SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS DES SÉRIES DE FABER

par

LÁSZLÓ ALPÁR

§ 1. Introduction

Dans les notes [1] et [2] nous avons établi quelques propositions concernant le comportement de certaines séries de Taylor et de leurs transformées sur la frontière de leur cercle de convergence. La généralisation de ces résultats pour les séries de Faber fait l'objet de l'ouvrage présent.

1.1. Les théorèmes en question. — Soient ζ_0 $(0 < |\zeta_0| < 1)$ un point fixe du plan des z,

$$h_1(z) = \frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} \tag{1.1}$$

une transformation homographique, et

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.2}$$

une fonction régulière dans le cercle $|z| < 1$. Alors la fonction

$$f_1[h_1(z)] = f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z^n \tag{1.3}$$

est aussi régulière dans le cercle $|z| < 1$. Supposons de plus qu'il existe un point z' sur la circonférence $|z| = 1$ où $f_1(z)$ est encore définie et la série (1.2) converge. Soit z'' le point déterminé par l'équation $h_1(z'') = z'$, donc $|z''| = 1$. Il suit alors de (1.3) que $f_1(z') = f_2(z'')$. Cependant il reste à savoir si la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z'^n$ entraîne-t-elle la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z''^n$? Ce problème a été soulevé et résolu dans le sens négatif par P. TURÁN [9] qui a démontré l'existence des fonctions $f_1(z)$ telles que, malgré la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z'^n$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z''^n$ est divergente.

Nous avons généralisé le résultat de TURÁN dans notre travail [1]. En désignant par $\alpha_m^{(k)}$ la m-ième moyenne (C,k) de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z'^n$, par $\beta_m^{(k+\delta)}$ la m-ième moyenne $(C,k + \delta)$ de la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z''^n$, $k \geqq 0$, $\delta \geqq 0$, nous avons établi les deux propositions suivantes:

Théorème I. — *Si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z'^n$ *est sommable* (C, k), *alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z''^n$ *est sommable* $(C, k + {}^1/_2)$, *et*

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m^{(k)} = \lim_{m\to\infty} \beta_m^{(k+\frac{1}{2})} . \tag{1.4}$$

Théorème II. — *Soit* $0 \leqq \delta < {}^1/_2$ *un nombre donné. Il existe des fonctions* $f_1(z)$ *telles que, malgré la sommabilité* (C, k) *de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z'^n$, *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z''^n$ *n'est pas sommable* $(C, k + \delta)$.

Après l'étude de ces propriétes locales, nous avons examiné le comportement des séries (1.2) et (1.3) sur la circonférence $|z| = 1$ et nous avons obtenu les résultats suivants [2]:

Théorème III. — *Il existe des fonctions* $f_1(z)$ *telles que* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ *et, malgré cela,* $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n(\zeta_0)| = \infty$.

Théorème IV. — *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, *alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z^n$ *est uniformément convergente pour* $|z| = 1$; *si de plus* $z' = h_1(z'')$, $|z'| = |z''| = 1$, *alors*

$$f_1(z') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z'^n = f_2(z'') = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z''^n . \tag{1.5}$$

Corollaire. — *Si, en considérant la relation* (1,5), *on compare les théorèmes* III *et* IV, *on constate l'existence des couples de fonctions telles que* $f_1(z)$, $f_2(z)$ *qui admettent les mêmes valeurs dans la même succession lorsque* z' *et* z'' *parcourent la circonférence* $|z| = 1$, *pourtant* $f_1(z)$ *est représentée par une série de puissances absolument convergente pour* $|z| = 1$, *tandis que le développement Taylorien de* $f_2(z)$ *est seulement uniformément, mais non absolument convergente lorsque* $|z| = 1$.

Dès lors il se pose d'elle-même la question suivante: Peut-on faire dériver chaque série de puissances uniformément, mais non absolument convergente pour $|z| = 1$ à l'aide d'une transformation du type (1.1) à partir d'une série de puissances convenable, absolument convergente pour $|z| = 1$, si de plus ζ_0 a aussi une valeur appropriée? La réponse est négative. Étant donné que $h_1(z)$ et sa fonction inverse sont de la même structure, le problème peut être formulé encore de la manière suivante: Si la série (1.2) est uniformément, mais non absolument convergente pour $|z| = 1$, peut-on trouver toujours un nombre complexe ζ_0 $(0 < |\zeta_0| < 1)$ de sorte que la série (1.3) soit absolument convergente si $|z| = 1$? Il en répond la proposition ci-après.

Théorème V. — *Il existe des séries* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *uniformément, mais non absolument convergentes sur la circonférence* $|z| = 1$, *dont les transformées, les séries* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z^n$ *sont également uniformément, mais non absolument convergentes pour* $|z| = 1$, *quelle que soit la valeur de* ζ_0.[1]

[1] Ce théorème a été démontré par G. Piranian (cf. [2] pp. 289, 313—315).

Notons enfin que les théorèmes I—V subsistent même si la série (1.2) a un rayon de convergence $R \neq 1$ et, par suite, la transformation (1.1) est remplacée par la fonction

$$h_R(z) = e^{i\vartheta_0} \frac{R^2(z - \zeta_0)}{R^2 - \bar{\zeta}_0 z} \qquad (0 < |\zeta_0| < R) ,$$

où ϑ_0 est un angle constant.

1.2. Position du problème. — La généralisation des théorèmes énoncés peut se faire par des procédés différents. La fonction analytique envisagée peut être représentée non seulement par sa série de puissances, mais aussi par une autre sorte de série de fonctions convenables convergente dans un domaine plus général que le cercle, et la transformation $h_1(z)$ resp. $h_R(z)$ peut également prendre une forme moins spéciale.

