ÜBER DAS ALGEBRAISCHE INTEGRAL DER MIKUSIŃSKISCHEN OPERATOREN

von

TAMÁS FÉNYES und PÁL KOSIK

Einführung

Die Verfasser beschäftigen sich in dieser Arbeit mit dem sogenannten algebraischen Integral der Mikusińskischen Operatoren. Sie setzten die Kenntnis der in [1] nidergelegten Grundlagen der Mikusińskischen Operatorenrechnung sowie der dort gebrauchten Bezeichnungen voraus; so werden hier diese nicht geschildert.

Wie bekannt, ist die MIKUSIŃSKIsche Definition der algebraischen Ableitung die folgende (Siehe [1]):

Ist $a = \{a(t)\} \in L$, so ist

$$Da = D\{a(t)\} = \{-ta(t)\} \tag{1}$$

und für beliebige Operatoren $x = \dfrac{\{b\}}{\{c\}}$, $b, c \in L$, $c \neq 0$

$$Dx = \frac{c\,D\,b - b\,D\,c}{c^2}, \tag{2}$$

hierbei bedeutet L die Menge der im Intervall $<0, \infty)$ lokal integrierbaren Funktionen. Es ist leicht ersichtlich, dass diese Definition korrekt ist, da einerseits die algebraische Ableitung des Operators x von seiner Herstellung $\dfrac{\{b\}}{\{c\}}$ unabhängig ist, andererseits, falls $x \in L$, so folgt aus (2) $Dx = \{-tx(t)\}$.

Die folgenden Eigenschaften der algebraischen Ableitungen sind leicht beweisbar:

Bezüglich der Operatoren x, y und der Zahlenoperatoren C_1, C_2 gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$D(c_1x + c_2y) = c_1Dx + c_2Dy\,, \quad Dxy = yDx + xDy\,,$$

$$D\frac{x}{y} = \frac{yDx - xDy}{y^2}\,, \qquad y \neq 0$$

MIKUSIŃSKI hat weiterhin in [1] gezeigt, dass die algebraische Ableitung eines beliebigen rationalen Ausdruckes von der Form

$$\frac{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_m s^m + \beta_{m-1}s^{m-1} + \ldots + \beta_0}$$

des s Differentiationsoperators durch formelle Differenzierung nach s bestimmt werden kann. Demgemäss wird das Symbol D der algebraischen Ableitung auch mit $\frac{d}{ds}$ bezeichnet. Die Verfasser gebrauchen in dieser Arbeit die Bezeichnung D, bzw. im Falle einer k-ten Ableitung, die Bezeichnung D^k $(k = 1, 2 \ldots)$.

In [2] weist MIKUSINSKI weitere wichtige Eigenschaften der algebraischen Ableitung nach. Es sei α eine beliebige Zahl, so ist

$$D\,\alpha = 0$$

und umgekehrt, besteht für irgendeinen Operator der Zusammenhang

$$Dx = 0,$$

so ist x eine beliebige Zahl. Ist weiterhin der Operator w ein Logarithmus (siehe [1]), d. h. wenn die Exponentialfunktion $e^{\lambda w}$ existiert, so besteht

$$De^w = Dw \cdot e^w. \tag{3}$$

Die Verfasser werden im weiteren von diesem wichtigen Zusammenhang Gebrauch machen.

Mit dem Problem der Inversen der algebraischen Ableitung hat sich als erster E. GESZTELYI [3] beschäftigt. In seiner Arbeit betrachtet er — nach Definition des algebraischen Integrals, und nach Untersuchung seiner elementaren Eigenschaften, — die Lösung von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit Polynom-koeffizienten mit Hilfe der Operatorenrechnung. Sein wesentliches Ergebnis besteht aus dem Beweis, dass jede stetige Funktion algebraisch integrierbar ist, und er gibt auch das Integral an. Die Verfasser beschäftigen sich in ihrer Arbeit eingehender mit dem Problem der algebraischen Integrierung. Die erhaltenen Ergebnisse sind allgemeiner, und die Beweise sind einfacher, als in [3].

Es wird beweisen, dass jede im Intervall $< 0, \infty)$ lokal integrierbare Funktion auch algebraisch integrierbar ist. Weiterhin wird die Bedingung angegeben, unter der das algebraische Integral einer lokal integrierbaren Funktion eine lokal integrierbare Funktion herstellt. Es wird die Frage der algebraischen Integrierung der auch im negativen Bereich definierten Funktionen untersucht. Im weiteren wird die algebraische Integrierung solcher spezieller Operatoren, die keine Funktionen sind, betrachtet. Die Arbeit schliesst mit Sätzen bezüglich unendlicher Reihen, bzw. mit dem sehr allgemeinen Satz über die algebraische Integrierung endlicher Distributionen.[1]

§. 1. Das algebraische Integral und seine Eigenschaften

Definition. Wenn zu einem Operator a ein solcher Operator b angegeben werden kann, dass

$$Db = a \tag{4}$$

so wird der Operator b das algebraische Integral des Operators a genannt, und mit

$$b = D^{-1}\,a \tag{5}$$

[1] Die Frage der algebraishen Integrierbarkeit eines beliebigen Operators ist zur Zeit noch nicht entschieden, jedoch ist bis jetzt kein Gegenbeispiel bekannt.

bezeichnet. In diesem Falle heisst der Operator a algebraisch integrierbar.

