ELEMENTARE RELATIONEN BEZÜGLICH DER GLIEDER UND TRENNENDEN PUNKTE VON GRAPHEN

von

T. GALLAI

Wir betrachten den endlichen und zusammenhängenden Graphen G, von dem wir annehmen wollen, daß er aus mehreren Gliedern besteht, also G mindestens einen trennenden Punkt besitzt.[1] Es sollen die Glieder von G mit $G_1, \ldots, G_g$, die trennenden Punkte mit $a_1, \ldots, a_t$ bezeichnet werden. Ferner bezeichne g_i $(i = 1, \ldots, t)$ die Anzahl der mit a_i inzidenten Glieder und t_j $(j = 1, \ldots, g)$ die Anzahl der in G_j liegenden trennenden Punkte. Kürzlich hat HARARY eine Relation zwischen g, t und den g_i gefunden (s. 2], [4]). Man kann diese in der Form

$$g = 1 + \sum_{i=1}^{t} (g_i - 1) \tag{1}$$

schreiben. In dieser Note wollen wir nun mit Hilfe des zu G gehörigen *Gliedgraphen* (s. [1] S. 14–15) einen neuen Beweis von (1) mitteilen und die zu (1) duale Relation

$$t = 1 + \sum_{j=1}^{g} (t_j - 1) \tag{2}$$

ableiten.

Der zu dem Graphen G gehörige Gliedgraph G^* ist folgendermaßen erklärt (s. [1] S. 14): G^* ist ein paarer Graph, in dem die eine Klasse der Punkte aus den Gliedern $G_1, \ldots, G_g$ von G, die andere aus den trennenden Punkten $a_1, \ldots, a_t$ von G besteht.[2] G^* enthält nur solche Kanten, die zu verschiedenen Klassen gehörige Punkte verbinden, undzwar ist a_i mit G_j dann und nur dann in G^* verbunden, wenn in G der Punkt a_i in dem Glied G_j liegt. Laut dieser Definition ist in G^* der Grad des »Punktes« G_j gleich t_j und der Grad von a_i gleich g_i. Für die Anzahl k der Kanten von G^* gelten daher

$$k = \sum_{i=1}^{t} g_i \tag{3}$$

und

$$k = \sum_{j=1}^{g} t_j\,. \tag{4}$$

---

[1] Wir betrachten nur Graphen ohne Schlingen. Statt Knotenpunkten sagen wir kurz nur Punkte. Bezüglich der Definitionen der Begriffe »Glied« und »trennender Punkt« (Artikulation) s. [1], [2], [3], [4].

[2] Es ist also $\{G_1, \ldots, G_g, a_1, \ldots, a_t\}$ die Menge der Punkte von G^*.

Es ist ferner eine grundlegende Tatsache, daß G^* ein Baum ist (s. [1] S. 15). Daraus folgt die Gleichung

$$g + t = k + 1. \tag{5}$$

($g + t$ gibt die Anzahl der Punkte von G^* an). Ersetzt man nun in (5) den Wert k durch den Ausdruck (3) bzw. (4), so gelangt man zu (1) bzw. (2).

Bemerkungen. 1) Trivialerweise gelten (1) und (2) auch dann, wenn G aus einem einzigen Glied besteht.

2) Erklärt man die Begriffe »Glied« und »trennender Punkt« auch für nicht zusammenhängende Graphen (s. [1]), so können (1) und (2) auch auf solche Graphen verallgemeinert werden. Die entsprechenden Formeln erhält man aus (1) und (2) einfach dadurch, daß man das erste Glied auf der rechten Seite von (1) bzw. (2) durch die Anzahl der Komponenten von G ersetzt.

(Eingegangen: 30. Januar, 1964)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Gallai, T.: »Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken«, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **7** (1962) 3—36.
[2] Harary, F.: »An elementary theorem on graphs«, *Amer. Math. Monthly* **66** (1959) 405—407.
[3] Kőnig, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig, 1936.
[4] Ore, O.: »*Theory of graphs*«, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **38** (1962).

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ СОГЛАСНО ЧЛЕНАМ И РАЗЪЕДИНЯЮЩИМ ВЕРШИНАМ ГРАФОВ

T. GALLAI

Резюме

Пусть будут $G_1, \ldots, G_g$ члены конечного и связного графа, $a_1, \ldots, a_t$ — разъединяющие вершины этого графа, далее пусть означает $g_i (i = 1, \ldots, t)$ число членов, принадлежающих вершине a_i, а $t_j (j = 1, 2, \ldots, g)$ число разделяющих вершин, принадлежащих члену G_j.

При помощи *графа членов* принадлежающего графу G (см. [1]), доказываются соотношения

$$g = 1 + \sum_{i=1}^{t} (g_i - 1)$$

и ей двойственная формула

$$t = 1 + \sum_{j=1}^{g} (t_j - 1).$$