Considérons, pour fixer les idées, dans le plan des z_1 des fonctions $F_1(z_1)$ holomorphes dans un domaine D_1 borné simplement connexe limité par une courbe C_1 fermée simple analytique et régulière; dans un tel domaine on peut représenter $F_1(z_1)$ par sa série de Faber associée à C_1 (cf. § 2). Or, s'il est tout indiqué de choisir pour la représentation de $F_1(z_1)$ la série de Faber, le choix d'une fonction adéquate qui pourrait jouer le rôle de $h_R(z)$ soulève déjà certaines questions.

Nous allons voir dans le § 3 qu'en remplaçant $h_R(z)$ par la fonction homographique

$$z_1 = h(z_2) = \frac{pz_2 + q}{z_2 - z_2^*} \tag{1.6}$$

non dégénérée ($pz_2^* + q \neq 0$) telle que z_2^* soit à l'extérieur de C_2 l'image de C_1 par $h(z_2)$ dans le plan des z_2, alors des propositions analogues aux théorèmes I—V sont valables pour les séries de Faber de $F_1(z_1)$ et de $F_2(z_2) = F_1[h(z_2)]$ lorsque $z_1 \in C_1$, $z_2 \in C_2$.

Dans le § 4 $h_R(z)$ sera remplacée par une fonction *non homographique* $z_1 = k_i(z_2)$ faisant la représentation conforme biunivoque de D_1, l'intérieur de C_1, sur D_2, l'intérieur de C_2 actuellement l'image de C_1 par $k_i(z_2)$. (Si C_1 et C_2 sont deux courbes analytiques régulières données à l'avance, il existe une infinité de fonctions $k_i(z_2)$ avec les propriétés signalées.) Nous allons montrer que dans ce cas il est impossible de déduire des théorèmes I—V les propriétés de la série de Faber de la fonction $F_2^{(i)}(z_2) = F_1[k_i(z_2)]$. Nous ne connaissons pas d'autres procédés appropriés non plus qui fourniraient les propositions correspondantes. Nous avons l'intention de revenir sur ce problème dans une note ultérieure.

Toutefois nous déterminerons à partir de $F_1(z_1)$ des fonctions $F_2^*(z_2)$ pour lesquelles nous établirons des propositions pareilles aux théorèmes I—V exceptées les relations (1.4) et (1.5) qui n'ont pas d'analogues. Nous y parviendrons en effectuant l'application conforme biunivoque de l'extérieur de C_1 sur celui de C_2 par la fonction *non homographique* $z_1 = k_e(z_2)$, C_2 étant maintenant l'image de C_1 par $k_e(z_2)$. [Si C_1 et C_2 sont déjà données, il existe une infinité de fonctions $k_e(z_2)$.] $F_1[k_e(z_2)]$ ne définit pas alors une fonction analytique dans tout le domaine intérieur à C_2, elle n'est donc pas développable en série de Faber relative à C_2. C'est pour cette raison que nous représentons

$F_2^*(z_2)$ par une intégrale. Il s'ensuit, en opposition avec les cas précédents, que la transformation qui fait correspondre C_1 à C_2 et celle qui change $F_1(z_1)$ en $F_2^*(z_2)$ sont différentes.

§ 2. Quelques propriétés des polynomes et des séries de Faber

Nous allons exposer, sans démonstration, certaines propriétés des polynomes et des séries de Faber que nous utiliserons par la suite. Ces résultats sont développés dans les travaux [3], [4], [5] de G. FABER, mais on les retrouve aussi dans les ouvrages plus récents comme p. e. ceux de L. ILIEFF [7], H. TIETZ [8], J. L. ULLMAN [10], [11].

2.1. Notations. — *a)* Le contour C considéré soit toujours simple, formé d'un seul arc analytique et régulier, avec l'intérieur $I(C)$, l'extérieur $E(C)$; $\bar{I}(C)$ et $\bar{E}(C)$ désignent les domaines correspondants fermés.

b) Il existe une fonction, et une seule, $w = \varphi(z)$ faisant la représentation conforme biunivoque de $\bar{E}(C)$ sur $\bar{E}(K_R)$, où K_R est la circonférence $|w| = R$, et qui, pour des $|z|$ assez élevés, peut être représentée sous la forme

$$w = \varphi(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots . \tag{2.1}$$

Les quantités R, a_0, $a_1, \dots$ sont uniques et déterminées par les propriétés de $\varphi(z)$.

c) Soit K_ϱ la circonférence $|w| = \varrho$ et C_ϱ son image par $\varphi(z)$ (lorsqu'elle existe). Nous écrirons donc aussi C_R au lieu de C.

d) Désignons par

$$z = \psi(w) = w + \beta_0 + \frac{\beta_1}{w} + \frac{\beta_2}{w^2} + \dots \tag{2.2}$$

la fonction inverse de $\varphi(z)$. La série (2.2) converge pour $|w| > r$ et $w \neq \infty$, avec un $r < R$. En effet, C_R étant analytique et régulière $\psi(w)$ est holomorphe non seulement dans $E(K_R)$ mais elle est prolongeable au delà de K_R dans $I(K_R)$. Il existe donc un nombre $r < R$ telle que (2.2) converge dans $E(K_r)$. Par conséquent $C_r \subset I(C_R)$ et $\varphi(z)$ est holomorphe dans $E(C_r)$.

2.2. Définition des polynomes de Faber. — Supposons que $|z|$ est suffisamment grand pour que $\varphi(z)$ soit susceptible de la représentation (2.1).

$\Phi_n(z)$, le n-ième polynome de Faber associé au contour C_R, est la partie polynomiale du degré n de l'expression

$$[\varphi(z)]^n = \Phi_n(z) + R_n(z) \tag{2.3}$$

et $R_n(z)$ ne contient que les puissances négatives de z.

On montre également que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} \Phi_n(z) & \text{pour} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{pour} \quad n < 0 \end{cases} \qquad z \in I(\Gamma) \tag{2.4}$$

où Γ est un contour simple contenant $I(C_r)$.