Im weiteren werden wir von zwei Sätzen aus [3] Gebrauch machen. Diese sind die folgenden:

1. Sind die Operatoren a und b algebraisch integrierbar, so ist der Operator

$$\lambda a + \mu b$$

ebenfalls algebraisch integrierbar, und

$$D^{-1}[\lambda a + \mu b] = \lambda D^{-1} a + \mu D^{-1} b$$

wobei λ und μ beliebige Zahlen sind.

2. Alle algebraischen Integrale eines Operators unterscheiden sich nur in beliebigen Zahlenoperatoren.

Nun beweisen wir den folgenden Satz:

Satz I. *Jede im Intervall $< 0, \infty)$ definierte, lokal integrierbare Funktion f ist gleichzeitig auch algebraisch integrierbar, und*

$$D^{-1} f = -s \left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} \, \mathrm{d}\tau \right\}, \tag{6}$$

wobei $t_0 > 0$, beliebig gewählt werden kann.

Beweis. Berechnen wir die algebraische Ableitung von (3). Die Regel bezüglich der algebraischen Differenzierung des Produktes benützend, erhalten wir

$$-Ds\left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} \, d\tau \right\} = \left\{ -\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} \, d\tau \right\} - sD\left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} \, d\tau \right\} =$$

$$= \left\{ -\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} \, d\tau \right\} + s\left\{ t\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} \, d\tau \right\} =$$

$$= \left\{ -\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} \, d\tau \right\} + \left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} \, d\tau \right\} + \left\{ f(t) \right\} = \left\{ f(t) \right\}. \text{[2]}$$

[2] Hierbei wurde die behannte operatorische Differentiationsregel für total stetige Funktionen

$$s\{F(t)\} = \{F'(t)\} + F(+0)$$

angewandt. Diese ist korrekt, da es leicht nachweisbar ist, dass die Funktion $\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} \, d\tau$ lokal integrierbar, $t \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} \, d\tau$ auch in der Umgebung von Null total stetig ist und

$$\lim_{t \to 0} t \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} \, d\tau = 0$$

für jede lokal integrierbare Funktion $f(t)$.

Aus (6) ist es ersichtlich, dass das algebraische Integral einer Funktion im allgemeinen keine Funktion, sondern ein Operator ist. Die Frage nach jenen lokal integrierbaren Funktionen, deren algebraisches Integral — von einer additiven Konstanten abgesehen — ebenfalls lokal integrierbar ist, kann leicht beantwortet werden. Diesbezüglich gilt der folgende:

Satz II. *Das algebraische Integral einer lokal integrierbaren Funktion $f(t)$ ist dann und nur dann eine lokal integrierbare Funktion, falls die Funktion $f(t)/t$ ebenfalls lokal integrierbar ist. In diesem Falle besteht*

$$D^{-1}f(t) = -\frac{f(t)}{t}. \tag{7}$$

Beweis. *a)* Die Bedingung ist notwendig. Ist $\frac{f(t)}{t}$ keine lokal integrierbare Funktion, so ist die Funktion

$$\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau$$

in (6) in der Umgebung von $t = 0$ nicht beschränkt, und durch (6) wird in diesem Falle keine Funktion hergestellt.

b) Die Bedingung ist hinreichend. Es sei $\frac{f(t)}{t}$ auch in der Umgebung von Null lokal integrierbar. In diesem Falle kann in Formel (6) $t_0 = 0$ gewählt werden, und es besteht

$$D^{-1}f = -s\left\{\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau\right\}.$$

Durch Wahl von $F(t) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau$ und durch Anwendung der Formel $s\{F(t)\} = \{F'(t)\} + F(+0)$ erhalten wir

$$D^{-1}f = -s\left\{\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau\right\} = -\frac{f(t)}{t} \quad \text{q.e.d.}$$

Folgerung 1. Ist $\frac{f(t)}{t^k}$ (k positiv, ganz) lokal integrierbar, so ist $f(t)$ mindestens k-mal algebraisch integrierbar, und das k-te algebraische Integral ist — abgesehen von einem beliebigen Polynom $(k-1)$-sten Grades in s — gleich

$$D^{-k}f = (-1)^k \left\{\frac{f(t)}{t^k}\right\}. \tag{8}$$

Folgerung 2. Ist die lokal integrierbare Funktion in einer beliebigen rechtsseitigen Umgebung des Nullpunktes gleich Null, so ist f beliebig oft algebraisch integrierbar, und das k-te algebraische Integral ist gleich

$$D^{-k} f = (-1)^k \left\{\frac{f(t)}{t^k}\right\}.$$

Die Sätze I und II sind allgemeiner, als die entsprechenden Sätze von [3], da dort die Berechtigung der algebraischen Integrierung nur für stetige Funktionen nachgewiesen ist, und als Bedingung der Herstellung der Funktion $\frac{f(t)}{t}$ durch das algebraische Integral wird die Existenz von $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t}$ angegeben.

