ÜBER DIE EINDEUTIGKEIT DER LÖSUNG DES HAMBURGER–STIELTJES-SCHEN MOMENTENPROBLEMS

von

GÉZA FREUD

§ 1. Einleitung

Es sei

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$$

eine Folge nichtnegativer Zahlen, für welche alle Determinanten

$$(1) \qquad |\mu_0|, \quad \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \ldots$$

positiv sind. Nach einem bekannten Satze von H. HAMBURGER [1] gibt es dann eine in $(-\infty, +\infty)$ definierte nicht abnehmende Funktion $\alpha(x)$, so dass

$$(2) \qquad \mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\alpha(x)$$

ist. Wir nennen zwei nicht abnehmende Funktionen $\alpha_1(x)$ und $\alpha_2(x)$ äquivalent, wenn es eine Konstante k gibt, so dass in allen Punkten x, in welchen $\alpha_1(x)$ und $\alpha_2(x)$ stetig sind, $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) + k$ ist. Äquivalente Funktionen erzeugen offenbar dieselbe Momentenfolge $\{\mu_n\}$. Wir normieren die Belegungsfunktionen durch die Vereinbarung $\alpha(-\infty) = 0$; dann nehmen äquivalente Belegungsfunktionen in Stetigkeitspunkten gleiche Werte an.

Wir sagen, die Lösung des Momentenproblems (2) ist eindeutig, falls aus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\alpha_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\alpha_2(x) = \mu_n$$

die Äquivalenz von $\sigma_1(x)$ und $\sigma_2(x)$ folgt. Ist

$$P(x) = \sum a_\nu x^\nu$$

ein beliebiges Polynom, dann ist der Wert

$$\mu(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \, d\alpha(x) = \sum a_\nu \mu_\nu$$

durch die Momentenfolge $\{\mu_\nu\}$ eindeutig bestimmt, hängt also nicht davon ab, welche Lösung $\alpha(x)$ des Momentenproblems (2) gewählt wurde.

Es sei ξ eine reelle Zahl, Π_ξ die Klasse der Polynome $P(x)$ mit reellen Koeffizienten, für welche $P(\xi) = 1$ ist, $\alpha(x)$ eine Lösung von (2), und

$$\lambda(\xi) = \inf_{P \in \Pi_\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)\, d\alpha(x)\,. \tag{3}$$

Der Wert von $\lambda(\xi)$ hängt laut voriger Bemerkung nur von der Momentenfolge $\{\mu_n\}$ ab und ist unabhängig davon, welche Lösung $\alpha(x)$ des Momentenproblems (2) in Formel (3) eingesetzt wurde. Dann gilt folgender

Satz. *Ist für einen einzigen Wert* ξ $\lambda(\xi) = 0$, *dann ist die Lösung des Momentenproblems (2) eindeutig. Ist umgekehrt die Lösung von (2) eindeutig, dann ist in jedem Punkte* ξ, *wo* $\alpha(x)$ *stetig ist (also für alle reellen Werte mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen)* $\lambda(\xi) = 0$ *gültig.*

Dieser Satz wurde zuerst von H. HAMBURGER [1] bewiesen; ein zweiter, recht bekannter Beweis dieses Satzes stammt von M. RIESZ [4]. Der Beweis von HAMBURGER ist auf eine umfangreiche Theorie der quadratischen Formen

$$\sum \mu_{i+j}\, x_i\, x_j$$

gebaut. Der Beweis von M. RIESZ ist direkt, aber keineswegs einfach.

Das Ziel vorliegender Arbeit ist, einen neuen Beweis dieses Satzes zu geben. Wir hoffen dabei, mit unseren Beweise auch den Inhalt des Satzes besser erklären zu können.

In § 2 und § 3 sind einige wohlbekannte Ergebnisse dargestellt, welche die Grundlage des Beweises bilden.

Der Beweis des Satzes (und auch die neue Idee, welche es vereinfacht) ist in § 4 enthalten.