2.3. Série de Faber d'une fonction analytique. — *Chaque fonction $F(z)$ analytique dans $\mathrm{I}(C_R)$ peut être représentée par une série de polynomes unique*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Phi_n(z) \tag{2.5}$$

uniformément et absolument convergente sur chaque sous-ensemble fermé de $\mathrm{I}(C_R)$, où les $\Phi_n(z)$ ne dépendent que de C_R, les constantes A_n dépendent aussi de $F(z)$.

Les A_n sont les coefficients de Faber de $F(z)$ relatifs à C_R, (2.5) est la série de Faber de $F(z)$ dans $\mathrm{I}(C_R)$; si $F(z)$ possède une singularité sur C_R, on dit que C_R est la courbe de convergence de la série (2.5). Lorsque C_R est une circonférence, la série de Faber se réduit à une série de Taylor.

2.4. Fonction associée. — Le domaine limité par C_R et C_r resp. l'anneau circulaire limité par K_R et K_r joue un rôle important dans les raisonnements de FABER, car c'est le domaine de régularité commun à $\varphi(z)$ et $F(z)$ resp. à $\psi(w)$ et $G(w) = F[\psi(w)]$. Dans cet anneau circulaire $G(w)$ se développe en série de Laurent:

$$G(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n w^n , \qquad r < |w| < R . \tag{2.6}$$

Les coefficients de Faber de $F(z)$ relatifs à C_R sont donnés par la formule:

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\varrho} \frac{G(w)}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\varrho} \frac{F[\psi(w)]}{w^{n+1}} dw , \quad r < \varrho < R , \quad n \geqq 0.$$

Ces coefficients sont uniques tout comme ceux de la série de Laurent de $G(w)$.

Il résulte de (2.1) et (2.6) que

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n [\varphi(z)]^n , \qquad z \in \mathrm{I}(C_R) \cap \mathrm{E}(C_r) \tag{2.7}$$

et, par suite,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Phi_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n w^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} A_n w^n = f(w) + g(w) \tag{2.8}$$

pour $z \in \mathrm{I}(C_R) \cap \mathrm{E}(C_r)$ resp. $r < |w| < R$. Il est à noter, pour éviter la confusion, que (2.5) a lieu pour $z \in \mathrm{I}(C_R)$ mais (2.7) resp. (2.8) seulement dans les domaines annulaires.

$g(w)$ est holomorphe dans $\mathrm{E}(K_r)$ avec $g(\infty) = 0$; la série $\sum_{n=-\infty}^{-1} A_n w^n$ est *uniformément et absolument convergente* donc aussi *sommable* (C,k) sur chaque sous-ensemble fermé de $\mathrm{E}(K_r)$, en particulier sur $K_R \subset \mathrm{E}(K_r)$. Cette circonstance est très important pour nous. Elle signifie que le comportement du développement de $g(w)$ sur K_R n'influence pas, vu les théorèmes à démontrer, les propriétés de la série de Laurent de $f(w) + g(w)$ sur K_R qui sont ainsi déterminées par celles de la série de puissances de $f(w)$.

La fonction $f(w)$ ayant dans son développement Taylorien les mêmes coefficients que la série de Faber de $F(z)$, est la fonction associée à $F(z)$. $f(w)$ est holomorphe dans $\mathrm{I}(K_R)$ et de l'allure de sa série de Taylor sur K_R on peut tirer des conclusions sur la nature de la série de Faber de $F(z)$ lorsque $z \in C_R$.

2.5. Évaluation des polynomes de Faber. — *L'inégalité*

$$\lambda \mid w \mid^n < \mid \Phi_n(z) \mid < \mu \mid w \mid^n \tag{2.9}$$

a lieu sur chaque sous-ensemble fermé de $\mathrm{E}(\mathsf{K}_r)$ *et* $\mathrm{E}(\mathsf{C}_r)$, *où* $w = \varphi(z)$, λ *et* μ *sont des constantes indépendantes de* w *resp.* z.

2.6. Suite de coefficients de Faber. — *Étant donnée la suite* $\{\Phi_n(z)\}$ *de polynomes de Faber associée à* C_R *et une suite de nombres* $\{A_n\}$ *vérifiant la relation*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mid A_n \mid^{1/n} = \frac{1}{R_0} \leq \frac{1}{R}, \tag{2.10}$$

la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \Phi_n(z)$ *est alors uniformément et absolument convergente sur chaque sous-ensemble fermé de* $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_0})$ *où elle représente une fonction régulière et diverge dans* $\mathrm{E}(\mathsf{C}_{R_0})$.

C_{R_0} est donc la courbe de convergence de la série de Faber en question. Dans les cas que nous avons à traiter, on a $R_0 = R$.

§ 3. Transformation homographique de la série de Faber et de son domaine de convergence

Les courbes C_j $(j = 1, 2)$ ont été définies dans le § 1; C_2 étant à présent l'image de C_1 par $z_1 = h(z_2)$ [cf. (1.6)]. Soient $w_j = \varphi_j(z_j)$, $z_j = \psi_j(w_j)$, K_{R_j}, K_{r_j} des notions rattachées à C_j analogues à celles du § 2 relatives à C_R; écrivons aussi C_{R_j} au lieu de C_j.

Si $F_1(z_1)$ et une fonction analytique dans $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_1})$, $F_2(z_2) = F_1[h(z_2)]$ est analytique dans $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_2})$; elles peuvent donc être représentées par leurs séries de Faber respectives et, par application de la formule (2.8), on peut écrir

$$F_j(z_j) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} \Phi_n^{(j)}(z_j) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} w_j^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(j)} w_j^n = f_j(w_j) + g_j(w_j) \tag{3.1}$$

où l'indice j se réfère à C_{R_j}; (3.1) a lieu pour

$$z_j \in \mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_j}) \cap \mathrm{E}(\mathsf{C}_{r_j}), \; r_j < \mid w_j \mid < R_j .$$

D'après ce que nous venons de dire sur la fonction associée, tout revient à trouver une relation entre $f_1(w_1)$ et $f_2(w_2)$ resp. entre w_1 et w_2. Il découle de (1.6), (2.1) et (2.2) que

$$w_1 = \varphi_1(h[\psi_2(w_2)]) = \varphi_1\left(\frac{p\,\psi_2(w_2) + q}{\psi_2(w_2) - z_2^*}\right) = t(w_2) . \tag{3.2}$$