Satz III. *Es existiert das algebraische Integral des Operators* $1/(s-\alpha)^p$, *wobei* α *beliebige komplexe, und* p *beliebige reelle Zahl ist. Weiterhin besteht*

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} D^{-1}\frac{1}{(s-\alpha)^p} &= \frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{(s-\alpha)^{p-1}}, && p \neq 1, \\ D^{-1}\frac{1}{s-\alpha} &= (\alpha - s)\,\{e^{\alpha t}\log t\}, && p = 1. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei zuerst $p = 1$. Da $\frac{1}{s-\alpha} = \{e^{\alpha t}\}$, erhalten wir durch Anwendung der Formel (6)

$$D^{-1}\left\{e^{\alpha t}\right\} = -s\left\{\int_{t_0}^{t}\frac{e^{\alpha\tau}}{\tau}\,d\tau\right\}.$$

Partielle Integration ergibt

$$-s\left\{\int_{t_0}^{t}\frac{e^{\alpha\tau}}{\tau}\,d\tau\right\} = -s e^{\alpha\tau}\log\tau\Big|_{t_0}^{t} + s\left\{\alpha\int_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau}\log\tau\,d\tau\right\} =$$

$$= -s\,\{e^{\alpha t}\log t - e^{\alpha t_0}\log t_0\} + \{\alpha\, e^{\alpha t}\log t\} - \alpha\left\{\int_0^{t_0} e^{\alpha\tau}\log\tau\,d\tau\right\}$$

d. h., von Konstanten abgesehen, ist

$$\text{(10)} \qquad D^{-1}\frac{1}{s-\alpha} = (\alpha - s)\,\{e^{\alpha t}\log t\}.$$

Es sei nun $p > 1$. Dann ist in (9)

$$\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{(s-\alpha)^{p-1}} = \frac{1}{1-p}\left\{\frac{e^{\alpha t}\,t^{p-2}}{\Gamma(p-1)}\right\}.$$

Durch algebraische Differentiation erhält man

$$\frac{1}{p-1}\left\{\frac{e^{\alpha t}\,t^{p-1}}{\Gamma(p-1)}\right\} = \left\{\frac{e^{\alpha t}\,t^{p-1}}{\Gamma(p)}\right\} = \frac{1}{(s-\alpha)^p}.$$

Damit ist der Satz auch für $p > 1$ bewiesen. Es sei schiesslich $p < 1$. Dann ist in (9)

$$\frac{1}{(1-p)(s-\alpha)^{p-1}} = \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{(s-\alpha)^{1-p}}\right]^{-1}.$$

Durch algebraische Differentiation, bezüglich der Brüche geltenden Regel entsprechend, und im Betracht ziehend, dass die Gültigkeit des Satzes für $p > 1$ bereits bewiesen ist, erhalten wir

$$D\left(\frac{1}{(1-p)(s-\alpha)^{p-1}}\right) = -\frac{1}{1-p}(s-\alpha)^{2-2p}(p-1)(s-\alpha)^{p-2} = \frac{1}{(s-\alpha)^p}.$$

Folgerung. Ist p nicht eine positive, ganze Zahl, so ist $\frac{1}{(s-\alpha)^p}$ sicherlich beliebig oft algebraisch integrierbar. Satz III wird ergänzt durch.

Satz IV. *Ist p eine positive, ganze Zahl, so ist $\frac{1}{(s-\alpha)^p}$ ebenfalls beliebig oft algebraisch integrierbar.*

Hierzu muss nur gezeigt werden, dass $\frac{1}{s-\alpha}$ beliebig oft algebraisch integrierbar ist.

Beweis. Auf Grund von (10) ist

$$D^{-1}\frac{1}{s-\alpha} = (\alpha - s)\{e^{at}\log t\}.$$

Nun berechnen wir das k-te algebraische Integral des Operators $(\alpha - s)\cdot$ $\cdot\{e^{at}\log t\}$ (k ist pozitiv und ganz): Das Prinzip der unbestimmten, partiellen Integrierung ist auch im Falle des algebraischen Integral gültig. Dies folgt unmittelbar aus der Definition des algebraischen Integrals einerseits, und aus der Regel bezüglich der algebraischen Integration der Produkte anderseits. Schreiben wir die partielle algebraische Integrationsregel, die wir auch später nach gebrauchen werden, nieder:

$$D^{-1}[uD^n v] = uD^{n-1}v - Du\,D^{n-2}v + \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1}vD^{n-1}u + (-1)^n D^{-1}[v\,D^n u], \qquad n = 1, 2 \dots,$$

