_--operátor. Bevezetünk normát $\mathfrak{D}_A$-ban (l. a 2. § 5. pontját):

$$\|x\| = |x|+|Ax|,$$

amely $\mathfrak{D}_A$-t egy $\mathfrak{D}$ *Banach*-térré teszi. Akkor az A operátor $\mathfrak{D}$-ban egy korlátos $\mathbf{A}$ operátort indukál, ugyanolyan értelmezési tartománnyal, mint az A. Ezért az $\mathbf{A}$ operátor normálisan feloldható és $\beta_{\mathbf{A}}=\beta_A$. Azonkívül $\alpha_{\mathbf{A}}=\alpha_A$, mivel a $\mathfrak{Z}_{\mathbf{A}}$ és $\mathfrak{Z}_A$ alterek egybeesnek, és tetszőleges $x\in\mathfrak{Z}_A$-ra

$$\|x\| = |x|.$$

Az $\mathbf{A}$ operátorra alkalmazható a 7.2. tétel már bebizonyított esete.

Ezért az összes $\mathbf{B}(\mathbf{B}\mathfrak{D}_A\subset\mathfrak{B}_2)$ olyan operátorokra, amelyek normája kisebb egy bizonyos $\varrho>0$ számnál:

$$\|\mathbf{B}\| < \varrho, \tag{7.3}$$

az $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ operátor normálisan feloldható, és

$$\alpha_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\alpha_{\mathbf{A}}, \quad \beta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}\leqq\beta_{\mathbf{A}}. \tag{7.4}$$

Speciálisan, a (7.3) egyenlőség teljesül az összes $|B|<\varrho$ feltételnek eleget tevő lineáris korlátos $B(B\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}_2)$ operátorra, ugyanis $\|\mathbf{B}\|<|B|$, és így az $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ operátor normálisan feloldható, és arra igazak a (7.4) állítások. Innen pedig következik, hogy az $A+B$ operátor normálisan feloldható, és

$$\beta_{A+B}=\beta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}\leqq\beta_{\mathbf{A}}=\beta_A.$$

Már megjegyeztük, hogy $\alpha_{\mathbf{A}}=\alpha_A$, ezért már csak azt kell bebizonyítani, hogy $\alpha_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\alpha_{A+B}$, azaz hogy a $\mathfrak{Z}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\mathfrak{Z}_{A+B}$ altérnek mindkét normában azonos a dimenziója. Utóbbi abból adódik, hogy a $\mathfrak{Z}_{A+B}$-ben mindkét norma topológiailag ekvivalens, amint ez látható a

$$Ax=-Bx, \quad \text{ha} \quad x\in\mathfrak{Z}_{A+B}$$

és

$$|x|<\|x\|=|x|+|Bx|<(1+|B|)|x| \quad (x\in\mathfrak{Z}_{A+B})$$

összefüggésekből.

A tételt bebizonyítottuk.

2. Ebben a pontban meg fogjuk vizsgálni a $\Phi_\pm$-operátornak teljesen folytonosakkal való perturbációját. Ebből a célból előbb egy lemmát bizonyítunk be.

7.3. Lemma. *Legyen T a $\mathfrak{B}_1$-et $\mathfrak{B}_2$-be leképező valamely teljesen folytonos operátor, A pedig egy véges α_A-val rendelkező lineáris zárt normálisan feloldható operátor. Akkor az $A+T$ operátor normálisan feloldható és α_{A+T} véges.*

[8] Megjegyezzük, hogy a norma (7.2) definíciója szerint a $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ térben teljesül a $|B|=|\tilde{B}|$ egyenlőség.

Bizonyítás. Véges β_A esetén a lemma benne van a bebizonyított 2.3. tételben. Ezért csak azt az esetet kell megvizsgálnunk, amikor $\beta_A=\infty$. A következő okoskodásokban csak azt fogjuk felhasználni, hogy $\alpha_A \leqq \beta_A$.

Tételezzük fel először, hogy $\alpha_A=0$. Ebben az esetben létezik az $\mathfrak{R}_A$-ban értelmezett olyan korlátos A^{-1} operátor, hogy

$$A^{-1}Ax = x \quad (x \in \mathfrak{D}_A).$$

Az $(I+TA^{-1})y=0\ (y \in \mathfrak{R}_A)$ egyenletnek végesszámú lineárisan független megoldása van, ugyanis az $\mathfrak{R}_A$ altéren a TA^{-1} operátor teljesen folytonos. Következésképp, az $(A+T)x=0$ egyenletnek végesszámú lineárisan független megoldása van. A $\mathfrak{B}_1$ altér előállítható alterek $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{Z}_{A+T}\dotplus\mathfrak{C}$ direktösszegeként. Legyen $\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{C}$. Hogy meggyőződjünk az $A+T$ operátor normális feloldhatóságáról, meg kell mutatni, hogy valamely $m>0$ esetén az összes $x \in \mathfrak{D}_1$-re teljesül az

$$|(A+T)x| \geqq m|x|$$

egyenlőtlenség.

Tételezzük fel az ellenkezőt, azaz hogy létezik olyan $\{x_n\}\ (|x_n|=1;\ n=1, 2, \ldots)$ sorozat, hogy

$$(A+T)x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhető, hogy a $\{Tx_n\}$ sorozat konvergens. Akkor létezni fog határérték is:

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n = -\lim_{n\to\infty} Tx_n.$$

Alkalmazva az $\{Ax_n\}$ sorozat elemeire az A^{-1} korlátos operátort, azt kapjuk, hogy az $\{x_n\}$ sorozat is konvergál valamely $x_0 \in \mathfrak{B}_1$ elemhez.

Nyilvánvaló, hogy az x_0 vektor rendelkezik a következő tulajdonságokkal: $x_0 \in \mathfrak{D}_1$, $|x_0|=1$, és

$$(A+T)x_0 = 0.$$

Ilyen módon, $\mathfrak{D}_1$-ben létezik $x_0(\neq 0)$ elem, amelyen az $A+T$ operátor nulla értéket vesz fel, viszont ez ellentmond a $\mathfrak{D}_1$ halmaz konstrukciójának.

Legyen most $\alpha_A>0$. Felbontjuk $\mathfrak{B}_1$-et alterek direktösszegére: $\mathfrak{B}=\mathfrak{Z}_A\dotplus\mathfrak{C}_1$. Jelöljünk C-vel egy olyan végesdimenziós lineáris operátort, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal: 1) $Cx=0$, ha $x \in \mathfrak{C}_1$ és 2) a C operátor leképezi a $\mathfrak{Z}_A$ alteret egy olyan α_A-dimenziós altérre, amely az A operátor értékkészletével csak a nullában metszi egymást (itt felhasználtuk, hogy $\beta_A \geqq \alpha_A$).

A_1-el jelöljük az $A+C$ lineáris zárt normálisan feloldható operátort. Nyilvánvaló, hogy $\alpha_{A_1}=0$. Legyen T_1 a $T-C$-vel egyenlő teljesen folytonos operátor. Akkor az $A+T$ operátor egyenlő A_1+T_1, utóbbira pedig a lemma be van bizonyítva.

7.3. TÉTEL. *Ha A egy Φ_+-operátor, T pedig tetszőleges lineáris teljesen folytonos operátor ($T\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$), akkor $A+T$ szintén Φ_+-operátor, mégpedig*

$$\beta_{A+T} = \beta_A.$$

Bizonyítás. Tekintsük az $A+\varepsilon T\,(0\leqq\varepsilon\leqq 1)$ operátort.

A 7.3. lemma szerint az összes tekintett ε-okra az $A+\varepsilon T$ operátor normálisan feloldható, és az $\alpha(\varepsilon)=\alpha_{A+\varepsilon T}$ véges. A 7.1. tételből következik, hogy minden $\varepsilon_0(0\leqq\leqq\varepsilon_0\leqq 1)$-hoz létezik olyan $\varrho_0>0$ szám, hogy az $|\varepsilon-\varepsilon_0|<\varrho_0$ egyenlőtlenségnek elegettevő összes ε-ra a $\beta(\varepsilon)=\beta_{A+\varepsilon T}$ függvény ugyanazt az értéket veszi fel. Ilyen U_ε környezetet konstruálva a $[0, 1]$ szakasz minden pontjára, annak egy lefedését kapjuk. Kiválasztunk abból egy véges $U_1, \dots, U_N$ lefedést. Megjegyezve, hogy ezen lefedés szomszédos elemei metszik egymást, megállapítjuk, hogy az U_j $(j=1, \dots, N)$ környezetek összes pontjaiban a $\beta(\varepsilon)$ függvény ugyanazt az értéket veszi fel. Következésképp, a $\beta(\varepsilon)$ függvény konstans a $[0, 1]$ intervallumon, ahonnan

$$\beta_A=\beta(0)=\beta(1)=\beta_{A+T}.$$

A tételt bebizonyítottuk.

Ugyanúgy, ahogy a 7.1. tétel duálisát, a 7.2. tételt kaptuk, meg lehet fogalmazni a 7.3. tétel duálisát.

7.4. TÉTEL. *Ha A egy Φ_--operátor, T pedig $(T\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}_2)$ tetszőleges lineáris teljesen folytonos operátor, akkor az $A+T$ szintén Φ_--operátor, mégpedig*

$$\alpha_{A+T}=\alpha_A.$$

Ugyanúgy, mint ahogy ezt tettük a 2.3. és 2.4. tételek vonatkozásában, általánosíthatjuk az éppen bizonyított 7.1.—7.4. tételeket is arra az esetre, amikor a B operátor norma szerinti kis voltának a feltételét és a T operátor teljes folytonosságának a feltételét helyettesítjük megfelelően az A-norma szerinti kicsiség és a B operátor A-teljesen folytonosságának a feltételeivel.

Meg kell jegyeznünk, hogy ha A normálisan feloldható operátor és mindkét α_A és β_A szám végtelen, akkor olyan operátornak a hozzáadásával, amely tetszőlegesen kicsi a norma szerint, vagy teljesen folytonos, mindig fel lehet borítani annak normális feloldhatóságát, sőt d-karakterisztikájának a végtelenségét is (l. [39]). Következésképp, az α_A és β_A számok egyikének a végessége lényeges feltétel.

8. §. Tételek a lineáris zárt operátor $\Phi_\pm$-pontjairól

1. Egy λ pontot a $\mathfrak{B}$ *Banach*-térben értelmezett A lineáris zárt operátor *Φ_+-pontjának* nevezünk, ha az $A-\lambda I$ operátor Φ_+-operátor, azaz az $A-\lambda I$ operátor normálisan feloldható, $\alpha_A(\lambda)$ véges és $\beta_A(\lambda)$ végtelen.

Analóg módon a λ pontot a lineáris zárt A operátor *Φ_--pontjának* nevezzük, ha az $A-\lambda I$ operátor Φ_--operátor, azaz az $A-\lambda I$ operátor normálisan feloldható, $\beta_A(\lambda)$ véges és $\alpha_A(\lambda)$ végtelen.

Az operátor összes λ Φ_+-pontjainak a halmazát az A operátor *Φ_+-halmazának* nevezzük, és Φ_{+A}-val jelöljük, az A operátor összes Φ_--pontjainak a halmazát pedig *Φ_--halmaz*-nak nevezzük, és Φ_{-A}-val jelöljük.