$t(w_2)$ applique d'une manière conforme et biunivoque $\overline{\mathrm{E}}(\mathsf{K}_{R_2})$ sur $\overline{\mathrm{E}}(\mathsf{K}_{R_1})$. En effet, $t(w_2)$ est manifestement une fonction univalente dans $\mathrm{E}(\mathsf{K}_{R_2})$ et si $w_2 \in \mathsf{K}_{R_2}$, on a $z_2 \in \mathsf{C}_{R_2}$, $z_1 \in \mathsf{C}_{R_1}$ et $w_1 \in \mathsf{K}_{R_1}$; soit de plus $\psi_2(w_2^*) = z_2^*$, alors $t(w_2^*) = \infty$. $t(w_2)$ est donc nécessairement de la forme

$$w_1 = t(w_2) = \frac{R_1}{R_2} e^{i\vartheta_0} \frac{R_2^2(w_2 - \omega_0)}{R_2^2 - \bar{\omega}_0 w_2} \tag{3.3}$$

où ϑ_0, ω_0 $(0 < |\omega_0| < R_2)$ sont des constantes à déterminer. L'équation $t(w_2^*) = \infty$ donne, d'après (3.3), $\omega_0 = \dfrac{R_2^2}{\bar{w}_2^*}$. Pour avoir ϑ_0 désignons par $z_1' \in C_{R_1}$, $z_2' \in C_{R_2}$ deux points liés par l'équation $z_1' = h(z_2')$, et soient $w_1' = \varphi_1(z_1')$, $w_2' = \varphi_2(z_2')$; en posant w_1' et w_2' dans (3.3), on obtient une équation pour ϑ_0.

Faisons encore le changement de variable

$$\frac{R_2}{R_1} w_1 = W = e^{i\vartheta_0} \frac{R_2^2(w_2 - \omega_0)}{R_2^2 - \bar{\omega}_0 w_2} = h_{R_2}(w_2)\,, \tag{3.4}$$

ce qui donne

$$f_1(w_1) = \tilde{f}_1(W) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n W^n\,, \quad g_1(w_1) = \tilde{g}_1(W) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \tilde{a}_n W^n\,, \tag{3.5}$$

avec $\tilde{a}_n = a_n^{(1)}(R_1/R_2)^n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Rappelons ici la remarque faite dans le § 1 sur l'extension possible des théorèmes I—V aux cas des transformations de la forme (3.4). Posons

$$\begin{aligned} f_1[h_{R_2}(w_2)] &= \tilde{f}_2(w_2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\omega_0, \vartheta_0)\, w_2^n\,, \\ \tilde{g}_1[h_{R_2}(w_2)] &= \tilde{g}_2(w_2) = \tilde{b}_0(\omega_0, \vartheta_0) + \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(\omega_0, \vartheta_0)\, w_2^n\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $\tilde{b}_0(\omega_0, \vartheta_0) = \tilde{g}_2(\infty)$. Or, d'après ce qui précède $F_2[\psi_2(w_2)] = f_2(w_2) + g_2(w_2) = \tilde{f}_2(w_2) + \tilde{g}_2(w_2)$, avec $g_2(\infty) = 0$. On en conclut que

$$\begin{aligned} f_2(w_2) &= \tilde{f}_2(w_2) + \tilde{b}_0(\omega_0, \vartheta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} w_2^n\,, \\ g_2(w_2) &= \tilde{g}_2(w_2) - \tilde{b}_0(\omega_0, \vartheta_0) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(2)} w_2^n\,, \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $b_0(\omega_0, \vartheta_0) + \tilde{b}_0(\omega_0, \vartheta_0) = a_0^{(2)}$, $b_n(\omega_0, \vartheta_0) = a_n^{(2)}$ pour $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. En tenant compte des expressions (3.1)—(3.7), il vient

$$f_1\left(\frac{R_1}{R_2} e^{i\vartheta_0} \frac{R_2^2(w_2 - \omega_0)}{R_2^2 - \bar{\omega}_0 w_2}\right) = \tilde{f}_1[h_{R_2}(w_2)] = f_2(w_2) - \tilde{b}_0(\omega_0, \vartheta_0)\,. \tag{3.8}$$

C'est la relation cherchée permettant d'employer les théorèmes I—V. En outre on peut tirer de ces mêmes expressions (3.1)—(3.7) que

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} |a_n^{(2)}|^{1/n} = \frac{1}{R_2}\,. \tag{3.9}$$

Ce qui garantit, d'après le théorème 2.6 du § 2, que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ représente une fonction holomorphe dans $I(C_{R_2})$.

Soient enfin $\tilde{z}_1 \in C_{R_1}$, $\tilde{z}_2 \in C_{R_2}$ deux points fixes vérifiants l'égalité $\tilde{z}_1 = h(\tilde{z}_2)$, $A_m^{(k)}$ la m-ième moyenne (C, k) de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$, $B_m^{(k+\delta)}$

la m-ième moyenne $(C,k+\delta)$ de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$. Ces notations sont nécessaires pour énoncer les propositions nouvelles.

Théorème 1. — *Si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$ *est sommable* (C,k), *alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$ *est sommable* $(C, k+{}^1/_2)$, *et*

$$\lim_{m\to\infty} A_m^{(k)} = \lim_{m\to\infty} B_m^{(k+1/2)}. \tag{3.10}$$

Démonstration. — Soit $\tilde{w}_2 = \varphi_2(\tilde{z}_2)$ $(|\tilde{w}_2| = R_2)$; on a donc, vu (3.3) et (3.4),

$$t(\tilde{w}_2) = \tilde{w}_1 = \varphi_1(\tilde{z}_1), \qquad |\tilde{w}_1| = R_1, \qquad \tilde{W} = \frac{R_2}{R_1}\tilde{w}_1 .$$

Les séries $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(1)} \tilde{w}_1^n$, $\sum_{n=-\infty}^{-1} \tilde{a}_n \tilde{W}^n$ sont convergentes [cf. 2.4 et (3.5)], $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$ est sommable (C, k) par hypothèse, il découle donc de (3.1) et (3.5) que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \tilde{w}_1^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \tilde{W}^n$ sont aussi sommable (C, k). La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \tilde{w}_2^n$ est ainsi sommable $(C, k+1/2)$ en vertu du théorème I, et la convergence de $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(2)} \tilde{w}_2^n$ implique, d'après (3.1), la sommabilité $(C, k+{}^1/_2)$ de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$.