hierbei wird vorausgesetzt, dass die Operatoren $uD^n v$, bzw. $vD^n u$ für die gegebenen Operatoren u und v algebraisch integrierbar sind. Die Regel auf $n = 1$ angewandt, und durch die Wahl von $Dv = \alpha - s$, $u = \{e^{at}\log t\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} D^{-1}[(\alpha - s)\{e^{at}\log t\}] &= \frac{-(s-\alpha)^2}{2}\{e^{at}\log t\} - \\ &- D^{-1}\left[\frac{(s-\alpha)^2}{2}\{t\,e^{at}\log t\}\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Formen wir nun — unter Berücksichtigung der operatorischen Differentiationsregel — die rechte Seite von (11) folgendermassen um:

$$D^{-1}\left[\frac{(s-a)^2}{2}\{te^{at}\log t\}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}D^{-1}\left[(s-a)\{e^{at}\log t + a\,te^{at}\log t + e^{at}\} - (s-a)\{a\,te^{at}\log t\}\right] =$$

$$(12) \qquad = \frac{1}{2}D^{-1}\left[(s-a)\{e^{at}\log t + e^{at}\}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}D^{-1}\left[(s-a)\{e^{at}\log t\}\right] + \frac{1}{2}D^{-1}\left[(s-a)e^{at}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[D^{-1}(s-a)\{e^{at}\log t\}\right] + \frac{s}{2}.$$

Durch Einsetzung von (12) in (9) erhalten wir:

$$(13) \qquad D^{-1}\left[(a-s)\{e^{at}\log t\}\right] = -(s-a)^2\{e^{at}\log t\} - s.$$

Offensichtlich kann die rechte Seite von (13) ebenfalls partiell integriert werden.

Wir erhalten — ohne Angabe der ausführlichen Berechnungen — durch k-fache partielle Integration

$$(14) \qquad D^{-k}\left[(a-s)\{e^{at}\log t\}\right] = -\frac{(s-a)^{k+1}}{k!}\{e^{at}\log t\} - \sum_{\mu=1}^{k}\frac{1}{\mu}\frac{(s-a)^k}{k!}$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Bemerkung. Aus Satz III., aus seiner Folgerung, sowie aus Satz IV folgt direkt, dass ein jeder beliebiger rationeller Ausdruck des Operators s

$$\frac{a_n s^n + \ldots + a_0}{b_m s^m + \ldots + b_0}$$

beliebig oft algebraisch integrierbar ist, da dieser als Summe eines Polynoms $P(s)$ und Glieder von der Form $\dfrac{c_k}{(s-a_k)^{p_k}}$ dargestellt werden kann.

Der folgende Satz ist die Verallgemeinerung eines Satzes von [3], der dort nur bezüglich stetiger Funktionen bewiesen ist.

Satz V. *Ist die lokal integrierbare Funktion f in einer beliebig kleinen, rechtsseitigen Umgebung des Nullpunkts k-mal stetig differenzierbar, so ist sie auch k-mal algebraisch integrierbar, und abgesehen von einem additiven Polynom $(\nu-1)$-sten Grades von s, besteht*

$$(15) \qquad D^{-\nu}f = \left\{\frac{f(t) - \sum\limits_{\varrho=0}^{\nu-1}\frac{t^\varrho}{\varrho!}f^{(\varrho)}(0)}{(-1)^\nu t^\nu}\right\} +$$

$$+ \sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\frac{(-1)^{\varrho+1}f^{(\varrho)}(0)}{\varrho!}\left[\frac{s^{\nu-\varrho}}{(\nu-\varrho-1)!}\{\log t\} + \sum_{\mu=1}^{M}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{s^{\nu-\varrho-1}}{(\nu-\varrho-1)!}\right],$$

$$\text{wobei } M = \begin{cases} \nu-\varrho-1, & \text{falls } \varrho < \nu-1, \\ 1, & \text{falls } \varrho = \nu-1. \end{cases}$$

Beweis. Schreiben wir die Funktion f in der Form

$$f = \left\{ f(t) - \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \frac{t^\varrho}{\varrho\,!} f^{(\varrho)}(0) \right\} + \left\{ \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} f^{(\varrho)}(0) \frac{t^\varrho}{\varrho\,!} \right\}. \tag{16}$$

Die Funktion

$$\frac{f(t) - \sum\limits_{\varrho=0}^{\nu-1} \frac{t^\varrho}{\varrho\,!} f^{(\varrho)}(0)}{t^\nu} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k$$

ist auf Grund unserer Bedingungen über $f(t)$ lokal integrierbar, da sie im $t = 0$ einen Grenzwert besitzt. Infolge der 1. Folgerung des Satzes II besteht

$$D^{-\nu} \left\{ f(t) - \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \frac{t^\varrho}{\varrho\,!} f^{(\varrho)}(0) \right\} = \left\{ \frac{f(t) - \sum\limits_{\varrho=0}^{\nu-1} \frac{t^\varrho}{\varrho\,!} f^{(\varrho)}(0)}{(-1)^\nu t^\nu} \right\}.$$