Legyen λ_0 egy Φ_+-pontja az A operátornak. Mivel $A-\lambda I=(A-\lambda_0 I)+(\lambda-\lambda_0)I$, így a 7.1. tételnek megfelelően található olyan $\varepsilon>0$ szám, hogy az $|\lambda-\lambda_0|<<\varepsilon$ körből való összes λ pont az A operátor Φ_+-pontja, és azokra $\beta_A(\lambda)=\beta_A(\lambda_0)$.

Analóg helyzet áll fenn, ha $\lambda_0\in\Phi_{-A}$.

Az említett megjegyzésekből következik a következő tétel érvényessége.

8.1. TÉTEL. *A lineáris zárt A operátor $\Phi_\pm$-halmazai nyílt halmazok, és így véges vagy megszámlálható sok összefüggő komponens összegei. A Φ_{+A} (megfelelően Φ_{-A}) halmaz egy és ugyanazon összefüggő komponensének összes λ pontjára a $\beta_A(\lambda)$ (megfelelően az $\alpha_A(\lambda)$) függvény konstans értéket vesz fel.*

2. Megvizsgáljuk most, hogyan viselkedik az $\alpha_A(\lambda)=\alpha_{A-\lambda I}$ függvény a Φ_{+A} halmaz komponenseiben és a $\beta_A(\lambda)=\beta_{A-\lambda I}$ függvény a Φ_{-A} halmaz komponenseiben. Ennek érdekében bebizonyítjuk a következő lemmát.

8.1. LEMMA. *Legyen A egy Φ_+-(vagy Φ_--) operátor. Akkor létezik olyan $\varrho>0$ szám, hogy a $0<|\lambda|<\varrho$ egyenlőtlenségnek eleget tevő összes λ komplex számra az*

$$(A-\lambda I)x=0$$

egyenlet lineárisan független megoldásainak a száma ugyanaz.

Abban az esetben, ha A egy Φ-operátor, ez a lemma következik az általánosabb 3.1. lemmából. Utóbbinak a bizonyításánál lényeges módon támaszkodtunk a β_A véges voltára. A lent következő bizonyítás alkalmas úgy a véges, mint a végtelen β_A esetére.

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{M}$ azon $y\in\mathfrak{B}$ elemek halmaza, amelyekre az $A^n x=y$ egyenletnek van megoldása az összes n természetes szám esetén, úgy hogy

$$\mathfrak{M}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{R}_{A^n}.$$

Mivel az összes $\mathfrak{R}_{A^n}$ $(n=1,2,\ldots)$ zárt altér, így $\mathfrak{M}$ is zárt.

Nyilvánvaló, hogy az A operátor bármely x saját vektora $(Ax=\lambda x, \lambda\neq 0)$ benne van minden $\mathfrak{R}_{A^n}$ altérben, tehát $\mathfrak{M}$-ben is.

Ezért, ha $\mathfrak{M}$ csak az egy nullából áll, akkor tetszőleges $\lambda\neq 0$-ra $\alpha_A(\lambda)=0$, és erre az esetre a lemmát bebizonyítottuk.

Tartalmazzon most az $\mathfrak{M}$ altér nullától különböző elemeket. Feltéve $\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{M}$-t, megmutatjuk, hogy $A\mathfrak{D}_1=\mathfrak{M}$.

Ebből a célból meg kell mutatni, hogy tetszőleges $y\in\mathfrak{M}$ esetén az

$$Ax=y \tag{8.1}$$

egyenletnek van legalább egy $x\in\mathfrak{D}_1$ megoldása.

Tételezzük fel az ellenkezőt, azaz hogy valamely $y\in\mathfrak{M}$ $(y\neq 0)$-ra a (8.1) egyenlet összes megoldásai egy véges dimenziós $\mathfrak{C}_y=g+\mathfrak{Z}_A(Ag=y)$ sokaságot alkotnak, amely nem metszi $\mathfrak{M}$-et.

Akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{C}_y\cap\mathfrak{R}_{A^n})=\mathfrak{C}_y\cap\mathfrak{M}=\emptyset,$$

ahol $\emptyset$ az üres halmaz.

Figyelembe véve, hogy $\mathfrak{C}_y$ véges dimenziós, és hogy

$$\mathfrak{R}_A\supset\mathfrak{R}_{A^2}\supset\ldots\supset\mathfrak{R}_{A^n}\supset\ldots,$$

ahhoz a következtetéshez jutunk, hogy létezik olyan k természetes szám, amelyre

$$\mathfrak{C}_y \cap \mathfrak{N}_{A^k} = 0. \tag{8.2}$$

Másrészt, mivel $y \in \mathfrak{M}$, így létezik olyan z elem, hogy

$$A^{k+1}z = y \quad \text{vagy} \quad A(A^k z) = y.$$

Utóbbi egyenlőség azt jelenti, hogy $A^k z \in \mathfrak{C}_y$, és mivel $A^k z \in \mathfrak{N}_{A^k}$, így ellentmondáshoz jutunk a (8.2)-vel. Ilyen módon valóban

$$A\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{M}.$$

Legyen A_1 az A operátor által az $\mathfrak{M}$ altérben indukált operátor. Akkor a fennt mondottakból következik, hogy az A_1 operátor normálisan feloldható és d-karakterisztikája $(\alpha_{A_1}, 0)$ alakú, mégpedig α_{A_1} véges és

$$\alpha_{A_1} = \dim(\mathfrak{Z}_A \cap \mathfrak{M}).$$

Továbbá, megjegyezzük, hogy az összes nullától különböző λ számokra $\mathfrak{Z}_{A-\lambda I} \subset \subset \mathfrak{M}$, és ezért $\mathfrak{Z}_{A-\lambda I} = \mathfrak{Z}_{A_1-\lambda I}$. Innen, speciálisan, következik, hogy

$$\alpha_A(\lambda) = \alpha_{A_1}(\lambda) \quad (\lambda \neq 0). \tag{8.3}$$

Az index stabilitásáról szóló 3.1. tételnek megfelelően létezik olyan $\varrho > 0$ szám, hogy az $|\lambda| < \varrho$ egyenlőtlenséget kielégítő összes λ számokra teljesül

$$\varkappa_{A_1}(\lambda) = \varkappa_{A_1}(0), \quad \beta_{A_1}(\lambda) \leqq \beta_{A_1}(0) \quad (\neq 0).$$

A (8.3) egyenlőségből és a β_{A_1} nullával való egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\alpha_A(\lambda) = \alpha_{A_1}(\lambda) = \alpha_{A_1} \tag{8.4}$$

a $0 < |\lambda| < \varrho$ egyenlőtlenséget kielégítő összes λ-ra.

8.1. MEGJEGYZÉS. Nyilvánvalóan

$$\alpha_A(0) \geqq \alpha_A(\lambda) = \alpha_{A_1} \quad (0 < \lambda < \varrho),$$

mégpedig az egyenlőség jelének jelenléte itt magával vonja $\mathfrak{Z}_A \subset \mathfrak{M}$-t.

3. Ez ideig elkerültük a konjugált operátor fogalmának a használatát az általános *Banach*-terekben. Viszont eljött az idő, amikor a fogalomra szükség van. A következő módon vezetjük be azt.

Legyen A a $\mathfrak{B}_2$-beli sűrű $\mathfrak{D}_A (\subset \mathfrak{B}_1)$ értelmezési tartományban definiált lineáris operátor.

Akkor minden $f \in \mathfrak{B}_2^\dagger$ funkcionál egyértelműen generál egy g lineáris funkcionált a $\mathfrak{D}_A$-n, amelyet a

$$g(x) = f(Ax) \quad (x \in \mathfrak{D}_A)$$

egyenlőség határoz meg.

Ha a g funkcionálról kiderül, hogy korlátos (folytonos), akkor az egyetlen módon folytatható az egész $\mathfrak{B}_1 = \bar{\mathfrak{D}}_A$-ra, és az tekinthető a $\mathfrak{B}_1^\dagger$ elemének. Ebben az esetben azt fogjuk írni, hogy

$$g = fA = A^\dagger f.$$

Ezzel definiálunk egy $A^\dagger$ lineáris operátort, amelyet az A operátor *konjugált*[9] operátorának nevezünk, amely a $\mathfrak{B}_2^\dagger$-ből a $\mathfrak{B}_1^\dagger$-be hat és $\mathfrak{D}_{A^\dagger}$ értelmezési tartománya azokból és csakis azokból az $f \in \mathfrak{B}_2^\dagger$ elemekből áll, amelyekhez létezik olyan c_f pozitív szám, hogy

$$|f(Ax)| \leqq c_f|x| \quad (x \in \mathfrak{D}_A).$$

Triviális módon ellenőrizhető, hogy az $A^\dagger$ operátor mindig zárt.

Ugyancsak nyilvánvaló, hogy $A^\dagger f=0$ akkor és csakis akkor, ha $f \in \mathfrak{B}_2^\dagger$ és f ortogonális $\mathfrak{R}_A$-hoz, azaz $f(y)=0 (y \in \mathfrak{R}_A)$. Innen nyilvánvaló, hogy mindig teljesül

$$\alpha_{A^\dagger} = \beta_A.$$

Ugyancsak világos, hogy mindig

$$\beta_{A^\dagger} \geqq \alpha_A.$$

Ezenkívül jól ismert [28], hogy ha A korlátos operátor, amely $\mathfrak{B}_1$-et $\mathfrak{B}_2$-be viszi át, akkor $A^\dagger$ szintén korlátos operátor, amely a $\mathfrak{B}_2^\dagger$-ot $\mathfrak{B}_1^\dagger$-be viszi át, miközben

$$|A^\dagger| = |A|.$$

Ezt már használtuk a 7.8. tétel bizonyítása során.

Bennünket az az eset fog érdekelni, amikor az A operátor nem korlátos is lehet, de zárt.

Szükséges lesz a következő

8.2. LEMMA. *Legyen A egy sűrű értelmezési tartománnyal rendelkező* ($\mathfrak{D}_A=\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{R}_A \subset \mathfrak{B}_2$) zárt operátor. Akkor, ha az A operátor normálisan feloldható, akkor az $A^\dagger$ operátor is normálisan feloldható.

Bizonyítás. Amint már megjegyeztük, a korlátos operátorokra ezt az állítást HAUSDORFF [38] ismerte fel. A lemma bizonyítása céljából tekintjük $\mathfrak{D}_A$-n a

$$\|x\| = |x|+|Ax|$$

normát (l. 2. § 5. pont), amely $\mathfrak{D}_A$-t a $\mathfrak{D}_A$ *Banach*-térré változtatja. Akkor az A operátor $\mathfrak{D}_A$-ban egy korlátos A operátort indukál ugyanazzal az értelmezési tartománnyal. Ezért, ha az A operátor normálisan feloldható, akkor olyan lesz az A operátor is, tehát HAUSDORFF tétele szerint, az $A^\dagger$ operátor is, amely az egész $\mathfrak{B}_2^\dagger$-t $\mathfrak{D}_A^\dagger$-ba viszi át, ahol $\mathfrak{D}_A^\dagger$ a $\mathfrak{D}_A$-hoz konjugált teret jelenti. Megjegyezzük, hogy $\mathfrak{B}_1^\dagger$ tekinthető a $\mathfrak{D}_A^\dagger$ részének, ugyanis ha $f(x)$ egy lineáris folytonos funkcionál a $\mathfrak{B}_1$-en, akkor

$$|f(x)| \leqq |f|_{\mathfrak{B}_1}|x| \quad (x \in \mathfrak{B}_1),$$

tehát annál inkább

$$|f(x)| \leqq |f|_{\mathfrak{B}_1}\|x\| \quad (x \in \mathfrak{D}_A).$$

[9] Helyesebb volna az $A^\dagger$ operátort *transzponáltnak* nevezni a komplex *Hilbert*-térben értelmezett *konjugált* operátor fogalmától eltérően, ugyanis amíg az $A^\dagger$ operátor definíciójából $(\lambda A)^\dagger=\lambda A^\dagger$ következik, addig a konjugált A^* operátor definíciójából a *Hilbert*-térben $(\lambda A)^*= =\bar{\lambda} A^*$ következik.