On a ensuite, selon (1.4),

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m^{(k)} = \lim_{w_1\to\tilde{w}_1} f_1(w_1) = \lim_{m\to\infty} \beta_m^{(k+1/2)} = \lim_{w_2\to\tilde{w}_2} f_2(w_2) \tag{3.11}$$

et, d'après (3.6),

$$g_1(\tilde{w}_1) = \tilde{g}_2(\tilde{w}_2) . \tag{3.12}$$

(3.1), (3.7), (3.11) et (3.12) entraînent

$$\lim_{z_1\to\tilde{z}_1} F_1(z_1) = \lim_{z_2\to\tilde{z}_2} F_2(z_2) .$$

Ce qui, avec la sommabilité des séries considérées, vérifie (3.10).

Théorème 2. — *Soit* $0 \leq \delta < 1/2$ *un nombre donné. Il existe des fonctions* $F_1(z_1)$ *telles que, malgré la sommabilité* (C,k) *de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$, *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$ *n'est pas sommable* $(C,k+\delta)$.

Démonstration. — Soit $f_1(w_1)$ une fonction définie dans $\mathrm{I}(\mathsf{K}_{R_1})$ dont l'existence est assurée par le théorème II, de sorte que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \tilde{w}_1^n$ soit sommable (C,k). Il existe donc une fonction $F_1(z_1)$ analytique dans $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_1})$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$ soit aussi sommable (C,k) (cf. théorèmes 2.6 et 2.4). $\tilde{f}_1(W)$

étant de la même nature que $f_1(w_1)$, il résulte du théorème II que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \tilde{w}_2^n$ n'est pas sommable $(C, k + \delta)$; en conséquence la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$ n'est pas sommable $(C,k + \delta)$ non plus.

Théorème 3. — *Il existe des fonctions $F_1(z_1)$ telles que* $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1) | <$ $< \infty$ *pour* $z_1 \in C_{R_1}$ *et, malgré cela,* $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2) | = \infty$ *pour* $z_2 \in C_{R_2}$.

Démonstration. — Soit $f_1(w_1)$ une fonction définie dans $I(K_{R_1})$ dont l'existence est assurée par le théorème III. La fonction $F_1(z_1)$ est déterminée par C_{R_1} et $f_1(w_1)$ comme dans le cas précédent. On a, vu (2.9), (3.1) et (3.5),

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)| < \mu \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} w_1^n| = \mu \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{a}_n W^n| < \infty\ , \quad z_1 \in C_{R_1},\ w_1 \in K_{R_1},\ W \in K_{R_2}.$$

Tandis qu'en tenant compte du théorème III et à nouveau de (2.9), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} | a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2) | > \lambda \sum_{n=0}^{\infty} | a_n^{(2)} w_2^n | = \infty\ , \qquad z_2 \in C_{R_2},\ w_2 \in K_{R_2}. \tag{3.13}$$

Théorème 4. — *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1) | < \infty$ *pour* $z_1 \in C_{R_1}$, *alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ *est uniformément convergente pour* $z_2 \in C_{R_2}$; *de plus si* $\tilde{z}_1 \in C_{R_1}$, $\tilde{z}_2 \in C_{R_2}$ *et* $\tilde{z}_1 = h(\tilde{z}_2)$, *alors*

$$F_1(\tilde{z}_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1) = F_2(\tilde{z}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)\ . \tag{3.14}$$

Démonstration. — Il découle de (2.9) et (3.5) que

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} | a_n^{(1)} w_1^n| = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} | \tilde{a}_n W^n| < \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)| < \infty\ , \quad z_1 \in C_{R_1},\ w_1 \in K_{R_1},\ W \in K_{R_2}.$$

Il suit ainsi du thérème IV que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} w_2^n$ est uniformément convergente pour $| w_2 | = R_2$. $\tilde{g}_2(w_2)$ étant holomorphe sur K_{R_2}, on conclut de (3.1) que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ est aussi uniformément convergente pour $z_2 \in C_{R_2}$.

La relation (3.14) résulte de l'égalité $f_1(\tilde{w}_1) = \tilde{f}_1(\tilde{W})$, ainsi que de (1.5) et (3.12).

Un corollaire des théorèmes 3 et 4 analogue à celui des théorèmes III et IV n'a pas de sens dans le cas générale où C_{R_1} et C_{R_2} ne sont pas identiques avec la même courbe.

Il reste à établir que l'inverse du théorème 4 est faux.

Théorème 5. — *Il existe des séries de Faber* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)$ *uniformément, mais non absolument convergentes sur leur courbe de convergence* C_{R_1}, *dont les transformées, les séries* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ *sont également uniformément, mais non* *absolument convergentes pour* $z_2 \in C_{R_2}$, *quelle que soit la transformation homographique* $z_1 = h(z_2)$.

Démonstration. — Soit $f_1(w_1)$ une fonction dont l'existence est assurée par le théorème V. Comme nous venons de voir C_{R_1} et $f_1(w_1)$ permettent de déterminer $F_1(z_1)$, $g_1(w_1)$, $\tilde{f}_1(W)$, $\tilde{g}_1(W)$. $g_1(w_1)$ resp. $\tilde{g}_1(W)$ étant holomorphe sur K_{R_1} resp. K_{R_2}, il suit de (3.1) que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)$ est aussi uniformément convergente pour $z_1 \in C_{R_1}$. On tire ensuite de (2.9)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)| > \lambda \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} w_1^n| = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{a}_n W^n| = \infty, \quad z_1 \in C_{R_1}, w_1 \in K_{R_1}, W \in K_{R_2},$$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)$ est uniformément, mais non absolument convergente sur C_{R_1}.