Das zweite Glied von (16) ist aber auf Grund der bisher Gesagten beliebig oft algebraisch integrierbar, und durch etwas Berechnung erhält man — mit Benützung der Formel (14) für $\alpha = 0$

$$D^{-\nu} \left\{ \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} f^{(\varrho)}(0) \frac{t^\varrho}{\varrho\,!} \right\} =$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^{\varrho+1} f^{(\varrho)}(0)}{\varrho\,!} \left[\frac{s^{\nu-\varrho}}{(\nu-\varrho-1)\,!} \{\log t\} + \sum_{\mu=1}^{\nu-\varrho-1} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{s^{\nu-\varrho-1}}{(\nu-\varrho-1)\,!} \right]. \qquad \text{q.e.d.}$$

§. 2. Algebraisch Integrale bezüglich des Verschiebungsoperators und der Funktionen der U-Klasse

Die folgende wichtige Eigenschaft des Mikusińskischen Verschiebungsoperators h ist wohlbekannt. Es sei f eine beliebige, im Intervall $<0, \infty)$ lokal integrierbare Funktion. Dann ist

$$h^\lambda f(t) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad t < \lambda\,, \\ f(t-\lambda), & \text{für} \quad t \geqq \lambda\,, \end{cases} \qquad \lambda \text{ reell.} \tag{17}$$

Aus Folgerung 2 des Satzes III folgt unmittelbar der folgende

Satz VI. *Ist $f \in L$, so ist*

$$F(t) = h^\lambda f(t) \quad \lambda > 0$$

beliebig oft algebraisch integrierbar, und das n-te algebraische Integral ist — von einem additiven Polynom $(n-1)$-sten Grades von s abgesehen — gleich

$$D^{-n} \{F(t)\} = (-1)^n \left\{ \frac{F(t)}{t^n} \right\}. \tag{18}$$

Die Funktion $F(t) = h^{-\lambda} f(t)$, $(\lambda > 0)$ gehört der U-Klasse an und ist lokal integrierbar (siehe [1]). Bis jetzt haben wir das algebraische Integral der Funktionen dieses Typs noch nicht betrachtet. Bevor wir überhaupt zur Betrachtung dieser Frage übergehen könnten, müssen wir uns mit dem Problem der algebraischen Differentiation von Funktionen der $\cup$-Klasse, also solcher Funktionen, die nur in einen endlichen Abschnitt der negativen Halbgeraden von Null verschiedene Werte annehmen, beschäftigen. Die Tatsache, dass jede Funktion der $\cup$-Klasse algebraisch differenzierbar ist, folgt sogleich aus Formel (2) der Einleitung. Es kann nämlich eine beliebige Funktion $f \in \cup$ durch entsprechend gewähltes $\lambda > 0$ als der Quotient zweier Funktionen aus L aufgeschrieben werden:

$$f = \frac{lh^\lambda f(t)}{lh^\lambda}, \qquad l = \frac{1}{s}.$$

Nun ist es nur fraglich, ob die in der Einleitung gegebene Definition aus [1] und [2] bezüglich der algebraischen Differentiation auch für Funktionen der $\cup$-Klasse richtig bleibt. Also muss gezeigt werden, dass

$$Df = D\frac{lh^\lambda f(t)}{lh^\lambda} = \{-tf(t)\} \in \cup . \tag{19}$$

Vorausgehend bemerken wir, dass

$$Dh^\lambda = De^{-\lambda s} = -\lambda e^{-\lambda s} = -\lambda h^\lambda, \quad \lambda \text{ reell.}$$

Nun ist, mit einem entsprechend gewählten $\lambda > 0$,

$$D\frac{lh^\lambda f}{lh^\lambda} = \frac{lh^\lambda Dlh^\lambda f - lh^\lambda f Dlh^\lambda}{l^2h^{2\lambda}} = \frac{Dlh^\lambda f - fDlh^\lambda}{lh^\lambda} =$$

$$= \frac{-t\int_0^t f(\tau-\lambda)\,d\tau + f(\lambda lh^\lambda + l^2h^\lambda)}{lh^\lambda} = sh^{-\lambda}\Big(-t\int_0^t f(\tau-\lambda)\,d\tau\Big) +$$

$$+ \lambda f + h^{-\lambda}\int_0^t f(\tau-\lambda)\,d\tau = -h^{-\lambda}\int_0^t f(\tau-\lambda)\,d\tau - h^{-\lambda}tf(t-\lambda) +$$

$$+ \lambda f + h^{-\lambda}\int_0^t f(\tau-\lambda)\,d\tau = -(t+\lambda)f(t) + \lambda f = -tf \in \cup .$$

Hiermit wurde (19) nachgewiesen, also ist auf Grund der oben gesagten Bemerkungen die Problemstellung bezüglich der algebraischen Integration von Funktionen der $\cup$-Klasse berechtigt.