Egyidejűleg megjegyezzük, hogy ha $f \in \mathfrak{B}_1^\dagger$, akkor

$$|f|_{\mathfrak{B}_1} = \sup_{x \in \mathfrak{D}_A} \frac{|f(x)|}{|x|} \geqq \sup_{x \in \mathfrak{D}_A} \frac{|f(x)|}{|x|} = |f|_{\mathfrak{D}_A}.$$

Az $\mathrm{A}^\dagger$ operátor tekinthető úgy, mint az $A^\dagger$ operátor folytatása az egész $\mathfrak{B}_2^\dagger$-re. Jelöljük $\hat{A}^\dagger$ és $\hat{\mathrm{A}}^\dagger$-vel az $A^\dagger$ és $\mathrm{A}^\dagger$ által megfelelően a $\mathfrak{D}_{A^\dagger}/\mathfrak{Z}_{A^\dagger}$ és $\mathfrak{B}_2^\dagger/\mathfrak{Z}_{A^\dagger}$ faktor-terekben indukált zárt operátorokat. Akkor az $\hat{\mathrm{A}}^\dagger$ operátor az $\hat{A}^\dagger$ operátor folytatása lesz.

Mivel az $\mathrm{A}^\dagger$ operátor normálisan feloldható, az $\hat{\mathrm{A}}^\dagger$ operátornak létezik korlátos inverze (l. 2. § 1. pont), azaz található olyan $m > 0$, hogy

$$|\hat{\mathrm{A}}^\dagger \hat{f}|_{\mathfrak{D}_A} \geqq m|\hat{f}| \quad (\hat{f} \in \mathfrak{B}_2/\mathfrak{Z}_{A^\dagger}),$$

és ezért

$$|\hat{A}^\dagger \hat{f}|_{\mathfrak{B}_1} = |\hat{\mathrm{A}}^\dagger \hat{f}|_{\mathfrak{B}_1} \geqq |\hat{\mathrm{A}}^\dagger \hat{f}|_{\mathfrak{D}_A} \geqq m|\hat{f}| \quad (\hat{f} \in \mathfrak{D}_{A^\dagger}/\mathfrak{Z}_{A^\dagger}).$$

Innen az $\hat{A}^\dagger$ operátornak van korlátos inverze, ami a zártsággal együtt annak normális feloldhatóságát adja. Mivel az $\hat{A}^\dagger$ és $A^\dagger$ operátorok értékkészletei egybeesnek, így a lemmát bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. Korlátos operátor esetében HAUSDORFF bebizonyította (amit már használtunk a 7.2. tétel bizonyítása közben), hogy megfordítva is, az $A^\dagger$ normális feloldhatóságából következik az A normális feloldhatósága.

Nem ismeretes számunkra, általánosítható-e ez az állítás tetszőleges zárt nem korlátos operátorra. Ha a $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{B}_2$ terek reflexívek, akkor ez az általánosítás lehetséges. A dolog abban áll, hogy ha $\mathfrak{B}_2$ reflexív, akkor, általánosítva I. NEUMANN (l. [30], IV. fejezet 46. pont) ismert „gráf-módszerét", nem nehéz belátni, hogy $\mathfrak{D}_{A^\dagger}$ sűrű $\mathfrak{B}_2^\dagger$-ben. [10]

Ha a $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{B}_2$ reflexívek $((\mathfrak{B}_1^\dagger)^\dagger = \mathfrak{B}_1, (\mathfrak{B}_2^\dagger)^\dagger = \mathfrak{B}_2)$, akkor az $(A^\dagger)^\dagger$ operátor egybe fog esni A-val, ahonnan a 8.2. lemma miatt az $A^\dagger$ normális feloldhatóságából következni fog az A normális feloldhatósága. Reflexív $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{B}_2$ esetén nyilván mindig $\alpha_{A^\dagger} = \beta_A$, $\beta_{A^\dagger} = \alpha_A$.

8.3. LEMMA. *Legyen A a $\mathfrak{B}$-ben definiált és abban sűrű értelmezési tartománnyal rendelkező zárt operátor. Ha azonkívül az A operátor Φ_+- (vagy Φ_--) operátor, akkor létezik olyan $\varrho > 0$ szám, hogy a $0 < |\lambda| < \varrho$ egyenlőséget kielégítő összes λ komplex számokra az*

$$f(A - \lambda I) = 0 \quad (f \in \mathfrak{B}^\dagger) \tag{8.5}$$

egyenlet lineáris független megoldásainak a száma ugyanaz. [11]

[10] Az általános esetben csak azt lehet állítani hogy a $\mathfrak{D}_{A^\dagger}$ regulárisan zárt burka egybeesik $\mathfrak{B}_2^\dagger$-vel.

[11] Megjegyzés a korrektúrán. A cikk módszereit fejlesztve A. Sz. MARKUSnak sikerült a 8.3. lemmában megszabadulni a $\mathfrak{D}_A$-nak $\mathfrak{B}$-ben való sűrűségi megszorításától. Ezzel kapcsolatosan szükségtelenné válik ez a megkötés a 8.2. tétel második állításában is.

Bizonyítás. A 8.2. lemmának megfelelően, a 8.3. lemma feltételeinek teljesülése mellett az A operátornak létezik $A^\dagger$ konjugált operátora, amely amellett normálisan feloldható, és amelyre $\alpha_{A^\dagger}=\beta_A(<\infty)$.

Az $A^\dagger$ operátorra alkalmazható a 8.1. lemma. Másrészt nyilván

$$\beta_A(\lambda)=\alpha_{A^\dagger}(\lambda),$$

és mivel a (8.5) egyenlet ekvivalens az

$$(A^\dagger-\lambda I)f=0$$

egyenlettel, így innen következik a 8.3. lemma.

A bebizonyított lemmák segítségével és a 3.3. tétel bizonyításánál már használt módszerrel könnyűszerrel belátható a következő állítás:

8.2. TÉTEL. *Legyen A a $\mathfrak{B}$-ben definiált valamely zárt operátor, a G pedig az A Φ_+-halmazának valamely összefüggő komponense. Akkor az összes $\lambda\in G$ pontban, kivéve esetleg bizonyos izolált pontokat, az $\alpha_A(\lambda)$ függvény konstans*

$$\alpha_A(\lambda)=n$$

értéket vesz fel, az említett izolált pontokban pedig az értéke csak növekedhet.

Ha az A operátor értelmezési tartománya sűrű $\mathfrak{B}$-ben, akkor analóg állítás fogalmazható meg a $\beta_A(\lambda)$ függvény viselkedésére az A operátor $\mathfrak{B}_-$-halmazának tetszőleges összefüggő komponensében.

8.2. MEGJEGYZÉS. Legyen G a zárt A operátor Φ_+- (vagy Φ_--) halmazának valamely összefüggő komponense.

Akkor a 8.2. tétel szerint az összes $\lambda\in G$-re, kivéve esetleg izolált pontok valamely $\mathscr{E}$ halmazát, az $\alpha_A(\lambda)$ függvénynek ugyanaz az

$$\alpha_A(\lambda)=\dim \mathfrak{Z}_{A-\lambda I}=n\quad(\alpha\in G\setminus\mathscr{E})$$

értéke, méghozzá a 8.1. megjegyzés szerint,

$$\mathfrak{Z}_{A-\lambda I}\subset\mathfrak{M}_\lambda=\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathfrak{R}_{A-\lambda I^k}.$$

A (8.2) képlet alapján a $\lambda\in\mathscr{E}$ pontokban

$$\dim(\mathfrak{Z}_{A-\lambda I}\cap\mathfrak{M}_\lambda)=n,$$

viszont már

$$\alpha_A(\lambda)=\dim\mathfrak{Z}_{A-\lambda I}>n.$$

Ha $n=0$, akkor $\mathscr{E}$ az A operátor összes sajátértékének (izolált) halmaza lesz G-ben. Mivel ezközben $\lambda\in\mathscr{E}$-ra teljesül. $\mathfrak{Z}_{A-\lambda I}\cap\mathfrak{M}_\lambda=0$, így minden $\lambda\in\mathscr{E}$ sajátértékhez található olyan $k=k_\lambda$ természetes szám, hogy $\mathfrak{Z}_{A-\lambda I}\cap\mathfrak{R}_{(A-\lambda I)^k}=0$, és ezért, az annak megfelelő gyök-altér *véges dimenziós lesz.*

Megfordítva, *ha $n\neq0$, akkor bármely $\lambda_0\in G$ számnak végtelen dimenziós gyökaltér felel meg.*

Valóban, legyen x_1 ($\neq 0$) tetszőleges $\mathfrak{Z}_{A-\lambda_0 I} \cap \mathfrak{M}_{\lambda_0}$-beli vektor. A 8.1. lemma bizonyítása során megmutattuk, hogy

$$A(\mathfrak{D} \cap \mathfrak{M})_{\lambda_0}) = \mathfrak{M}_{\lambda_0},$$

következésképp, található olyan végtelen $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}_{\lambda_0}$ sorozat, hogy

$$(A - \lambda_0 I) x_{n+1} = x_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Figyelembe véve az $(A - \lambda_0 I) x_1 = 0$ egyenlőséget, megjegyezzük, hogy a $\{x_n\}$ sorozat minden vektora olyan gyök-vektora az A operátornak, amely a λ_0 számnak felel meg, méghozzá az

$$(A - \lambda_0 I)^n x_n = 0, \quad (A - \lambda_0 I)^{n-1} x_n = x_1 \neq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

összefüggés miatt azok lineárisan függetlenek.

A 2. §. 5. pont következtetései könnyen elvezetnek az alábbi állításhoz.

8.3. TÉTEL. *Legyen A egy zárt operátor, B pedig tetszőleges A-teljesen folytonos operátor. Akkor az A és $A+B$ operátorok Φ_+-halmazai egybeesnek.*

9. §. Reguláris típusú pontok és tételek a Hermite-féle operátorok perturbációjáról

1. Legyen A a $\mathfrak{B}$ *Banach*-térben értelmezett tetszőleges lineáris operátor. A komplex sík λ_0 pontját *reguláris típusú pontnak* nevezzük az A operátorra nézve, ha található olyan m_{λ_0} pozitív szám, hogy

$$|(A - \lambda_0 I) x| \geqq m_{\lambda_0} |x| \quad (x \in \mathfrak{D}_A).$$

Ha az A operátor zárt, akkor nyilván a λ_0 pont reguláris típusú lesz az A-ra nézve akkor és csakis akkor, ha az

$$(A - \lambda_0 I) x = 0$$

egyenletnek egyetlen nulla megoldása van, és az $A - \lambda_0 I$ operátor normálisan feloldható.

Megjegyezzük, hogy lehetségesek olyan esetek, amikor az operátornak vannak reguláris típusú pontjai, ugyanakkor nincs lezártja.

9.1. TÉTEL. *Legyen λ_0 az A lineáris operátor reguláris típusú pontja. Akkor található olyan ϱ pozitív szám, hogy bármilyen legyen is a $\mathfrak{B}$-ben definiált lineáris korlátos B operátor, a λ_0 reguláris típusú pontja lesz az $A+B$ operátornak is, méghozzá*

$$\beta_{A+B} = \beta_A.$$

Megjegyezzük, hogy ha feltételeznénk, hogy az A operátor zárt, akkor ez a tétel benne volna a 7.1. tételben.