§ 2. Die Markoff-Possesche Ungleichung

Es sei $\{p_n(x)\}$ die Folge der zur Belegungsfunktion $\alpha(x)$ gehörenden Polynome, d. h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x)\, p_m(x)\, d\alpha(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } n = m \\ 0 \text{ für } n \neq m \end{cases}$$

und $p_n(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades mit reellen Koefficienten. Für ein beliebiges reelles ξ betrachten wir das quasiorthogonale Polynom $\psi_n(x, \xi) = p_{n-1}(\xi)\, p_n(x) - p_n(\xi)\, p_{n-1}(x)$ (vgl. M. RIESZ [4]). Es ist bekannt, dass sämtliche Nullstellen

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n'}$$

von ψ_n als Funktion von x betrachtet reell und einfach sind; es ist also $n' = n$ für $p_{n-1}(\xi) \neq 0$ und $n' = n - 1$ für $p_{n-1}(\xi) = 0$.[1] Dabei ist ξ einer der Zahlen ξ_i. Für ein beliebiges Polynom höchstens $\nu = n + n' - 2$-ten Grades P_ν gilt die verallgemeinerte Gauss—Jacobische Quadraturformel

$$\int_{-\infty}^{-\infty} P_\nu(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n'} \lambda_{kn}\, P_\nu(\xi_k)\,;$$

[1] Es ist wohlhabenkannt, dass $p_n(x)$ und $p_{n-1}(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben.

die λ_{kn} sind die Christoffelschen Zahlen dieser Quadraturformel. Es sei nun $\xi_j = \xi$ und $\lambda_{jn} = \lambda_n(\xi)$. Es sei $\Pi_{n',\xi}$ die Klasse der Polynome höchstens n'-ten Grades $P_{n'}(x)$ mit $P_{n'}(\xi) = 1$. Dann ist aus der Quadraturformel leicht zu sehen, dass

$$\lambda_{in} = \min_{P \in \Pi_{n',\xi_i}} \int_{-\infty}^{\infty} P^2(x)\, d\alpha(x) \tag{4}$$

und

$$\lambda_n(\xi) = \min_{P \in \Pi_{n',\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} P^2(x)\, d\alpha(x)$$

ist. Es folgt weiter

$$\lambda(\xi) = \lim_{n \to \infty} \lambda_n(\xi)\,. \tag{5}$$

Folgender Hilfssatz ist eine von C. POSSE [3] herrührende Verallgemeinerung der Ungleichung von MARKOFF und STIELTJES:

Hilfssatz I. *Es sei $f(x)$ eine auf der reellen Zahlengerade definierte unbeschränkt differenzierbare Funktion, und*

$$f(x) \geqq 0, f'(x) \geqq 0, \ldots, f^{(n)}(x) \geqq 0, \ldots ;$$

dann ist

$$\sum_{i:\,\xi_i < \xi} \lambda_{in} f(\xi_i) \leqq \int_{-\infty}^{\xi} f(x)\, d\alpha(x) \leqq \sum_{i:\,\xi_i \leqq \xi} \lambda_{in} f(\xi_i)\,. \tag{6}$$

Der wichtigste Spezialfall dieser Ungleichung entsteht für $f(x) \equiv 1$:

$$\sum_{i:\,\xi_i < \xi} \lambda_{in} \leqq \alpha(\xi) \leqq \sum_{i:\,\xi_i \leqq \xi} \lambda_{in}\,. \tag{7}$$

Das ist die wohlbekannte MARKOFF—STIELTJESSCHE Ungleichung.

Die Grössen λ_{in}, $\lambda_n(\xi)$ und $\lambda(\xi)$ hängen nach Formeln (4) und (5) nur von der Momentenfolge $\{\mu_n\}$ ab, und sind von der Wahl der Lösung $\alpha(x)$ von (2) unabhängig.

§ 3. Beweis der Eideutigkeit der Lösung für ein endliches Intervall

Hilfssatz II. *Ist $\lambda(\xi) = 0$, dann sind die Werte $\alpha(\xi)$ sämtlicher Lösungen $\alpha(x)$ des Momentenproblems (2) einander gleich.*

Bemerkung. Es muss dann jede Lösung $\alpha(x)$ von (2) für $x = \xi$ stetig sein, denn an einer Sprungstelle ξ von $\alpha(x)$ könnte $\alpha(x)$ entgegen Hilfsatz II. jeden Wert zwischen $\alpha(\xi - 0)$ und $\alpha(\xi + 0)$ annehmen.