Satz VII. *Jede, im Intervall* $<-\lambda, \infty)$, $\lambda > 0$ *definierte, lokal integrierbare Funktion* f *ist auch algebraisch integrierbar, und, von einer Konstanten abgesehen, besteht*

$$D^{-1}f = -sh^{-\lambda}\{F(t) - F(0)\}, \tag{20}$$

wobei $F(t) = \int \frac{f(t-\lambda)}{t-\lambda}\,dt \in L, \qquad \frac{f(t-\lambda)}{t-\lambda} = h^\lambda\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \in L.$

Der **Beweis** erfolgt analog zum Beweis des Satzes I:

$$- Dsh^{-\lambda}\{F(t) - F(0)\} =$$
$$= - h^{-\lambda}\{F(t) - F(0)\} - s\lambda h^{-\lambda}\{F(t) - F(0)\} + sh^{-\lambda}\{t[F(t) - F(0)]\} =$$
$$= - h^{-\lambda}\{F(t) - F(0)\} + sh^{-\lambda}\{(t-\lambda)[F(t) - F(0)]\} =$$
$$= - h^{-\lambda}\{F(t) - F(0)\} + h^{-\lambda}\{F(t) - F(0) + f(t-\lambda)\} =$$
$$= h^{-\lambda} f(t-\lambda) = f(t) \in \mathsf{U}\,.$$

Bemerkung 1. Die Formel (20) geht durch Einsetzung von $\lambda = 0$ nicht in die analoge Formel (6) von §. 1. bezüglich Funktionen, die im Intervall $< 0, \infty)$ definiert sind, über. Dort kann nämlich $t_0 > 0$ beliebig, jedoch im allgemeinen nicht gleich Null sein, da in (6) das Integral $\int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau$ möglicherweise überhaupt nicht existiert. Dagegen ist es in (20) wesentlich, dass die in den Klammern stehende Funktion im Nullpunkt verschwinde.

Bemerkung 2. Es ist leicht ersichtlich, dass ähnliche Sätze und Folgerungen wie Satz II, zusammen mit den Folgerungen 1. und 2., sowie Satz V, auch für die Funktionen der U-Klasse angegeben werden können.

Satz VIII. *Es seien p, λ reelle Zahlen und α eine beliebige komplexe Zahl, dann ist der Operator*

$$\frac{1}{(s-\alpha)^p}\, e^{-\lambda s} \tag{21}$$

algebraisch integrierbar.

Beweis:

I. Es sei zuerst $p > 0$.

Ist λ positiv, so folgt sogleich auf Grund von Satz VII, dass (21) beliebig oft algebraisch integrierbar ist, und, von einem additiven Polynom im s abgesehen,

$$D^{-k}\frac{1}{(s-\alpha)^p}\, e^{-\lambda s} = \begin{cases} 0\,, & \text{für } t < \lambda\,, \\ \dfrac{(-1)^k (t-\lambda)^{p-1} e^{\alpha(t-\lambda)}}{\Gamma(p)\, t^k}\,, & \text{für } t \geqq \lambda\,, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

Ist nun λ negativ, so gilt, dass die Funktion

$$\frac{1}{(s-\alpha)^p}\, e^{-\lambda s} = \begin{cases} 0\,, & \text{für } t < \lambda \\ \dfrac{(t-\lambda)^{p-1} e^{\alpha(t-\lambda)}}{\Gamma(p)}\,, & \text{für } t \geqq \lambda \end{cases}$$

in $t = 0$ im üblichen Sinne differenzierbar ist, und deshalb auf Grund der Bemerkung 2. des Satzes VII auch algebraisch integrierbar ist. Das algebraische Integral ist — von einer additiven Konstanten abgesehen — gleich

$$\left\{\frac{e^{-\alpha\lambda}(-\lambda)^{p-1} - e^{\alpha(t-\lambda)}(t-\lambda)^{p-1}}{\Gamma(p)\, t}\right\} - \frac{e^{-\alpha\lambda}(-\lambda)^{p-1}}{\Gamma(p)}\, s\left\{\log\left|\frac{t}{\lambda}\right|\right\}, \qquad t \geqq \lambda\,, \tag{23}$$

wovon man sich durch algebraische Differenzierung von (23) leicht überzeugen kann.

II. Es sei nun $p < 0$.

Ist α negativ und p ganz, so gebrauchen wir die Bezeichnung $p = -m$. Anwendung der partiellen algebraischen Integration mit $u = (s-\alpha)^m$, und $D^m v = e^{-\lambda s}$, ergibt durch einfache Berechnungen

$$D^{-1}(s-\alpha)^m e^{-\lambda s} = -e^{-\lambda s}\sum_{k=1}^{m}\frac{m!\,(s-\alpha)^{m-k+1}}{(m+1-k)!\,\lambda^k} - \frac{m!}{\lambda^{m+1}}e^{-\lambda s}. \tag{24}$$