Bizonyítás. Valóban, feltétel szerint az összes $x\in\mathfrak{D}_A$-re fennáll az

$$|(A-\lambda_0 I)x| \geqq m_{\lambda_0}|x|$$

egyenlőtlenség.

Legyen $\varphi=m_{\lambda_0}/3$[12] és $|B|<\varrho$. Akkor

$$|(A+B-\lambda_0 I)x| \geqq (m_{\lambda_0}-|B|)|x|.$$

Következésképp, λ_0 reguláris típusú pont az $A+B$ operátorra nézve.

Ezenkívül a nyilvánvaló

$$|(A+B-\lambda_0 I)x-(A-\lambda_0 I)x| \leqq \frac{1}{3}|(A-\lambda_0 I)x|$$

egyenlőtlenségek és

$$|(A-\lambda_0 I)x-(A+B-\lambda_0 I)x| \leqq \frac{3|B|}{2m_{\lambda_0}}|(A+B-\lambda_0 I)x| \quad (x\in\mathfrak{D}_A)$$

miatt azt kapjuk, hogy

$$\theta(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) < 1/2,$$

ahol $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{N}_{A-\lambda_0 I}$ és $\mathfrak{N}_2=\mathfrak{N}_{A+B-\lambda_0 I}$.

Alkalmazva $\mathfrak{N}_1$ és $\mathfrak{N}_2$-re a 6.3. tételt, azt kapjuk, hogy

$$\dim \mathfrak{N}_1^\perp = \dim \mathfrak{N}_2^\perp,$$

azaz

$$\beta_{A+B-\lambda_0 I} = \beta_{A-\lambda_0 I}.$$

A bebizonyított tételből speciálisan az is következik, hogy a tetszőleges A lineáris operátor összes reguláris típusú pontjainak az összessége nyílt halmazt alkot.

Valóban, ha λ_0 az A operátor reguláris típusú pontja, akkor az $|\lambda-\lambda_0|<m_{\lambda_0}/3$ kör összes λ pontja szintén reguláris típusú pontja ennek az operátornak.

A 9.1. tételből közvetlenül adódik a

9.2. TÉTEL. *Az A operátor reguláris típusú pontjai halmazának bármely összefüggő komponensében a $\beta_A(\lambda)$ függvény ugyanazt az értéket veszi fel.*

2. Ismertetjük a bizonyított tételek néhány alkalmazását a *Hermite*-féle operátorok elméletében.

Legyen H a $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-térben definiált tetszőleges *Hermite*-féle operátor, azaz H olyan lineáris operátor, hogy

$$(Hx, y) = (x, Hy) \quad (x, y\in\mathfrak{D}_H).$$

Az általánosan elfogadott definíciótól eltérően mi nem követeljük meg a *Hermite*-féle operátortól $\mathfrak{D}_H$ értelmezési tartományának sűrűségét $\mathfrak{H}$-ban.

Az összes nem valós λ pont reguláris típusú pontja a H operátornak, ugyanis mint ismeretes,

$$(9.1) \qquad |(H-\lambda I)x| \geqq |\mathrm{Im}\,\lambda||x| \quad (x\in\mathfrak{D}_H).$$

[12] Abban az esetben, ha $\beta_A(\lambda_0)$ véges, feltehető $\varrho=m_{\lambda_0}/2$.

Következésképp, a H operátor összes reguláris típusú pontjainak a halmaza két összefüggő komponensből áll (felső és alsó félsíkból), ha a valós tengelyen nincs egyetlen reguláris típusú pontja sem a H operátornak; és egyetlen komponensből áll ellenkező esetben.

A 9.2. tételből következik, hogy a felső félsík minden λ pontjára a $\beta_H(\lambda)$ ugyanazt az értéket veszi fel: $\beta_H(\lambda)=m(\operatorname{Im}\lambda>0)$, és az alsó félsík minden λ pontjára $\beta_H(\lambda)=n$ $(\operatorname{Im}\lambda<0)$.

Az (m, n) rendezett számpárt a H operátor *defektus párjának* [13] fogjuk nevezni. Nyilvánvaló, hogy ha a H operátornak van legalább egy valós reguláris típusú pontja, akkor $m=n$.

9.3. TÉTEL. *Ha B egy korlátos önadjungált operátor, akkor a Hermite-féle H és $H+B$ operátorok defektus párjai egybeesnek.*

Bizonyítás. Valóban, legyen λ_0 az $|\operatorname{Im}\lambda_0|>3|B|$ egyenlőtlenséget kielégítő komplex szám.

Akkor a 9.1. tétel miatt

$$\beta_{H+B}(\lambda_0)=\beta_H(\lambda_0)=m,\quad \beta_{H+B}(\bar\lambda_0)=\beta_H(\bar\lambda_0)=n.$$

A tételt bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. A 9.3. tétel érvényben marad, ha feltételeit a következőkkel cseréljük fel: H egy zárt *Hermite*-féle operátor, B pedig egy H-teljesen folytonos *Hermite*-féle operátor. A megjegyzés jogossága következni fog az alábbi általános tételből.

9.4. TÉTEL. *Legyen H egy zárt Hermite-féle operátor, B pedig egy tetszőleges H-teljesen folytonos operátor. Akkor az összes nem valós pontok, kivéve, esetleg bizonyos izolált pontokat, a $H+B$ operátor reguláris típusú pontjai lesznek, és azokban a H és $H+B$ operátorok defektus számai egybe fognak esni.*

Az említett izolált pontokban pedig a

$$(H+B-\lambda I)\varphi=0$$

egyenlet lineárisan független megoldásainak a száma véges, méghozzá

$$\beta_{H+B}(\lambda)-\alpha_{H+B}(\lambda)=\beta_H(\lambda).$$

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy a 3.4. és 8.3. tételek szerint a $H+B$ és H operátorok Φ_--halmazai, ugyanígy a Φ_+-halmazai is, egybeesnek. Tehát csak azt kell bizonyítani, hogy létezik olyan λ_0 pont, amely a $\bar\lambda_0$ ponttal együtt a $H+B$ operátor reguláris típusú pontja.

Emlékeztetünk arra, hogy — a *Najmark—Krasznoszelszkij-* ([40], [41], [42]) tétel szerint — bármely zárt *Hermite*-féle operátornak létezik a térből kivezető önadjungált bővítése, azaz létezik olyan $\tilde{\mathfrak{H}}$ *Hilbert*-tér, amely tartalmazza a $\mathfrak{H}$-t, és abban olyan $\tilde{\mathfrak{H}}$ önadjungált operátor, amely a H-nak folytatása.

[13] Ez a terminológia különbözik a *Hermite*-féle operátorok elméletében elfogadottól, amely szerint az (m, n) párt a H operátor *defektus indexének* nevezik.

Vezessünk be a $\mathfrak{D}_{\tilde{H}}$-ban egy új skalárszorzatot

$$[f, g] = (f, g)+(\tilde{H}f, \tilde{H}g),$$

és ennek megfelelően új normát

$$|f|_{\tilde{H}}=[f,f]^{1/2} \quad (f\notin \mathfrak{D}_{\tilde{H}}), \tag{9.2}$$

amely topológiailag ekvivalens a

$$|f| = |f|+|\tilde{H}f| \quad (f\in\mathfrak{D}_{\tilde{H}})$$

normával.

Ezek után a $\mathfrak{D}_{\tilde{H}}$ teljes *Hilbert*-térré válik (l. 2. § 5. pont).

A $\mathfrak{D}_H$ lineáris sokaság a $\mathfrak{D}_{\tilde{H}}$ zárt lineáris altere a (9.2) metrikában. Jelöljük $\mathfrak{N}$-nel a $\mathfrak{D}_H$-hoz ortogonális alteret $\mathfrak{D}_{\tilde{H}}$-ban. Definíció szerint (l. 2. § 5. pont), a B operátor H-teljes folytonossága azt jelenti, hogy B definiálva van az egész $\mathfrak{D}_H$ altéren, és abban teljesen folytonos a (9.2) metrikában.

Folytatjuk a B operátort az egész $\mathfrak{D}_{\tilde{H}}$ térre, feltételezve, hogy

$$\tilde{B}(f+g) = Bf \quad (f\in\mathfrak{D}_H,\ g\in\mathfrak{N}).$$

Nyilvánvaló, hogy az így keletkező $\tilde{B}$ operátor zárt a $\tilde{\mathfrak{H}}$-ban és $\tilde{H}$-teljesen folytonos. Ebben az esetben, amint azt az 5.1. tétel bizonyítása során már megmutattuk,

$$\lim_{\eta\to\infty} |\tilde{B}\tilde{R}_{i\eta}| = 0,$$

ahol $\tilde{R}_{i\eta}$ a $\tilde{H}$ operátor rezolvense: $\tilde{R}_{i\eta}=(\tilde{H}-i\eta I)^{-1}(\eta>0)$.

Jelöljük λ_0-val az $i\eta$ számot, ahol η-t olyan nagynak vettük, hogy

$$|\tilde{B}\tilde{R}_{\lambda_0}| = q < 1, \quad |\tilde{B}\tilde{R}_{\bar{\lambda}_0}| < 1.$$

Legyen most $f=\tilde{R}_{\lambda_0}g$ tetszőleges $\mathfrak{D}_H$-beli elem. Akkor

$$|Bf| = |B\tilde{R}_{\lambda_0}g| \leqq q|g| = q|(H-\lambda_0 I)g|,$$

azaz

$$|Bf| \leqq q|(H-\lambda_0 I)g|.$$

Ilyen módon

$$|(H+B-\lambda_0 I)f| \geqq (1-q)|(H-\lambda_0 I)f| \geqq (1-q)m_{\lambda_0}|f|, \quad (f\in\mathfrak{D}_H),$$

és ezért a λ_0 pont a $H+B$ operátor reguláris típusú pontja. Analóg módon bizonyítható, hogy a $\bar{\lambda}_0$ pont is reguláris típusú pont a $H+B$ operátorra nézve.

A tételt bebizonyítottuk.

9.1. MEGJEGYZÉS. A tétel feltételei teljesülnek, ha B egy tetszőleges korlátos operátor, H-nak pedig létezik diszkrét spektrummal rendelkező önadjungált folytatása.

Valóban, legyen a $\tilde{H}$ a H *Hermite*-féle operátornak olyan folytatása, amely diszkrét spektrummal rendelkezik, és legyen λ_0 a H operátor valamely valós reguláris pontja. Akkor az $\tilde{R}_{\lambda_0}=(\tilde{H}-\lambda_0 I)^{-1}$ operátor teljesen folytonos, és ezért a $B\tilde{R}_{\lambda_0}$ szorzat is olyan lesz. Utóbbi magával vonja a B operátor H-teljes folytonosságát.

9.2. MEGJEGYZÉS. A 9.4. tétel feltételei teljesülnek, ha B egy tetszőleges korlátos operátor, H pedig véges defektuspárral rendelkező olyan *Hermite*-féle operátor, amelyre minden valós pont reguláris típusú.