Beweis. Die Differenz der beiden äusseren Seiten der Ungleichung (7) ist gleich $\lambda_n(\xi) \to \lambda(\xi) = 0$; also haben sowohl die linke wie die rechte Seite einen Grenzwert für $n \to \infty$ und es ist

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i:\,\xi_i < \xi} \lambda_{in} = \alpha(\xi)\,.$$

Dieser Ausdruck hängt nur von $\{\mu_\nu\}$, aber nicht von der Wahl von $\alpha(x)$ ab, w. z. b. w.

Gibt es für eine Belegungsfunktion zwei endliche Werte a und b, so dass $\alpha(a) = \alpha(-\infty)$ und $\alpha(b) = \alpha(+\infty)$ ist, dann hängen die Stieltjeschen Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\alpha(x)$$

nur von den Werten von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ ab. Wir sagen dann, »die Belegungsfunktion $\alpha(x)$ erzeugt eine Belegung in $[a, b]$«, bzw., falls die Werte a und b selbst nicht wesentlich sind, »$\alpha(x)$ erzeugt eine endliche Belegung«.

Hilfssatz III. *Erzeugt $\alpha(x)$ eine endliche Belegung, dann ist die Lösung des entsprechenden Momentenproblems (2) bis auf Äquivalenz eindeutig.*

Dieser Hilfsatz ist eine triviale Konsequenz des Weierstrass-schen Approximationssatzes (vgl. etwa I. P. NATANSON [2]); es folgt aber auch sehr leicht aus Hilfssatz II:

Es erzeuge $\alpha(x)$ ein Belegung in $[a, b]$. Nach Hilfssatz II genügt es zu zeigen, dass in jedem Punkte ξ, wo $\alpha(x)$ stetig ist, $\lambda(\xi) = 0$ ist.

a) $\xi \notin [a, b]$: Es sei $\varphi_1(x)$ eine lineare Funktion mit $\varphi_1(\xi) = 1$ und $\max\limits_{x \in [a,b]} |\varphi_1(x)| < 1$. Dann ist nach (3)

$$\lambda(\xi) \leq \lim_{m \to \infty} \int_a^b \varphi_1^{2m}(x)\, d\alpha(x) = 0 .$$

b) $\xi \in [a, b]$ eine Stetigkeitstelle von $\alpha(x)$: Es sei $\varphi_2(x)$ ein Polynom, für welches $\varphi_2(\xi) = 1$ und $|\varphi_2(x)| < 1$ für $x \in [a, b] - \{\xi\}$ ist. Dann ist für jedes $\delta > 0$

$$\lambda(\xi) \leq \overline{\lim_{m\to\infty}} \int_a^b \varphi_2^{2m}(x)\, d\,\alpha(x) \leq \lim_{m\to\infty} \int_a^{\xi-\delta} \varphi_2^{2m}(x)\, d\alpha(x) +$$

$$+ \alpha(\xi + \delta) - \alpha(\xi - \delta) + \lim_{m\to\infty} \int_{\xi+\delta}^b \varphi_2^{2m}(x)\, d\alpha(x) = \alpha(\xi + \delta) - \alpha(\xi - \delta)$$

da $\max\limits_{x \in [a,b]-(\xi-\delta, \xi+\delta)} |\varphi(x)| < 1$ ist. Aus der Stetigkeit von $\alpha(x)$ für $x = \xi$ folgt weiter $\lambda(\xi) = 0$, w. z. b. w.

Nach Hilfssatz II sind allso sämtliche Lösungen des entsprechenden Momentenproblems (2) äquivalent, w. z. b. w.