D'autre part, selon le théorème V, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} w_2^n$ est uniformément, mais non absolument convergente sur K_{R_2}, et (3.13) a lieu de neuveau. En tenant compte enfin de la régularité de $\tilde{g}_2(w_2)$ sur K_{R_2}, on peut affirmer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ est aussi uniformément, mais non absolument convergente sur C_{R_2}.

§ 4. Transformation conforme générale de la courbe de convergence

Nous allons aborder maintenant le problème plus général en substituant à la fonction particulière $z_1 = h(z_2)$ une transformation non homographique. Considérons, comme cela était prévu dans le § 1, deux alternatives: la correspondance entre $\bar{\mathrm{I}}(C_{R_1})$ et $\bar{\mathrm{I}}(C_{R_2})$ et celle entre $\bar{\mathrm{E}}(C_{R_1})$ et $\bar{\mathrm{E}}(C_{R_2})$.

4.1. Application de $\bar{\mathrm{I}}(C_{R_1})$ sur $\bar{\mathrm{I}}(C_{R_2})$. — Soit $z_1 = k_i(z_2)$ une fonction non homographique transformant d'une manière conforme et biunivoque $\bar{\mathrm{I}}(C_{R_1})$ en $\bar{\mathrm{I}}(C_{R_2})$. La fonction $F_2^{(i)}(z_2) = F_1[k_i(z_2)]$ est donc holomorphe dans $\mathrm{I}(C_{R_2})$ et la formule (3.1) reste valable pour $j = 2$ même si l'on y remplace $F_2(z_2)$, $f_2(w_2)$, $g_2(w_2)$ par $F_2^{(i)}(z_2)$, $f_2^{(i)}(w_2)$, $g_2^{(i)}(w_2)$. Il faut, par conséquent, établir une relation entre $f_1(w_1)$ et $f_2^{(i)}(w_2)$ resp. entre w_1 et w_2. On peut écrire à l'instar de (3.2),

$$w_1 = \varphi_1\big(k_i[\psi_2(w_2)]\big) = t_i(w_2)\,. \tag{4.1}$$

Cependant on ne peut pas tirer de (4.1) les mêmes conclusions que l'on a obtenues de (3.2); en d'autres termes $t_i(w_2)$ n'admet pas la forme (3.3). En effet, C_{R_2} étant analytique et régulière $k_i(z_2)$ est prolongeable au delà de C_{R_2} dans $\mathrm{E}(C_{R_2})$, mais étant différente d'une fonction homographique $k_i(z_2)$ doit avoir d'autres singularités dans $\mathrm{E}(C_{R_2})$ qu'un seul pôle simple. De plus si $z_1 \neq \infty$ et $w_2 \neq \infty$, $\varphi_1(z_1)$ est holomorphe dans $\mathrm{E}(C_{R_1})$ et $\psi_2(w_2)$ dans $\mathrm{E}(K_{R_2})$. Il s'ensuit que $t_i(w_2)$ a aussi d'autres singularités dans $\mathrm{E}(K_{R_2})$ qu'un seul pôle simple, elle n'est donc pas une fonction homographique et, en conséquence, elle ne peut pas être de la forme (3.3). On en conclut qu'une relation de sorte (3.8), qui constitue la base de nos raisonnements précédents, n'a plus lieu dans le cas envisagé; d'où la proposition.

Théorème 6. — *Les théorèmes* I—V *ne permettent pas d'établir une relation de genre* (3.8) *entre* $f_1(w_1)$ *et* $f_2^{(i)}(w_2)$ *et d'affirmer que les théorèmes* 1—5 *subsistent si l'on y remplace la série de Faber de* $F_2(z_2)$ *par celle de* $F_2^{(i)}(z_2)$.

Observons encore que nous pouvons choisir pour $k_i(z_2)$ une fonction qui applique $\bar{\mathrm{I}}(C_{R_1})$ sur lui-même. Ce cas particulier présente alors une analogie parfaite avec le problème primitif.

4.2. Application de $\bar{\mathrm{E}}(C_{R_1})$ **sur** $\bar{\mathrm{E}}(C_{R_2})$. — Soit $z_1 = k_e(z_2)$ une fonction non homographique faisant la transformation conforme biunivoque de $\bar{\mathrm{E}}(C_{R_1})$ sur $\bar{\mathrm{E}}(C_{R_2})$ avec $k_e(z_2^*) = \infty$, $z_2^* \in \mathrm{E}(C_{R_2})$. $k_e(z_2)$ n'a donc d'autre singularité dans $\mathrm{E}(C_{R_2})$ que le pôle simple z_2^*. D'autre part C_{R_2} étant analytique et régulière $k_e(z_2)$ se prolonge au delà de C_{R_2} sans être holomorphe dans tout le domaine $\mathrm{I}(C_{R_2})$. La fonction $F_2^{(e)}(z_2) = F_1[k_e(z_2)]$ n'est donc analytique que dans un domaine $\Delta \subset \mathrm{I}(C_{R_2})$ tel que C_{R_2} fait partie de la frontière de Δ. Par conséquent $F_2^{(e)}(z_2)$ n'est pas développable en série de Faber et l'on ne peut pas réitérer les raisonnements faits dans le § 3.