Valóban, ebben az esetben tetszőleges valós λ_0-hoz található olyan $m_{\lambda_0}>0$, hogy

$$|(H-\lambda_0 I)f| \geqq m_{\lambda_0}|f| \quad (f\in\mathfrak{D}_H).$$

A [43] terminológiáját használva azt mondhatjuk, hogy a

$$\lambda_0-m_{\lambda_0}<\lambda<\lambda_0+m_{\lambda_0} \tag{9.3}$$

intervallum a H operátorra nézve *spektrál hézag*. A H operátor bármely önadjungált folytatásának a (9.3) intervallumban nem lehet több mint m sajátértéke (l. [43], 7. §).

A λ_0 pont tetszőleges volta miatt leszögezhetjük, hogy az operátor bármely önadjungált folytatásának a spektruma diszkrét, tehát, a 9.1. megjegyzés alapján a B operátor H-teljesen folytonos.

9.3. MEGJEGYZÉS. Ha a B operátor olyan, hogy

$$\operatorname{Im}(Bf,f)\geqq 0 \quad (f\in\mathfrak{D}_H),$$

akkor az összes olyan nem valós pont, amelyben a

$$(H+B-\lambda I)\varphi=0$$

egyenletnek van nullától különböző megoldása, a felső síkon helyezkedik el. Következésképp, az egész alsó félsík a $H+B$ operátor reguláris típusú pontjaiból áll.

9.4. MEGJEGYZÉS. Ha a H *Hermite*-féle operátor maximális, például $m=0$, a B pedig H-teljesen folytonos operátor, akkor a $H+B$ operátor egész spektruma a felső félsíkban izolált olyan sajátértékekből áll, amelyeknek véges dimenziós normálisan leválasztható gyök-alterek felelnek meg.

10. §. Alkalmazás a Wiener—Hopf-típusú félegyenesen adott integrálegyenletekhez

1. Ebben a paragrafusban illusztrálni fogunk egy sor bizonyított általános tételt az

$$\int_0^\infty k(t-s)g(s)\,ds-g(t)=f(t) \quad (0\leqq t<\infty)$$

alakú integrálegyenleteken, megfelelő típusú egyenletrendszerekben, és utóbbiak esetében néhány új tényt állapítunk meg.

Egyszerűség kedvéért először a függvények alaptereként az

$$|f|_{\mathfrak{C}}=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$$

módon definiált normájú összes komplex mérhető abszolút integrálható $f(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ függvények $\mathfrak{C}=L_1(-\infty, \infty)$ terét fogjuk tekinteni.

Mint ismeretes, $\mathfrak{C}$ tekinthető teljes kommutatív normált gyűrűnek, ha abban két f_1 és f_2 elem szorzatát a következő szabállyal definiáljuk

$$f=f_1*f_2, \quad \text{azaz} \quad f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-s)f_2(s)\,ds=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)f_2(t-s)\,ds \quad (-\infty<t<\infty).$$

Ha most minden $k(t)\in\mathfrak{C}$ függvénynek megfeleltünk a $\mathfrak{C}$-ben értelmezett valamely K operátort a

$$Kg(t)=\int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)g(s)\,ds=(k*g)(t)$$

képlettel, akkor annak normája, amint könnyen belátható, egybeesik a k normájával.

$$|K|=|k|_{\mathfrak{C}}.$$

Ilyen módon, a $k\to K$ leképezés izomorfizmus lesz, és a $\mathfrak{C}$ gyűrű izometrikus leképezése a $\mathfrak{C}$-ben definiált operátorok valamely $\mathfrak{R}$ kommutatív gyűrűjébe.

Feltételezve, hogy $k\in\mathfrak{C}$ és $f\in\mathfrak{C}$, először megvizsgáljuk a $\mathfrak{C}$ osztályban a

$$Kg-g=f \tag{10.1}$$

egyenletet.

Alkalmazva a *Fourier*-transzformációt a (10.1) egyenlőség mindkét oldalára, azt kapjuk, hogy

$$(\mathcal{K}(\xi)-1)\mathcal{G}(\xi)=\mathcal{F}(\xi) \quad (-\infty<\xi<\infty), \tag{10.2}$$

ahol a $\mathfrak{C}$-beli függvények *Fourier*-transzformáltját a megfelelő írott betűvel jelöljük, úgy hogy, például:

$$\mathcal{K}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}k(t)\,dt \quad (-\infty<\xi<\infty).$$

Ha teljesül a

$$\mathcal{K}(\xi)-1\neq 0 \quad (-\infty<\xi<\infty) \tag{10.3}$$

feltétel, akkor WIENER [32] ismert tétele szerint található olyan $q\in\mathfrak{C}$ függvény, hogy

$$[\mathcal{K}(\xi)-1]^{-1}=\mathcal{Q}(\xi)-1=-1+\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}q(t)\,dt \quad (-\infty<\xi<\infty).$$

Akkor a (10.2)-ből kapjuk, hogy

$$\mathcal{G}(\xi)=[\mathcal{K}(\xi)-1]^{-1}\mathcal{F}(\xi)=[\mathcal{Q}(\xi)-1]\mathcal{F}(\xi) \quad (-\infty<\xi<\infty),$$

vagy, ami ezzel ekvivalens,

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} q(t-s)f(s)\,ds-f(t) \quad (-\infty<t<\infty). \tag{10.4}$$

Könnyen belátható, hogy megfordítva, tetszőleges $f\in\mathfrak{C}$ esetén a (10.4) képlettel előállított g függvény a (10.1) egyenlet megoldása lesz.

Ilyen módon a (10.3) feltétel teljesítése mellett a $\lambda=1$ pont a K operátor reguláris pontja. Másrészt, ha valamely valós ξ_0-ra

$$\mathcal{K}(\xi_0)-1 = 0,$$

akkor, kiválasztva $f_0\in\mathfrak{C}$-t, úgy, hogy $\mathcal{F}_0(\xi_0)\neq 0$, a (10.2)-ből leszögezhetjük, hogy $f=f_0$ mellett a (10.1) egyenletnek nem lesz $\mathfrak{C}$ osztálybeli megoldása. Következésképp, ebben az esetben a $\lambda=1$ pont a K operátor spektrumához fog tartozni.

Alkalmazva a kapott eredményt a $\lambda_0^{-1}K$ $(\lambda_0\neq 0)$ operátorra, azt találjuk, hogy a λ_0 pont a K operátor spektrumának a pontja abban és csakis abban az esetben, ha az a

$$\lambda = \mathcal{K}(\xi) \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

komplex λ-sík Γ görbéjére illeszkedik.

Mivel a K operátor S_K spektruma zárt, így a $0=\lim\limits_{\xi\to\pm\infty}\mathcal{K}(\xi)$ pont mindig benne van a K operátor spektrumában.

Ilyen módon, a $\lambda=0$ pontot a Γ görbéhez csatolva, az ilyen módon mindig zárt lesz, és így állíthatjuk, hogy

1°. A K operátor spektruma egybeesik a Γ görbe pontjainak a halmazával.

Ezt az állítást kiegészíthetjük a következővel:

2°. Az S_K spektrum egyetlen pontja sem Φ — vagy $\Phi_\pm$ — pont a K operátorra nézve.

Ezt az állítást elegendő bizonyítani az S_K spektrum olyan pontjaira, amelyek véges ξ-knek felelnek meg.

Tételezzük fel, hogy a Γ görbe valamely $\lambda_0=K\ (\xi_0)$ $(-\infty<\xi_0<\infty)$ pontja Φ- vagy $\Phi_\pm$-pontja a K operátornak.

Először feltételezzük, hogy a Γ sima görbe. Akkor a λ_0 tetszőleges környezetében léteznek olyan pontok, amelyek nem tartoznak a Γ-hoz, azaz a K operátor reguláris pontjai. Következésképp, a 2.4. és 7.1. tételek alapján állíthatjuk, hogy létezik olyan $\varrho>0$, hogy az „átlyukasztott" $0<|\lambda-\lambda_0|<\varrho$ kör összes pontja reguláris pontja a K operátornak.

Másrészt, ez az átlyukasztott kör a folytonos Γ görbe végtelen sok pontját fogja tartalmazni, vagyis az S_K spektrumát. Ellentmondáshoz jutottunk.

Tekintsük most az általános esetet, amikor a Γ görbe viselkedését semmilyen újabb követelmény nem korlátozza.

A 2.4., 7.1., 7.2. tételek miatt minden esetben található olyan $\delta>0$, hogy bármely K_1 lineáris korlátos olyan operátor esetében, amely eleget tesz a

$$|K-K_1| < \delta$$

feltételnek, a λ_0 pont Φ-, vagy $\Phi_\pm$-pont.

Legyen

$$k_N(t) = \begin{cases} k(t), & \text{ha} \quad |t| < N, \\ 0, & \text{ha} \quad |t| \geqq N, \end{cases}$$

és tekintsük a $k_N(t)$ függvénynek megfelelő K_N operátort.

Nyilvánvaló, hogy elég nagy N esetén

$$|K-K_N| = \Big(\int_{-\infty}^{-N} + \int_{N}^{\infty}\Big)|k(t)|\,dt < \frac{\delta}{2}. \tag{10.5}$$

Mivel a

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} k_N(t)\,dt = \int_{-N}^{N} e^{i\xi t} k(t)\,dt \qquad (-\infty < \xi < \infty)$$

görbe analitikus, ezért a már bizonyítottak szerint a

$$\lambda_0' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi_0} k_N(t)\,dt$$

pont a K_N operátor spektrumának olyan pontja lesz, amely nem tartozik annak Φ-, vagy $\Phi_\pm$-halmazához, és ezért, a λ_0 pont nem fog a

$$K' = K_N + (\lambda - \lambda_0')I$$

operátor Φ-, vagy $\Phi_\pm$-halmazához tartozni.

Másrészt a (10.5)-nek megfelelően

$$|\lambda_0 - \lambda_0'| < \delta/2$$

és

$$|K-K'| \leqq |K-K_N| + |\lambda_0 - \lambda_0'| < \delta.$$

Ellentmondáshoz jutottunk.

2. Jelöljük $\mathfrak{C}_+$-szal az $L_1(0, \infty)$ teret. Bármely $k \in \mathfrak{C}$ függvényhez hozzá fogunk rendelni két operátort:

$$K_{11} g(t) = \int_0^\infty k(t-s) g(s)\,ds,$$

$$K_{12} g(t) = \int_0^\infty k(t+s) g(s)\,ds,$$

amelyek $\mathfrak{C}_+$-t önmaga részébe képezik le. Nem nehéz belátni, hogy a K_{11} és K_{12} operátorok korlátosak, mégpedig

$$|K_{11}| = |k|_{\mathfrak{C}} \quad \text{és} \quad |K_{12}| \leqq \int_0^\infty |k(t)|\,dt.$$

Kiderül, hogy ezen kívül:

3°. A K_{12} operátor teljesen folytonos.

Valóban, ha $f = K_{12} g$ $(g \in \mathfrak{C}_+)$, akkor

$$\int_0^\infty |f(t+h) - f(t)|\,dt \leqq \int_0^\infty \int_0^\infty |k(t+s+h) - k(t+s)||g(s)|\,ds\,dt \leqq$$

$$\leqq |g|_{\mathfrak{C}_+} \int_{-\infty}^{\infty} |k(t+h) - k(t)|\,dt \qquad (h > 0).$$

Ilyen módon, a K_{12} operátor az $|g|_{\mathfrak{C}_+}=1$ egység szférát egy olyan $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{C}_+$ korlátos halmazba képezi le, amelyre tetszőleges $\varepsilon>0$-nak megfelel egy olyan $\delta>0$, hogy $0\leqq h<\delta$ esetén

$$\int_0^\infty |f(t+h)-f(t)|\,dt<\varepsilon \quad (f\in\mathfrak{E}).$$

Mivel, ezen kívül, elég nagy N-re az összes $f\in\mathfrak{E}$ esetén fennáll az

$$\int_N^\infty |f(t)|\,dt \leqq \int_{-N}^\infty \int_0^\infty |k(t+s)||\varphi(s)|\,ds \leqq \int_N^\infty |k(t)|\,dt<\varepsilon$$

egyenlőtlenség, ezért RIESZ FRIGYES [34] ismert kompaktsági kritériuma szerint az $\mathfrak{E}$ halmaz kompakt a $\mathfrak{C}_+$-ban. A 3° állítást bebizonyítottuk.