§ 4. Beweis des Hauptsatzes

Es sei $\{\mu_n\}$ eine Folge, für welche die Determinanten (1) positiv sind, $\alpha(x)$ eine Lösung von (2), und an der Stelle ξ sei $\lambda(\xi) = 0$. Wir wenden Ungleichung (6) auf $f(x) = e^{qx}$, $q \geq 0$ an:

$$\sum_{i : \xi_i < \xi} \lambda_{in} e^{q\xi_i} \leq \int_{-\infty}^{\xi} e^{qx}\, d\alpha(x) \leq \sum_{i : \xi_i \leq \xi} \lambda_{in} e^{q\xi_i} .$$

Die Differenz der beiden äusseren Seiten ist $\lambda_n(\xi)\, e^{q\xi} \to 0$, also streben diese Ausdrücke gegen den von n unabhängigen Wert

$$\int_{-\infty}^{\xi} e^{qx}\, d\alpha(x) :$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i : \xi_i \leq \xi} \lambda_{in} e^{q\xi_i} = \int_{-\infty}^{\xi} e^{qx}\, d\alpha(x) = M_q .$$

Der Wert von M_q ist also durch die Momentenfolge $\{\mu_n\}$ allein mit Hilfe dieser Formel eindeutig bestimmt. Wir setzen $e^x = y$, $\alpha(x) = \beta(y)$; dann ist

$$M_q = \int_0^{e^\xi} y^q \, d\beta(y) \, ; \qquad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Nach Hilfssatz III bestimmt diese Gleichungsfolge die Belegungsfunktion $\beta(y)$ in $[0, e^\xi]$ bis auf Äquivalenz eindeutig; es ist also auch $\alpha(x) = \beta(e^x)$ für $-\infty < x < \xi$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Die Belegungsfunktion $\alpha^*(x) = \alpha(\infty) - \alpha(-x)$ hat die Momente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\alpha^*(x) = (-1)^n \mu_n$$

und es ist mit der Transformation $u = -x$

$$\lambda^*(-\xi) = \inf_{P \in \Pi_{-\xi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(n) \, d\alpha^*(n) =$$

$$= \inf_{P \in \Pi_\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x) \, d\alpha(x) = \lambda(\xi) = 0 \, .$$

Aus der letzten Überlegung ergibt sich also, dass $\alpha^*(x)$ in $(-\infty, -\xi)$ durch die Momentenfolge $\{\mu_n\}$ allein bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist, d. h. dass $\alpha(x)$ als Lösung von (2) auch für $\xi < x < \infty$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

Um die Eindeutigkeit, von $\alpha(x)$ einzusehen, bleibt noch übrig zu beachten, dass nach Hilfsatz II und Bemerkung dazu jede Lösung $\alpha(x)$ von (2) an der Stelle ξ stetig ist und den eindeutig bestimmten Wert

$$\alpha(\xi) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i : \xi_i \leq \xi} \lambda_{in}$$

annimt. Damit sind wir mit dem Beweise des ersten Teiles des Hauptzatses fertig.

Um den zweiten Teil des Satzes einzusehen, genügt folgendes zu zeigen:

Hilfssatz IV. *Ist $\lambda(\xi) \neq 0$, dann gibt es eine Lösung $\alpha^*(x)$ des Momentenproblems, so dass $x = \xi$ eine Sprungstelle von $\alpha^*(x)$ ist.*

Beweis. Es sei

$$\alpha_n^*(x) = \sum_{i : \xi_i < x} \lambda_{in} \, . \tag{8}$$

Ist $\alpha(x)$ eine beliebige Lösung von (2), dann gilt die Gauss—Jacobische Quadraturformel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \, d\alpha(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \, d\alpha_n^*(x) \, , \tag{9}$$

alls der Grad von $P(x)$ höchstens gleich $n + n' - 2$ ist. Nach dem Auswahlsatze von E. Helly, besitzt $\{\alpha_n^*(x)\}$ eine konvergente Teilfolge

$$\alpha_{n_k}^*(x) \to \alpha^*(x) \, ; \qquad -\infty < x < \infty$$

und infolge des Konvergenzsatzes von E. HELLY folgt aus (9) für beliebige Polynome $P(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, d\alpha^*(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, d\alpha^*_{n_k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, d\alpha(x)\,,$$

also auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, d\alpha^*(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, d\alpha(x) = \mu_n\,; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Es ist also $\alpha^*(x)$ tatsächlich eine Lösung des Momentenproblems (2).

Aus (8) folgt, dass $\alpha^*_n(\xi + 0) - \alpha^*_n(\xi - 0) = \lambda_n(\xi) \geqq \lambda(\xi)$ ist. Es muss dann wegen $\alpha^*_{n_k}(x) \to \alpha^*(x)$ auch $\alpha^*(\xi + 0) - \alpha^*(\xi - 0) \geqq \lambda(\xi)$ sein, w. z. b. w.