Néanmoins il existe une fonction $F_2^*(z_2)$ qui, avec certaines restrictions, possède les mêmes propriétés que $F_2(z_2)$. Pour le prouver représentons $F_2^{(e)}(z_2)$ par une sorte de série de Laurent. À cette fin soit notée par K_{ϱ_2} la circonférence du plus petit rayon dont l'image C_{ϱ_2} [par $\varphi_2(z_2)$] est encore contenue dans $\Delta \cap \mathrm{E}(C_{r_2})$. On a alors, d'après (2.7) et (2.8),

$$F_2^{(e)}[\psi_2(w_2)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} w_2^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(2)} w_2^n = f_2^{(e)}(w_2) + g_2^{(e)}(w_2), \quad \varrho_2 < |w_2| < R_2 , \tag{4.2}$$

$$F_2^{(e)}(z_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(2)} [\varphi_2(z_2)]^n . \tag{4.3}$$

Soit enfin Γ un contour simple aussi voisin à C_{R_2} que l'on veut et tel que l'on ait $\mathrm{I}(C_{\varrho_2}) \subset \mathrm{I}(\Gamma) \subset \mathrm{I}(C_{R_2})$. Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour déterminer $F_2^*(z_2)$.

Théorème 7. — *La fonction*

$$F_2^*(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F_1[k_e(\zeta)]}{\zeta - z_2} d\zeta , \qquad z_2 \in \mathrm{I}(\Gamma) \tag{4.4}$$

est holomorphe et développable en série de Faber dans $\mathrm{I}(C_{R_2})$ *et, à l'exception des relations* (3.10) *et* (3.14), *les théorèmes* 1—5 *restent valables lorsqu'on y remplace la série de Faber de* $F_2(z_2)$ *par celle de* $F_2^*(z_2)$.

Il est à noter qu'en posant dans l'intégrale (4.4) une fonction homographique $h(\zeta)$ au lieu de $k_e(\zeta)$, on aurat $F_2^*(z_2) \equiv F_2(z_2) = F_1[h(z_2)]$.

Démonstration. — La fonction $F_1[k_e(\zeta)] = F_2^{(e)}(\zeta)$ étant continue sur Γ, l'intégrale (4.4) représente une fonction holomorphe dans $\mathrm{I}(\Gamma)$; et comme Γ peut se rapprocher arbitrairement de C_{R_2}, $F_2^*(z_2)$ est holomorphe dans tout le domaine $\mathrm{I}(C_{R_2})$.

De plus, la série (4.3) converge uniformément sur Γ, il est donc légitime de l'intégrer terme à terme. Nous obtenons ainsi, en vertu de (4.3), (4.4) et (2.4),

$$F_2^*(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \int_\Gamma \frac{[\varphi_2(\zeta)]^n}{\zeta - z_2} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2) , \qquad z_2 \in \mathrm{I}(\Gamma) , \tag{4.5}$$

ce qui donne, selon (2.8),

$$(4.6)\quad F_2^*[\psi_2(w_2)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} w_2^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_2^* w_2^n = f_2^*(w_2) + g_2^*(w_2)\,, \quad r_2 < |\, w_2 \,| < R_2\,.$$

Nous savons en outre que $F_2^*[\psi_2(w_2)] \not\equiv F_2^{(e)}[\psi_2(w_2)]$, d'où , en comparant (4.2) et (4.6),

$$(4.7)\qquad f_2^*(w_2) \equiv f_2^{(e)}(w_2)\,, \qquad g_2^*(w_2) \not\equiv g_2^{(e)}(w_2)\,.$$

C'est à cause de la seconde expression (4.7) que les relations (3.10) et (3.14) ne sont plus valables.

Il reste à prouver que $f_2^{(e)}(w_2)$ s'exprime au moyen de $f_1(w_1)$ en utilisant une transformation de genre (3.8). On a

$$w_1 = \varphi_1(k_e[\psi_2(w_2)]) = t_e(w_2)\,;$$

on voit bien que la fonction $w_1 = t_e(w_2)$ applique $\bar{\mathrm{E}}(\mathsf{K}_{R_1})$ sur $\bar{\mathrm{E}}(\mathsf{K}_{R_2})$ d'une façon conforme et biunivoque. $k_e(z_2)$ ayant dans $\mathrm{E}(\mathsf{C}_{R_2})$ une seule singularité le pôle simple z_2^*, $k_e[\psi_2(w_2)]$ et $t_e(w_2)$ ont dans $\mathrm{E}(\mathsf{K}_{R_2})$ également une seule singularité le pôle simple $w_2^* = \varphi_2(z_2^*)$. Il en résulte que $t_e(w_2)$ est nécessairement de la forme (3.3), faisant aussi la représentation conforme biunivoque de $\bar{\mathrm{I}}(\mathsf{K}_{R_1})$ sur $\bar{\mathrm{I}}(\mathsf{K}_{R_2})$; les constantes ω_0 et ϑ_0 qui interviennent dans l'expression de $t_e(w_2)$ peuvent être calculées par le procédé employé dans le § 3. La relation (3.8) subsistera donc en y posant $f_2^{(e)}(w_2)$ à la place de $f_2(w_2)$. Soient enfin $\tilde{z}_1 = k_e(\tilde{z}_2)$, $\tilde{z}_1 \in \mathsf{C}_{R_1}$, $\tilde{z}_2 \in \mathsf{C}_{R_2}$. Dès lors l'achèvement de la démonstration du théorème 7 n'est que la répétition des raisonnements du § précédent.

Remarquons pour terminer qu'un cas particulier de la transformation (4.4) où $k_e(\infty) = \infty$, $k_e'(\infty) > 0$, conditions équivalentes à $\omega_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0$, a déjà été considéré par P. HEUSER [6], qui a obtenu ainsi les expressions $w_1 = (R_1/R_2)w_2$, $a_n^{(2)} = (R_1/R_2)^n\, a_n^{(1)}$ et

$$F_2^*(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n a_n^{(1)}\, \Phi_n^{(2)}(z_2)$$

cas particuliers des relations (3.3), (3.7) et (4.5).

(Reçu le 6 janvier 1964)

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALPÁR L.: „Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence III." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **5** (1960) 97—152.

[2] ALPÁR L.: „Sur certaines transformées des séries de puissance absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **7** (1962) 287—316.

[3] FABER, G.: „Über polynomische Entwickelungen." *Mathematische Annalen* **57** (1903) 389—408.