4°. Bármely olyan pont, amely nincs rajta a Γ görbén, a K_{11} operátor Φ-pontja.

Valóban, ha $\lambda_0\notin\Gamma$, akkor λ_0 a $\mathfrak{C}$ térben difiniált K operátor reguláris pontja.

Tekintsük, másrészt azt a $\mathfrak{C}_+''$ teret, amely az $f_j\in\mathfrak{C}_+$ $(j=1,2)$ koordinátájú kétdimenziós $f(t)=\{f_1(t),f_2(t)\}$ vektor-függvényekből áll, a norma következő definíciója mellett:

$$|f|=|f_1|_{\mathfrak{C}_+}+|f_2|_{\mathfrak{C}_+}=\int_0^\infty (|f_1(t)|+|f_2(t)|)\,dt.$$

A $\mathfrak{C}_+''$ tér ekvivalens a $\mathfrak{C}$ térrel a következő izomorfizmus miatt: bármely $f\in\mathfrak{C}$-hez hozzá van rendelve egy $f\in\mathfrak{C}_+''$ az

$$f_1(t)=f(t),\quad f_2(t)=f(-t)\quad (0\leqq t<\infty)$$

törvény szerint.

Ezen ekvivalencia miatt a K operátor felfogható $\mathfrak{C}_+''$-ben definiált operátorként, miközben ha

$$f=Kg,$$

akkor

$$\left\{\begin{aligned} f_1(t)&=\int_0^\infty k(t-s)g_1(s)\,ds+\int_0^\infty k(t+s)g_2(s)\,ds,\\ f_2(t)&=\int_0^\infty k(-t-s)g_1(s)\,ds+\int_0^\infty k(s-t)g_2(s)\,ds,\end{aligned}\right. \tag{10.6}$$

vagy, egyszerűsített írásmódban

$$\begin{cases} f_1=K_{11}g_1+K_{12}g_2\\ f_2=K_{21}g_1+K_{22}g_2,\end{cases}$$

vagy még másként

$$K=\begin{pmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{pmatrix}.$$

A K operátorral párhuzamosan tekintsük még a

$$D=\begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{pmatrix}, \quad T=\begin{pmatrix} 0 & K_{12} \\ K_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

egyenlőségekkel definiált D és T operátorokat.

A K_{22} operátornak a magja a K_{11} operátor magjának a transzponáltja. A K_{21} operátor ugyanolyan típusú, mint a K_{12} operátor. Nyilvánvaló, hogy a 3° állítás miatt, a T operátor teljesen folytonos.

Következésképp a D és K operátorok Φ-halmazai egybeesnek. Ezért, ha $\lambda_0 \notin \Gamma$, akkor, lévén az az 1° állítás miatt a K operátor reguláris pontja, egyben a D operátor Φ-pontja lesz $\varkappa_D(\lambda_0)=0$ indexszel.

Mivel pedig a D operátor a K_{11} és K_{22} operátorok direktösszege, amely operátorok mindegyike $\mathfrak{C}_+$ térben definiált, így a λ_0 a K_{11} és K_{22} operátorok mindegyikének szintén Φ-pontja lesz, miközben

$$\varkappa_D(\lambda_0) = \varkappa_{K_{11}}(\lambda_0)+\varkappa_{K_{22}}(\lambda_0) = 0.$$

A 4° állítást bebizonyítottuk.

Bizonyos analitikus eszközöket felhasználva, pontosabb állítást is megfogalmazhatunk (l. [44]).

5°. Ha a λ_0 pont nincs rajta a Γ görbén, akkor az nem Φ-pontja a K_{11} operátornak

$$\varkappa(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\xi \arg(\mathscr{K}(\xi)-\lambda_0)$$

indexszel, eközben, ha $\varkappa=\varkappa(\lambda_0)\geqq 0$, akkor a $K_{11}-\lambda_0 I$ operátor d-karakterisztikája $(0, \varkappa)$ alakú, ha pedig $\varkappa<0$, akkor a $K_{11}-\lambda_0 I$ operátor d-karakterisztikája $(-\varkappa, 0)$ alakú.

Ilyen módon, ha $\varkappa(\lambda_0)<0$, akkor a

$$\int_0^\infty k(t-s)g(s)\,ds-\lambda_0 g(t) = f(t) \tag{10.7}$$

inhomogén egyenlet tetszőleges $f\in L_1^-(0,\infty)$ esetén megoldható az $L_1(0,\infty)$ osztályban, miközben a homogén

$$\int_0^\infty k(t-s)\varphi(s)\,ds-\lambda_0\varphi(t) = 0 \tag{10.8}$$

egyenletnek ugyanabban az osztályban pontosan $-\varkappa(\lambda_0)$ lineárisan független megoldása lesz. Ha viszont $\varkappa(\lambda_0)>0$, akkor a homogén

$$\int_0^\infty k(s-t)\psi(s)\,ds-\lambda_0\psi(t) = 0 \tag{10.9}$$

egyenletnek pontosan $\varkappa(\lambda_0)$ lineárisan független ψ_j $(j=1, 2, \ldots, \varkappa)$ megoldása lesz, a (10.7) inhomogén egyenletnek pedig akkor és csakis akkor fog létezni $g \in L_1(0, \infty)$ megoldása, ha teljesülni fognak a

$$\int_0^\infty f(s)\psi_j(s)\, ds = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \varkappa)$$

feltételek.

Ezen feltételek teljesülése mellett a $g \in L_1(0, \infty)$ megoldás egyetlen lesz.

Meg lehet mutatni [44], hogy a (10.8) és (10.9) egyenletek mindegyikének ugyanazok a megoldásai úgy az $L_1(0, \infty)$-ben, mint a konjugált $M(0, \infty)$ térben (az összes korlátos mérhető függvények terében). Mivel pedig a K_{11} operátor bármely korlátos függvényt folytonosba visz át, így a (10.8) és (10.9) egyenletek említett megoldásai folytonos függvények.[14]

Amíg a K operátor spektruma a Γ görbe pontjainak a halmazából áll, a K_{11} operátor spektruma a Γ görbe pontjainak a halmazából és Φ-pontok olyan egész tartományaiból áll, amelyeket a Γ görbe hurkai határolnak.

A komplex térben a Γ halmaz által kimetszett különböző tartományok indexének a meghatározása során szerepet játszhat az, hogyan futja be azt a $\lambda = \mathcal{K}(\xi)$ pont, amint a ξ befutja a $(-\infty, \infty)$ intervallumot.

Az 1. és 2. ábrán két különböző olyan Γ_1 és Γ_2 görbét mutatunk be, amelyek pontjainak a halmazai egybeesnek, viszont amelyeknek a komplex térnek különböző Φ-komponensekre való felbontása felel meg.

A Φ-komponensekben számokkal jelöltük azok indexét.

10.1. Megjegyzés. Legyen most $\mathfrak{C}_+$ a következő terek egyike:

$$(10.10) \qquad L_p(0, \infty)\ (p \geqq 1), \quad M(0, \infty), \quad M_C(0, \infty), \quad C(0, \infty), \quad C_0(0, \infty),$$

ahol $M_C(0, \infty)\,(\subset M(0, \infty))$ — az összes folytonos korlátos $f(t)$ $(0 \leqq t < \infty)$ függvények tere, $C(0, \infty)$ pedig az összes olyan folytonos $f(t)$ $(0 \leqq t < \infty)$ függvények tere, amelyek határértéke $f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t)$, és végül, $C_0(0, \infty)$ a $C(0, \infty)$ olyan része, amely az $f(\infty) = 0$ egyenlőségnek eleget tevő függvényekből áll.

Könnyű belátni, hogy a (10.6) és (10.7) egyenlőségek ezen terek bármelyikében korlátos operátorokat határoznak meg, méghozzá a második közülük teljesen folytonos. Eközben szem előtt kell tartani azt, hogy az $L_p(0, \infty)\,(p > 1)$ tér esetében a (10.6) és (10.7) intervallumokat úgy kell érteni, mint az

$$\int_0^N k(t-s)g(s)\, ds, \qquad \int_0^N k(t+s)g(s)\, ds$$

integrálok határértékét $N \to \infty$ mellett az $L_p(0, \infty)$ metrikájában.

Kiderül [44], hogy a 4° és 5° állítások és az utánuk következők teljes mértékben érvényben maradnak, ha a $\mathfrak{C}_+$ tér helyett a (10.10) terek egyikét vesszük.

[14] Sőt, meg lehet mutatni [44], hogy ha $\varkappa = \varkappa(\lambda_0) < 0$, akkor a (10.8) egyenlet megoldásaihoz konstruálható abszolút folytonos $\varphi_1, \ldots, \varphi_\varkappa$ függvényekből olyan bázis, hogy

$$\varphi_{j+1} = \frac{d}{dt}\varphi_j \quad (j = 1, 2, \ldots, \varkappa + 1).$$

A $\mathfrak{C}_+ = L_2(0, \infty)$ térben a (10.7) egyenletet először J. M. RAPOPORT [31] vizsgálta, aki, más módszerekkel, és a $k(t)$ függvényekre tett bizonyos pótlólagos megszorítások mellett, bebizonyította erre az 5° állítást (l. úgyszintén a [62]).

3. Részletesen foglalkoztunk a (10.7) skaláris egyenletre vonatkozó egész sor eredmény levezetésével (amelyet bizonyos analitikus apparátus segítségével részletesebben is meg lehet vizsgálni), azzal a céllal, hogy egy egyszerű eseten illusztráljuk azokat az általános eredményeket, amelyek eredményben maradnak a (10.7) típusú integrál egyenletek rendszereire is, ha az említett analitikus apparátus alkalmazhatatlanná válik.

Tekintsük most az egyszerűsített formában

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)g(s)\,ds - \lambda g(t) = f(t) \quad (-\infty < t < \infty) \tag{10.11}$$

alakban leírt integrál egyenlet rendszert, ahol

$$k(t) = \|k_{jl}(t)\|_1^n \quad (-\infty < t < \infty)$$

egy matrix $L_1(-\infty, \infty)$-beli elemekkel, a g és f valamely n-dimenziós vektorfüggvények $L_1(-\infty, \infty)$-beli koordinátákkal.