Da die rechte Seite von (24) wieder eine Summe von Gliedern der Form $(s-\alpha)^\nu e^{-\lambda s}$ ist, kann sie beliebig oft algebraisch integriert werden. — Ist nun das negative p keine ganze Zahl, so ergibt — mit der Bezeichnung $-p = m + \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$ m ganz — die wiederholte partielle algebraische Integration mit $u = (s-\alpha)^{m+\varepsilon}$, $D^{m+1} v = e^{-\lambda s}$ durch einfache Berechnungen

$$\begin{aligned} D^{-1}(s-\alpha)^{m+\varepsilon} e^{-\lambda s} &= -e^{-\lambda s}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(s-\alpha)^{m+\varepsilon+1-k}\,\Gamma(m+\varepsilon+1)}{\lambda^k\,\Gamma(m+2+\varepsilon-k)} + \\ &\quad + \frac{\Gamma(m+\varepsilon+1)}{\Gamma(\varepsilon)\,\lambda^{m+1}}\{F(t)\}, \end{aligned} \tag{25}$$

wo

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < \lambda, \\ \dfrac{e^{\alpha(t-\lambda)}(t-\lambda)^{-\varepsilon}}{-t\,\Gamma(1-\varepsilon)} & \text{für } t \geqq \lambda > 0. \end{cases} \tag{26}$$

(25) ist sogar beliebig oft algebraisch integrierbar, da (26) beliebig oft algebraisch integrierbar ist, und der Teil von (25), welcher keine Funktion enthält, nur aus der Summe von Gliedern der Form $(s-\alpha)^\nu e^{-\lambda s}$ besteht. Es ist bemerkenswert, dass die rechte Seite von (24) ein Operator ist, und keine Funktion enhält, dagegen (25) aus der Summe einer Funktion und eines Operators, der keine Funktion herstellt, besteht.

Schliesslich erhalten wir für negative Werte von λ, mit partieller algebraischer Integration,

$$\begin{aligned} D^{-1}(s-\alpha)^{m+\varepsilon} e^{-\lambda s} &= -e^{-\lambda s}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(s-\alpha)^{m+\varepsilon+1-k}\,\Gamma(m+\varepsilon+1)}{\lambda^k\,\Gamma(m+\varepsilon+2-k)} \\ &\quad + \frac{\Gamma(m+\varepsilon+1)}{\Gamma(\varepsilon)\,\lambda^{m+1}}\left\{\frac{e^{-\alpha\lambda}(-\lambda)^{-\varepsilon} - e^{\alpha(t-\lambda)}(t-\lambda)^{-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)\,t}\right\} - \\ &\quad - \frac{\Gamma(m+\varepsilon+1)\,e^{-\alpha\lambda}(-\lambda)^{-\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon)\,\lambda^{m+1}\,\Gamma(1-\varepsilon)}\,s\left\{\log\left|\frac{t}{\lambda}\right|\right\}, \qquad t \geqq \lambda < 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Bemerkung. Aus Satz VIII. folgt sofort, dass der Operator

$$R(s)e^{-\lambda s}$$

algebraisch integrierbar ist, wenn $R(s)$ ein rationaler Ausdruck in s ist.

§. 3. Zwei Sätze über unendliche Reihen. Das algebraische Integral endlicher Distributionen

Es gilt der folgende

Satz IX. *Jede im Sinne der Operatorenrechnung konvergente, unendliche Reihe ist beliebig oft, gliedweise algebraisch differenzierbar.*

Beweis. Im Falle einer gleichmässig konvergenten Funktionenreihe ist die Behauptung des Satzes trivial. Betrachten wir nun eine beliebige, im Sinne der Operatorenrechnung konvergente, unendliche Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = a \,. \tag{28}$$

Aus der Definition der operatorischen Konvergenz folgt die Existenz eines Operators q, für welches $a_n = qb_n$, wobei $b_n \in C$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_n = b$$

fast gleichmässig konvergiert. Berechnen wir nun die algebraische Ableitung von (28):

$$\begin{aligned} D\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= D\left(\sum_{n=1}^{\infty} qb_n\right) = D\left(q\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,Dq + qD\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n\,Dq + qDb_n) = \sum_{n=1}^{\infty} D(b_n\,q) = \sum_{n=1}^{\infty} Da_n = Da \,. \end{aligned} \tag{29}$$

Man kann also gliedweise differenzieren. Daraus folgt unmittelbar, dass (28) beliebig oft gliedweise algebraisch differenzierbar ist, da der Operator a beliebig oft algebraisch differenzierbar ist.

Aus Satz IX. folgt der nachstehende

Satz X. *Sind die Glieder einer im Sinne der Operatorenrechnung konvergenten unendlichen Reihe algebraisch integrierbar, und ist die durch gliedweise algebraische Integration erhaltene unendliche Reihe im Sinne der Operatorenrechnung konvergent, so ist der durch die ursprüngliche Reihe hergestellte Operator algebraisch integrierbar, und die letztere Reihe gibt eben ein solches algebraisches Integral an.*

Beweis. Es sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \tag{80}$$

die genannte konvergente Reihe, wo die a_n algebraisch integrierbar sind. Es sei

$$b_n = D^{-1}a_n \,,$$

und es existiere

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \,. \tag{31}$$

Berechnen wir auf Grund von Satz IX. die algebraische Ableitung von (31)

$$D\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} Db_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a = Db \qquad \text{q. e. d.}$$

Zum Schluss beweisen wir einen Satz über endliche Distributionen.