[4] FABER, G.: „Über polynomische Entwickelungen II." *Mathematische Annalen* **64** (1907) 116—135.

[5] FABER, G.: „Über Tschebyscheffsche Polynome." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **150** (1919—20) 79—105.

[6] HEUSER, P.: „Über eine Transformation der Faberschen Polynomreihen." *Mathematische Zeitschrift* **38** (1934) 777—782.

[7] ILIEFF, L.: *Analytische Nichtfortsetzbarkeit und Überkonvergenz einiger Klassen von Potenzreihen.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.
[8] TIETZ, H.: „Faber series and the Laurent decomposition." *The Michigan Mathematical Journal* **4** (1957) 175—179.
[9] TURÁN P.: „A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence-circle." *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **12** (1958) 19—26.
[10] ULLMAN, J. L.: „On Faber series. 1. A problem of transfer." *The Michigan Mathematical Journal* **2** (1953—54) 109—114.
[11] ULLMAN, J. L.: „Studies in Faber polynomials I." *Transactions of the American Mathematical Society* **94** (1960) 515—528.

О НЕКОТОРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РЯДОВ ФАБЕРА

L. ALPÁR

Резюме

Пусть C_1 — простая, замкнутая, аналитическая, регулярная кривая плоскости z_1, и $F_1(z_1)$ — функция аналитическая внутри C_1, и, далее

$$z_1 = h(z_2) = \frac{pz_2 + q}{z_2 - z_2^*} \qquad (pz_2^* + q \neq 0) \tag{1}$$

гомографическое преобразование, которое переводит C_1 в кривую C_2 плоскости z_2 и внутреннюю часть от C_1, в внутреннюю часть от C_2, так, что z_2^* попадает в внешность от C_2. Таким образом функция $F_2(z_2) = F_1(h(z_2))$ является аналитической внутри C_2. Поэтому $F_1(z_1)$ в C_1, $F_2(z_2)$ в C_2 разложимы в ряды Фабера

$$F_1(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)\,, \tag{2}$$

$$F_2(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)\,, \tag{3}$$

где $\Phi_n^{(j)}(z_j)$ $(j = 1, 2)$ n-ый многочлен Фабера принадлежащая к C_j. Предположим еще, что существует точка $\tilde{z}_1 \in C_1$, в которой $F_1(z_1)$ определена, и ряд (2) суммируемый (C,k). Пусть $\tilde{z}_2 \in C_2$ точка, определена равенством $\tilde{z}_1 = h(\tilde{z}_2)$. Пусть означает $A_m^{(k)}$ m-ое среднее (C, k) ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$ и $B_m^{(k+\delta)}$ m-ое среднее $(C,k + \delta)$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$, $k \geqq 0$, $\delta \geqq 0$.

Пользуясь этими обозначениями мы можем высказать следующие теоремы:

Теорема 1. *Если ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$ *суммируемый* (C,k), *тогда ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$ *суммируемый* $\left(C, k + \frac{1}{2}\right)$ *и*

$$\lim_{m\to\infty} A_m^{(k)} = \lim_{m\to\infty} B_m^{(k+1/2)}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть дано δ, где $0 \leqq \delta < \frac{1}{2}$. Существует функция $F_1(z_1)$ для которой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$ суммируемый (C, k), но ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$ не суммируемый $(C, k+\delta)$.*

Теорема 3. *Существует функция $F_1(z_1)$, для которой $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)| < \infty$, когда $z_1 \in C_1$, но $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)| = \infty$ если $z_2 \in C_2$.*

Теорема 4. *Если $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)| < \infty$, когда $z_1 \in C_1$, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ сходится равномерно, если $z_2 \in C_2$ далее, если $\tilde{z}_1 = h(\tilde{z}_2)$ и $\tilde{z}_1 \in C_1, \tilde{z}_2 \in C_2$, тогда*

$$F_1(\tilde{z}_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1) = F_2(\tilde{z}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2). \tag{5}$$

Теорема 5. *Существует ряд Фабера $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)$ который сходится равномерно, но не абсолютно, когда $z_1 \in C_1$ и преобразованный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ также сходится равномерно, но не абсолютно, если $z_2 \in C_2$ для всякого данного преобразования $z_1 = h(z_2)$.*

Теорема 5. означает, что теорема 4 не обратима.

Эти теоремы были выведены из более ранных аналогичных результатов для степенных рядов (см. [1], [2]).

Пусть в дальнейщих $z_1 = k_i(z_2)$ *не гомографическая*, но гомоморфное и однолистное преобразование, которое переводит C_1 в C_2 и внутреннюю часть от C_1 в внутреннюю часть от C_2. Тогда $F_2^{(i)}(z_2) = F_1(k_i(z_2))$ аналитическая функция в C_2.

Теорема 6. высказывает, что из упомянутых результатов для степенных рядов нельзя вывести для ряда Фабера $F_2^{(i)}(z_2)$ теоремы, подобные теоремам 1—5.

Пусть означает наконец $z_1 = k_e(z_2)$ *не гомографическое*, но конформное и однолистное преобразование, которое переводит C_1 в C_2 и внешность от C_1 в внешность от C_2. Тогда $F_2^{(e)}(z_2) = F_1(k_e(z_2))$ не является аналитической функцией в полной внутренней части C_2, только в ее части. Тогда $F_2^{(e)}(z_2)$ не представима в C_2 рядом Фабера. Но пусть Γ простая кривая в C_2 достаточно близка к C_2, тогда можно доказывать следующую:

Теорема 7. *Если z_2 точка в внутренней части от Γ, тогда функция*

$$F_2^*(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F_1(k_e(\zeta))}{\zeta - z_2} d\zeta$$

аналитическая в C_2, разложима там в ряд Фабера, и теоремы 1—5 справедливы (кроме соотношений (4) и (5)), если в них заменить ряд Фабера функции $F_2(z_2)$ рядом Фабера функции $F_2^*(z_2)$.