Az utóbbi vektor-függvények terét $\overset{n}{\mathfrak{C}}$-el fogjuk jelölni, feltéve

$$|f|_{\overset{n}{\mathfrak{C}}} = |f_1|_{\mathfrak{C}} + |f_2|_{\mathfrak{C}} + \ldots + |f_n|_{\mathfrak{C}}.$$

Részletesen leírva a (10.11) rendszer így néz ki:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} k_{je}(t-s)g_e(s)\,ds - \lambda g_j(t) = f_j(t) \quad (j = 1, \ldots, n;\ -\infty < t < \infty).$$

Amint a skaláris esetben is (feltételezve először $\lambda = 1$-et), alkalmazzuk a (10.11) egyenletre a *Fourier*-transzformációt, és azt kapjuk, hogy

$$[\mathscr{K}(\xi) - 1]\mathscr{G}(\xi) = \mathscr{F}(\xi), \quad (-\infty < \xi < \infty), \tag{10.12}$$

ahol

$$\mathscr{K}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{i\xi t}\,dt = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} k_{je}(t)e^{i\xi t}\,dt \right\|_1^n \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

matrix-függvény, a $\mathscr{G}(\xi)$ és $\mathscr{F}(\xi)$ pedig vektor-függvények:

$$\mathscr{G}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i\xi t}\,dt, \quad \mathscr{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\xi t}\,dt.$$

Ha $\det(\mathscr{K}(\xi) - I_n) \neq 0$, akkor, használva WIENER említett tételét, azt állíthatjuk, hogy létezik olyan

$$q(t) = \|q_{je}(t)\|_1^n \quad (-\infty < t < \infty)$$

matrix, hogy

$$(\mathscr{K}(\xi) - I_n)^{-1} = \mathscr{Q}(\xi) - I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} q(t)\,dt \quad (-\infty < \xi < \infty),$$

akkor pedig a (10.12)-ből azt kapjuk, hogy

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t-s)f(s)\,ds - f(t) \quad (-\infty < t < \infty).$$

K-n most a $\overset{n}{\mathfrak{C}}$-ben definiált olyan korlátos operátort értve, amelyet a

$$Kg = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)g(s)\,ds$$

egyenlőség határoz meg, nem nehéz arra bebizonyítani az 1°-el analóg állítást.

1′. A K operátor spektruma egybeesik az összes olyan pontok halmazával, amelyekre

$$\Delta(\xi;\lambda) = \det\left(\mathcal{K}(\xi) - \lambda I_n\right) = 0$$

valamely ξ $(-\infty \leqq \xi < \infty)$ esetén.

A K operátorra érvényes marad az ugyanolyan okoskodással bizonyított 2° állítás.

Legyen $\overset{n}{\mathfrak{C}}_+$ az n-dimenziós olyan $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ függvények tere, amelyek komponensei a $\mathfrak{C}_+$-ból valók. Az előbbieknek megfelelően K_{11}-el jelölve a

$$K_{11}g = \int_{0}^{\infty} k(t-s)g(s)\,ds$$

operátort, ahol $g \in \overset{n}{\mathfrak{C}}_+$, az $n=1$ esetben felhasznált fejtegetésekhez teljesen hasonlóan be lehet látni a következő állítás részét.

10.1. Tétel. *Legyen* $\lambda(\neq 0)$ *a komplex sík olyan pontja, hogy*

$$\Delta(\xi;\lambda) \neq 0 \quad (-\infty < \xi < \infty). \tag{10.13}$$

Akkor λ *a* K_{11} *operátor* Φ*-pontja és indexe kiszámítható a*

$$\varkappa_{K_{11}}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\xi \arg \Delta(\xi;\lambda) \tag{10.14}$$

képlettel.

Az utóbbi állítás a következő módon bizonyítható be.

Abban az esetben, ha $\mathcal{K}(\xi)$ egy olyan matrix, amelynek elemei a ξ racionális függvényei, a képlet ellenőrizhető a

$$\int_{0}^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\,ds - \lambda\varphi(t) = 0, \tag{10.15}$$

$$\int_{0}^{\infty} \psi'(s)k(s-t)\,ds - \lambda\psi'(t) = 0^{15} \quad (0 \leqq t < \infty) \tag{10.16}$$

homogén egyenletek lehető megoldásainak közvetlen kiszámításával.

[15] A $\psi(t)$ vektort mi úgy képzeljük el, mint egy olyan matrixot, amely egy oszlopból áll; $\psi'(t)$-vel ugyanazt a vektort jelöljük, de amelyet olyan matrix ábrázol, amely egy sorból áll.

Mivel a $k(t)$ matrix elemei az $L_1(-\infty, \infty)$ tér normájában tetszőleges pontossággal approximálhatók ezen tér olyan elemeivel, amelyek *Fourier*-transzformáltjai racionális függvények, így, felhasználva az index stabilitásáról szóló 2.4. tételt, könnyen beláthatjuk a (10.14) képlet igaz voltát általános esetben is.

A 10.1. tétel azt jelenti, hogy a (10.13) feltétel teljesülése mellett a (10.15), (10.16) egyenletek mindegyikének véges számú lineárisan független megoldása lesz a $\overset{n}{\mathfrak{C}}_+$-ben, és úgyszintén az $\overset{n}{\mathfrak{M}}_+$ konjugált térben, amely a mérhető korlátos komponensű összes n-dimenziós vektor-függvényekből áll a $(0,\infty)$ intervallumban. A (10.14) képlettel kapott $\varkappa(\lambda)$ index a $\beta_{K_{11}}(\lambda)-\alpha_{K_{11}}(\lambda)$ különbséget adja, ahol $\alpha_{K_{11}}(\lambda)$ a (10.15) egyenlet lineárisan független megoldásainak a száma a $\overset{n}{\mathfrak{C}}_+$ térben, a $\beta_{K_{11}}(\lambda)$ pedig a (10.16) egyenlet lineárisan független megoldásainak a száma az $\overset{n}{\mathfrak{M}}_+$ térben.

Viszont, mint a skaláris esetben, egy sor pótlólagos okoskodás segítségével meg lehet győződni arról, hogy a (10.15) és (10.16) egyenleteknek a $\overset{n}{\mathfrak{C}}_+$ és $\overset{n}{\mathfrak{M}}_+$ osztályokban ugyanazok a megoldásai.

Az inhomogén $\int\limits_0^\infty k(t-s)g(s)ds-\lambda g(t)=f(t)$ $(f\in\overset{n}{\mathfrak{C}}_+)$ egyenletnek lesz megoldása $\overset{n}{\mathfrak{C}}_+$-ben akkor és csakis akkor, ha $\int\limits_0^\infty \psi'(s)f(s)ds=0$, ahol ψ a (10.16) egyenlet tetszőleges korlátos megoldása, miközben

$$\psi'(s)f(s) = \sum_{j=1}^{n} f_j(s)\varphi_j(s).$$

A (10.16) egyenlet vonatkozásában a 10.1 megjegyzéssel analóg megjegyzés tehető $n=1$ esetére.

A (10.17)-re vonatkozó további részleteket l. a [46]-ban.

Kiegészítő megjegyzések és irodalmi utalások

1. §. Két altér *nyílásának* a fogalmát a [19] vezeti be. Ebből a cikkből vettük át a 1.1. tételt. Megjegyezzük, hogy az 1.1. tétel bizonyításában használt K. Borszuk tétel ekvivalens L. A. Lusztérnyik és Z. G. Snirelman a projektív terek kategóriájáról szóló tételének bizonyításában a fő lemmával [47]. Ezen lemma elemi bizonyítását adják M. A. Krasznoszelszkij és Sz. G. Krejn [48]. K. Borszuk tételének részletes leírást l. [49]-ben.

2. §. a) *A normális feloldhatóságnak* fogalmát a korlátos operátorokra F. Hausdorff a [38] cikkben vezette be, ugyanott mutat rá az operátoroknak a normális feloldhatósággal ekvivalens különböző tulajdonságaira. (l. úgyszintén a [28]-at).

b) A 2.1. lemmát *Hilbert*-terekre J. M. Glazman [50] bizonyította be. Ennek általánosítását *Banach*-terekre a [18] cikk adja.

c) Az ismert típusú szinguláris integrál egyenletekre vonatkozó 2.1. tétel közvetlen következménye volt F. Noether analitikus képletének az indexről (l. [6]).

A 2.1. tételt *Banach*-térbeli korlátos operátorokra először F. V. ATKINSZON [12] bizonyította be. A tételnek más, sokkal áttetszőbb bizonyítását, amely egyben annak általánosítását is lehetővé teszi a nem korlátos operátorok esetére, a [18]-ban találjuk. Ezt a bizonyítást itt ismertettük.

d) A Φ-operátoroknak véges dimenziós bővítéséről szóló 2.2. lemmát a [16] adja.

e) A *Hilbert*-térben definiált korlátos operátorokról szóló 2.3. tételt, és feltételeinek olyannal való felcserélhetőségét, hogy β_A véges és az A operátor regularizálható, Sz. G. MIHLIN bizonyította [8]. Később a [13]-ban tisztázódott, hogy ezek a feltételek ekvivalensek az A operátor normális feloldhatóságával és d-karakterisztikájának végességével.

A *Banach*-térben definiált korlátos operátorokról szóló 2.3. tételt először J. V. ATKINSZON bizonyította be [12] dolgozatában, amely nagy késéssel jelent meg (bemutatva 1948. IX. 2. és publikálva 1951-ben). Ezzel egyidőben jelent meg J. C. GOHBERG dolgozata (bemutatta 1950. XII. 4), amelyben szintén szerepel a 2.3. tétel.

Nem korlátos operátorok esetében a bázissal rendelkező terekben ezt a tételt bebizonyították a [16] dolgozatban, általános esetben pedig egymástól függetlenül a [18] és [17]-ben, mégpedig utóbbiban a tétel további általánosítása található (l. lejjebb a *f)*-et).

f) A 2.4. tételt nem korlátos operátorokra a (2.7) egyenlőtlenség nélkül először J. V. ATKINSZON bizonyította be már említett [12] dolgozatában. Tőle függetlenül J. C. GOHBERG [15] dolgozatában kevésbé általános megfogalmazásban ismerteti a tételt (bár a bizonyításból következik a tétel az F. V. ATKINSZON-féle megfogalmazásban is). A (2.7) egyenlőtlenség a tételnek a nemkorlátos operátorokra való általánosításával együtt M. G. KREJN és M. A. KRASZNOSZELSZKIJ [16] nevéhez fűződik. A (2.7) egyenlőtlenség bizonyítását a [16] dolgozatból vettük át.

g) Amint már megjegyeztük, a 2. § 5. pontban leírt egyszerű fogás, amely lehetővé tette a 2.3, és 2.4. tételek általánosítását nem korlátos A operátor A-korlátos vagy A-teljesen folytonos operátorral való perturbációjának az esetére SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA [21] érdeme.

3. §. a) A 3.2. tétel valószínűleg új.

b) A 3.3. tételt korlátos operátorokra és azon feltételezésben, hogy a tekintett G komponensben létezik legalább egy reguláris pont, Sz. M. NIKOLSZKIJ [10] fedezte fel. Általános esetben korlátos operátorokra a tétel a [18]-ban található. Utóbbi dolgozatban megtalálható úgyszintén a 3.5. tétel és a 3.6. tétel korlátos operátorokra.

c) A 3.7. tételt abban a speciális esetben, amikor az A_λ a λ polinomja és legalább egy λ értékre az A_λ operátor invertálható, az [51] és [17] dolgozatokban bizonyították. Erre a speciális esetre a tételt korábban, mellesleg, a [26] dolgozatban mutattak ki.