(Eingegangen: 13. November, 1963)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] HAMBURGER, H.: »Über eine Erweiterung des Stieltjes-schen Momentenproblems«. *Mathematische Annalen* **81** (1920) 235—319; **82** (1921) 120—164 und 168—187.
[2] NATANSON, I. P.: *Konstruktive Theorie der Funktionen*, Akademie Verl., Berlin,
[3] POSSÉ, C.: *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, St. Petersburg, 1886.
[4] RIESZ, M.: «Sur le problème des moments». *Arkiv för Matematik* **16** (12) (1921), **16** (19) (1922), **17** (16) (1923).

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

G. FREUD

Резюме

Из исследования H. HAMBURGER-а [1] и M. RIESZ-а [4] известна следующая теорема:

Пусть означает Π_ξ класс тех рациональных многочленов, для которых $P(\xi) = 1$, и пусть будет

$$\lambda(\xi) = \inf_{P\in\Pi_\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)\, d\alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ не убывающая функция, все моменты которой

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, d\alpha(x) \qquad n = 0, 1, \ldots$$

существуют. Если $\lambda(\xi) = 0$ для хотя бы одного вещественного ξ, тогда последовательность $\{\mu_n\}$ однозначно определяет $\alpha(x)$ в точках непрерывности, несмотря на аддитивную константу. Обратно, если $\{\mu_n\}$ однозначно определяет функцию $\alpha(x)$ несмотря на так получаемую эквиваленцию, тогда

для всех ξ, в которых $\alpha(x)$ непрерывна, мы имеем $\lambda(\xi) = 0$. В настоящей работе автор дает новое доказательство для этой теоремы.

Эскиз доказательства:

а) Если для некоторого ξ мы имеем $\lambda(\xi) = 0$, тогда последовательность $\{\mu_n\}$ определяет однозначно значение $\alpha(\xi) - \alpha(-\infty)$, принадлежащее этому ξ. Доказательство этого факта получается из обобщенного неравенства Маркова — Sieltjes-а (7) (как пердел выражений, участвующих в нем.) Числа ξ_i являются корнями квазиортогонального многочлена

$$p_{n-1}(\xi)\, p_n(x) - p_n(\xi)\, p_{n-1}(x)$$

и числа λ_{in} — числа Christoffel-а формулы квадратуры, принадлежащей базисным точкам ξ_i; все эти могут быть определены, если дана последовательность $\{\mu_n\}$.

б) Используя предыдущего результата легко получается известная теорема: если $\alpha(x)$ порождает конечное распределение (т. е. для некоторых чисел a, b мы имеем $\alpha(a) = \alpha(-\infty)$, $\alpha(b) = \alpha(+\infty)$, тогда $\alpha(\xi) - \alpha(-\infty)$ определяется однозначно во всех точках ξ непрерывности функций $\alpha(x)$.

в) Если в некоторой точке ξ мы имеем $\lambda(\xi) = 0$ тогда подставляя в неравенство Posse (6) $f(x) = e^{qx}$ интегралы

$$M_q = \int_{-\infty}^{\xi} e^{qx}\, d\alpha(x)\,; \qquad q = 0, 1, 2, \ldots$$

при данной последовательности $\{\mu_n\}$ определяемы однозначно.

г) Подставляя $e^x = y$, $\alpha(x) = \beta(y)$, на основании в)

$$M_q = \int_0^{e^\xi} y^q d\beta(y)\,, \qquad q = 0, 1, \ldots$$

Последовательность $\{M_q\}$, согласно результату б) определяет однозначно функцию $\beta(y) = \alpha(x)$.

д) Если $\alpha(\xi) = 0$, тогда рассмотрим сходящуюся подпоследовательность последовательности (8) (существующую согласно теореме Helly) которая сходится к $\alpha^*(x)$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, d\alpha^*(x) = \mu_n$$

и

$$\alpha^*(\xi + 0) - \alpha^*(\xi - 0) \geqq \lambda^*(\xi) > 0\,.$$