Satz XI. *Jede endliche Distribution ist beliebig oft algebraisch integrierbar.*

Unter einer endlichen Distribution verstehen wir Operatoren der Form $s^k f$. Hier ist $k = 0, 1, 2 \ldots$, und f eine im Intervall $< 0, \infty)$ definierte Funktion, welche ein Element des Mikusińskischen Quotientenkörpers ist.

Beweis. Wir zeigen, dass das algebraische Integral einer endlichen Distribution ebenfalls eine endliche Distribution ist. Daraus folgt auch, dass eine endliche Distribution beliebig oft algebraisch integrierbar ist.

$$D^{-1}(s^k f) = s^{k+1} u\,, \qquad u \in L\,. \tag{32}$$

Es muss nur gezeigt werden, dass die Funktion u ebenfalls ein Element des Quotientenkörpers ist. Durch algebraische Differentiation von (32) erhalten wir

$$s^k f = D(s^{k+1} u) = (k+1)s^k u - s^{k+1}\{tu(t)\}\,,$$

woraus

$$f = (k+1)\,u - s\{tu(t)\}\,,$$

und die Division durch s ergibt

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = (k+1)\int_0^t u\,d\tau - tu(t)\,,$$

hieraus ergibt sich durch Substitution von $v(t) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau$ die Differentialgleichung

$$tv'(t) - (k+1)\,v(t) = -\int_0^t f(\tau)\,d\,\tau\,. \tag{33}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung erhält man durch einfache Berechnungen:

$$v(t) = Ct^{k+1} + \frac{\int_0^t f(\tau)\,d\tau}{k+1} - \frac{t^{k+1}}{k+1}\int_\varepsilon^t \frac{f(\tau)\,d\,\tau}{\tau^{k+1}} \qquad (\varepsilon > 0). \tag{34}$$

(34) ist für $t > 0$ stetig differenzierbar, und es ist leicht ersichtlich, dass — unabhängig vom Wert der Konstanten C — $\lim_{t\to 0} v(t) = 0$ besteht. $v(t)$ ist im Intervall $< 0, \infty)$ total stetig, und seine Ableitung

$$u(t) = Ct^k - t^k \int_\varepsilon^t \frac{f(\tau)}{\tau^{k+1}}\,d\,\tau \tag{35}$$

ist lokal integrierbar. Das Auftreten der Konstanten C ist die Folge dessen, dass in (32) das algebraische Integral unbestimmt ist. Wird nämlich (35) in die rechte Seite von (32) eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} D^{-1}(s^k f) &= s^{k+1}\left\{Ct^k - t^k \int_\varepsilon^t \frac{f(\tau)}{\tau^{k+1}}\,d\,\tau\right\} = \\ &= -\,s^{k+1}\left\{t^k \int_\varepsilon^t \frac{f(\tau)}{\tau^{k+1}}\,d\tau\right\} + \gamma \end{aligned} \tag{36}$$

wobei γ wieder ein Zahlenoperator ist.

Bemerkung. Aus (36) ergibt sich für $k = 0$ (6). Wir sehen also, dass jede lokal integrierbare Funktion unendlich oft algebraisch integrierbar ist.[3]

(Eingegangen: 11. März, 1963)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Mikusiński, J.: *Operational Calculus*. Pergamon Press, London—New York—Paris—Los Angeles Panstwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa, 1959.

[2] Mikusiński, J.: "Remarks on the algebraic derivative in the operational calculus." *Studia Mathematica* **19** (1960) 187—192.

[3] Gesztelyi Ernő: „Polinomegyütthatós lineáris differenciálegyenletek megoldása a Mikusiński-féle operátorszámítás alkalmazásával." Egyetemi doktori disszertáció, Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen.

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ИНТЕГРАЛЕ ОПЕРАТОРОВ

T. FÉNYES P. KOSIK

Резюме

Авторы в настоящей работе занимались проблемой алгебраического интеграла операторов Mikusiński. Работа содержит в сушности обобщения одних теорем работы Gesztelyi [3]. Авторы, ограничиваясь на операторы специального вида, исчисляют их алгебраический интеграл. Они доказывают, что каждая локально интегрируемая функция, и даже каждая конечная дистрибуция, бесконечно раз интегрируема алгебраически.

[3] Der gegenwärtige Artikel war schon druckfertig, als den Verfassern bekannt wurde, dass Herr Ernő Gesztelyi den grössten Teil der in diesem Artikel vorkommenden Sätze in einem seiner im Druck noch nicht erschienenen Artikel ebenfalls bewiesen hat. In dem erwähnten Artikel wird ein Satz über die algebraische Intergierbarkeit von endlichen Distributionen bewiesen, der allgemeiner ist als unser Satz XI. Der Artikel von E. Gesztelyi enthält auch die Erweiterung der Operatorenrechnung auf Funktionen von der Gestalt $\frac{f(t)}{t^k}$, $f(t) \in C$ $k = 1, 2, \ldots$.