4. §. a) A 4.2. tétel korlátos operátorok esetében implicite benne van Sz. M. NIKOLSZKIJ [10] dolgozatában. Az itt ismertetetthez közeli megfogalmazásban a tételt M. A. GOLDMAN és Sz. N. KRACSKOVSZKIJ [22] bizonyították. A tétel további általánosítást nyert a [23], [24], [25], [45], [52], [53] dolgozatokban.

b) A 4.3. tételt, valószínűen itt fogalmaztuk meg először, bár az egyszerű következménye az 1.2. és 4.1. tételeknek. Az 1.2. tétel segítségével SZŐKEFALVI-NAGY B. korábban a [21] dolgozatban a 4.3. tétellel rokon állításokat talált a $\mathfrak{B}$ *Banach*-

térben definiált lineáris zárt A_0 operátor olyan perturbációjáról, amelyek mellett az átmegy

$$A_\varepsilon x = A_0 x + \varepsilon A_1 x + \varepsilon^2 A_2 x + \ldots + \varepsilon^n A_n x + \ldots \tag{1}$$

alakú A_ε operátorba, ahol az $A_n (n=1, 2, \ldots)$ lineáris A_0-korlátos operátorok, az ε pedig egy szám, mégpedig az (1) sor konvergens minden $x \in \mathfrak{D}_{A_0}$-ra valamely $|\varepsilon| < r$ körben.

5. §. a) Az 5.1. tétel valószínűen új. Abban a speciális esetben, amikor a H operátor korlátos, B pedig teljesen folytonos, ezt a tételt M. Sz. Brodszkij bizonyította be 1954-ben (aki azonban nem publikálta azt), és szűkebb megfogalmazásban ugyanabban az időben J. L. Smulján [54] is bebizonyította. Az 5.1. tétel lehetővé teszi J. M. Gelfand [32] egy eredményének a pontosítását és általánosítását.

b) Lehetséges, hogy az 5.2. és 5.4. tételek újak.

6. §. Ezt a paragrafust teljes egészében M. G. Krejn, M. A. Krasznoszelszkij és D. P. Milman [19] dolgozatából vettük át.

7. §. Ennek a paragrafusnak minden eredményét, kivéve az [52]-ből vett 7.3. lemmát, először publikáljuk. A paragrafus eredményeinek vannak bizonyos érintkezési pontjai F. V. Atkinszon [55] dolgozatának eredményeivel.

8. §. A 8.2. tételt korlátos operátorokra Sz. N. Kracskovszkij bizonyította a [25]-ben, a *Hilbert*-tér zárt operátoraira pedig az [52]-ben. Az itt alkalmazott bizonyítási módszerek sokkal egyszerűbbek és világosabbak, mint a [25], [52]-ben alkalmazottak. Ennek a tételnek a továbbfejlesztését l. [45]-ben. A paragrafus végén tett megjegyzést illetően l. a [25], [45], [56], [57]-et.

9. §. a) A $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-tér és zárt operátor speciális esetére a 9.2. tételt M. A. Krasznoszelszkij [58] bizonyította be. Azután az [59] dolgozatban egyszerű bizonyítást kapunk a tételre *Hilbert*-térben értelmezett tetszőleges lineáris operátor esetében.

Banach-terekben 9.2. tétel bizonyítását a [19] adja.

b) A 9.3. tételt (abban a feltételezésben, hogy a H *Hermite*-féle operátor értelmezési tartománya sűrű), M. A. Najmark [60] vette észre.

c) A 9.4. tétel, valószínűleg új.

10. §. a) Az 1. és 2. pontok eredményei benne vannak a [44] cikkben, azonban itt új megközelítésükkel van dolgunk.

b) A 3. pont eredményei újak. Azok további fejlesztése a [46]-ban található.

IRODALOM

[1] F. Noether, Ueber eine Klasse singulärer Integralgleichungen, *Math. Ann.* **82** (1921), 42—63.
[2] T. Carleman, *Sur les équations intégrales singuliéres á noyau réel symetrique*, Uppsala, 1923.
[3] J. von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.* **102** (1929), 49—131.
[4] T. Carleman, Sur la résolution de certaines équations intégrales, *Aktiv för matem., astr. et fysik* **16**, № 26 (1922).
[5] Ф. Д. Гахов, О краевой задаче Римана, *Матем. Сб.* **2** (44): 4 (1947), 673—683.

[6] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интергальные уравнения*, М.—Л., Гостехиздат, 1946.
[7] В. Д. Купрадзе, *Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения*, Гостехиздат, 1950.
[8] С. Г. Михлин, Сингулярные интегральные уравнения, *УМН* 111, вын. **3** (1948), 30—111.
[9] С. Г. Михлин, О разрешимости линейных уравнений в гильбертовом пространстве, *ДАН* **57**, № (1947), 11—12.
[10] С. М. Никольский, Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, *Изв. АН, сер. матем.* **7** № 3 (1943) 147—166.
[11] З. И. Халилов, Линейные сингулярные уравнения в нормированном кольце, *Изв. АН, серия матем.* **13**, № 2 (1949), 163—176.
[12] Ф. В. Аткинсон, Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, *Матем. сб.* **28** (70): **1** (1951), 3—14.
[13] И. Ц. Гохберг, О линейных уравнениях в пространстве Гильберта, *ДАН* **76**, № 1 (1951), 9—12.
[14] И. Ц. Гохберг, О линейных уравнениях в нормированных пространствах, *ДАН* **76**, № 4 (1951), 477—480.
[15] И. Ц. Гохберг, О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, *ДАН* **78**, № 4 (1951), 629—632.
[16] М. Г. Крейн и М. А. Красносельский, Устойчивость индекса неограниченного оператора, *Матем. сб.* **30** (72): 1 (1952), 219—224.
[17] B. Sz.-Nagy, On the stability of the index of unbounded linear transformations, *Acta Math. Sci. Hungaricae* **3**, 1—2 (1952), 49—52.
[18] И. Ц. Гохберг, Об индексе неограниченного оператора, *Матем. сб.* **33** (75): 1 (1953), 193—198.
[19] М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Д. П. Мильман, О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах, *Сб. трудов ин-та матем. АН УССР*, № **11**, 97—112.
[20] B. Sz.-Nagy, Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, *Comm. Math. Helvetici* **19** (1947), 347—366.
[21] B. Sz.-Nagy, Perturbations des transformations linéaires fermées, *Acta Sci. Math.* **14**, 2 (1951), 125—137.
[22] М. А. Гольдман, С. Н. Крачковский, О нуль-элементах линейного оператора в его области фредгольма, *ДАН* **86**, № 1 (1952).
[23] С. Н. Крачковский, Каноническое представление нуль-элементов линейного оператора в его области фредгольма, *ДАН* **88**, № **2** (1953).
[24] С. Н. Крачковский, О свойствах линейного оператора, связанных с его обобщенной областью фредгольма, *ДАН* **91**, № **5** (1953).
[25] С. Н. Крачковский, О расширенной области сингулярности оператора $T_\lambda = E - \lambda A$, *ДАН* **96**, № **6** (1954).
[26] М. В. Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов самосопряженных уравнений, *ДАН* **77**, № 1 (1951), 11—14.
[27] М. С. Лившиц, О спектральном разложении линейных самосопряженных операторов, *Матем. сб.* **34** (76): 1 (1954), 145—199.
[28] С. Банах, *Курс функціонального аналізу*, Київ, 1948.
[29] K. Borsuk, Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphär, *Fundamenta Math.* **20** (1933).
[30] Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, М.—Л. Гостехиздат, 1950.
[31] И. М. Рапопорт, Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, *ДАН* **59**, № 8 (1948), 1403—1406.
[32] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, *УМН* **1**, выл **2** (1946), 48—146.
[33] Ф. Рисс и Б. С.—Надь, *Лекции по функциональному анализу*, М., ИЛ, 1954.
[34] Ф. Рисс, О линейных функциональных уравнениях, *УМН*, вып. **1** (1936), 175—199.
[35] М. А. Наймарк, О некоторых признаках плотноты системы собственных и присоединенных векторов линейного оператора в гильбертовом пространстве, *ДАН* **98**, № 5 (1954), 727—730.
[36] Б. Р. Мукминов, О разложении по собственным функциям диссипативных ядер, *ДАН* **99**, № 4, 499—502.

[37] M. KREIN, V. SMULIAN, On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space, *Ann. of Math.* **41**, № 3 (1930), 556—583.
[38] Ф. Хаусдорф, *Теория множеств*, (Дополнение), М.—Л., ОНТИ, 1936.
[39] М. А. Гольдман, Об устойчивости свойства нормальной разрешимости линейных уравнений, *ДАН* **100**, № 2 (1955).
[40] М. А. Наймарк, Спектральные функции симметрического оператора, *Изв. АН. серия матем.* **4**, № 13 (1940), 277—318.
[41] М. А. Наймарк, О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора, *Ив. АН, серия матем.* **4**, № 1 (1940), 53—104.
[42] М. А. Красносельский, О самосопряженных расширения эрмитовых операторов, *Украинск. матем. журнал* **1**, № 1 (1949), 21—38.
[43] М. Г. Крейн, Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, *Матем. сб.* **20** (62): 3 (1947).
[44] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, *УМН* (печатается).
[45] И. Ц. Гохберг, Некоторые свойства нормально разрешимых операторов, *ДАН* **104**, № 1 (1955), 9—12.
[46] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, О некоторых основных положениях теории систем интегральных уравнений на полуоси с ядрами, зависящими от разности аргументов, *Труды* III. *всесоюзного математического сьезда*, **2** (1956), 37—38.
[47] Л. А. Люстреник, Л. Г. Шнирельман, *Топологические методы в вариационных задачах*, М.—Л., ОНТИ, 1930.
[48] М. А. Красносельский и С. Г. Крейн, Об одном доказательстве теоремы о категории проективного пространства, *Украинск. матем. журнал* **1**, № 2 (1949).
[49] М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Гостехиздат, 1956.
[50] И. М. Глазман, К теории сингулярных дифференциальных операторов, *УМН* **V**, вып. 6 (1950), 102—135.
[51] F. ATKINSON, A spectral problem for completely continuons operators, *Acta Math. Sci. Hungaricae* **3**, 1—2 (1952), 53—60.
[52] И. Ц. Гохберг, О нулях и нуль-элементах неограниченных операторов, *ДАН* **101**, № 1 (1955), 9—12.
[53] А. С. Маркус, Об одной теореме Ф. Рисса, *Учен. зап. Кишиневск. гос. университета* **17** (физико-матем.) (1955), 73—76.
[54] Ю. Л. Шмульян, Вполне непрерывные возмущения операторов, *ДАН* **101**, № 1 (1955), 35—38.
[55] F. ATKINSON, On relatively regular operators. *Acta Sci. Math.* **15**, 1 (1953), 38—56.
[56] И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус, Об одном характеристическом свойстве ядра линейного оператора, *ДАН* **105**, № 5 (1955), 893—896.
[57] А. С. Маркус, О характеристическом свойстве ядра линейного оператора, *ДАН* **105**, № 6 (1955), 1144—1146.
[58] М. А. Красносельский, О дефектных числах замкнутого оператора, *ДАН* **56**, № 6 (1947), 559—561.
[59] М. Г. Крейн и М. А. Красносельский, Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов, *УМН* **11**, вып. 3 (19) (1947), 597—626.
[60] М. А. Наймарк, Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов, *ДАН* **82**, № 4 (1952), 517—520.
[61] И. М. Гельфанд, О спектре самосопряженных дифференциальных операторов, *УМН* **VII**, вып. 6 (1952), 183—184.
[62] И, Ц. Гохберг, О границах применимости теории Ф. Нетера, *Учен. зап. Кишиневск. гос. УНИ верситета* **17** (физико—матема) (1955), 35—44.
[63] М. Г. Крейн, О формуле следов в теории возмущений, *Матем. сб.* **33** (75): 3 (1953), 597—626.
[64] B. SZ.-NAGY, On a spectral problem of Atkinson, *Acta Math. Sci. Hungaricae* **3**, 1—2 (1952), 62—66.

Fordította: Buzási Károly