

ÜBER ZERLEGUNGSSÄTZE FÜR TEILWEISE GEORDNETEN HALBGRUPPEN MIT BEDINGTEN DISTRIBUTIVITÄTSREGELN

von

O. STEINFELD

§ 1. Einleitung

Die Verbandshalbgruppen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der teilweise geordneten algebraischen Strukturen. (S. L. FUCHS [3].) Die in dieser Arbeit definierte $(\times)$ -Verbandshalbgruppe ist eine multiplikative Halbgruppe und ein vollständiger Verband mit gewissen Eigenschaften (2.1)–(2.4) und mit einer »schwachen« Distributivitätsregel $(\times)$. Die Menge aller Teiltringe eines assoziativen Ringes bildet z. B. eine $(\times)$ -Verbandshalbgruppe.

In einer früheren Arbeit [13] definierten wir die Begriffe der Absorbenten und Primabsorbenten als Verallgemeinerungen der Ideale und Primideale. Wir gehen jetzt durch die Definitionen der Links-, Rechts-, Bi- und Quasiabsorbenten in dieser Richtung weiter. Eine $(\times)$ -Verbandshalbgruppe wird radikalfrei genannt, wenn ihr grösstes Element keinen nilpotenten Linksabsorbenten ($\neq 0$) besitzt.

In § 4 beschäftigen wir uns mit solchen radikalfreien $(\times)$ -Verbandshalbgruppen, deren grösstes Element Vereinigung von minimalen Rechtsabsorbenten (und Linksabsorbenten) ist. Wir geben für diese $(\times)$ -Verbandshalbgruppe einige Zerlegungssätze, die den Struktursätzen der halbeinfachen Ringe und den Zerlegungssätzen der vollständig einfachen Halbgruppen analog sind (Sätze 4.2, 4.3, 4.4).

Um zu diesen Ergebnissen zu gelangen, müssen wir eine gemeinsame Verallgemeinerung des Schiefkörpers und der Gruppe mit Nullelement angeben (Lemma 2.5) und einige Sätze über die minimalen Links-, Rechts-, Bi- und Quasiabsorbenten beweisen (§ 3).

In seiner Arbeit [6] gab L. KOVÁCS eine Charakterisierung der regulären Ringe mit Hilfe der Links- und Rechtsideale. In Satz 2.3 definieren wir die regulären $(\times)$ -Verbandshalbgruppen mit Hilfe der Links-, Rechts- und Quasiabsorbenten. Die regulären $(\times)$ -Verbandshalbgruppen sind radikalfrei, so lassen sich die erwähnten Zerlegungssätze über die regulären $(\times)$ -Verbandshalbgruppen in einer schärferen Form übertragen (Sätze 4.2', 4.6).

§ 2. Grundbegriffe

Es sei $L = \{a, b, \dots\}$ eine multiplikative Halbgruppe und ein vollständiger Halbverband bezüglich der Durchschnittsoperation $\cap$.

Man kann in L durch

$$(2.1) \quad a \leq b \Leftrightarrow a \cap b = a$$

eine Halbordnungsrelation $\leq$ definieren. Es gelte

$$(2.2) \quad a^2 \leq a \quad (a \in L),$$

$$(2.3) \quad \left(\bigcap_{a \in \Omega} a \right) b \leq \bigcap_{a \in \Omega} a b \quad \text{und} \quad b \left(\bigcap_{a \in \Omega} a \right) \leq \bigcap_{a \in \Omega} b a \quad (a, b \in L),$$

wo Ω eine beliebige Indexmenge bezeichnet. Wir verlangen endlich die Existenz der Elemente $0, e$ ($\in L$) mit den Bedingungen

$$(2.4) \quad 0 \leq a \leq e, \quad 0a = a0 = 0 \quad (a \in L).$$

Eine algebraische Struktur L mit den obigen Eigenschaften wird eine $\mathcal{H}$ -Halbgruppe genannt. Mit L bezeichnen wir immer eine $\mathcal{H}$ -Halbgruppe. (S. O. STEINFELD [13].)

Aus (2.3) folgt:

$$(2.5) \quad a \leq b \Rightarrow ax \leq bx \quad \text{und} \quad xa \leq xb \quad (a, b, x \in L),$$

und umgekehrt. L ist also eine halbgeordnete Halbgruppe.

Wir sagen, dass das Element b ($\in L$) ein *Absorbent* eines Elementes a ($\in L$) ist, wenn

$$(2.6) \quad b \leq a$$

und

$$(2.7) \quad ab \leq b, \quad ba \leq b$$

bestehen. b heisst ein *Linksabsorbent* (*Rechtsabsorbent*) von a , wenn (2.6) und (2.7₁) [(2.6) und (2.7₂)] gelten.

Ein Element k ($\in L$) heisst ein *Quasiabsorbent* des Elementes a ($\in L$), wenn

$$(2.8) \quad k \leq a \quad \text{und} \quad ka \cap ak \leq k$$

bestehen. Der Durchschnitt $r \cap l$ eines Rechtsabsorbenten r und eines Linksabsorbenten l von a ($\in L$) ist wegen

$$(r \cap l)a \cap a(r \cap l) \leq ra \cap al \leq r \cap l$$

ein *Quasiabsorbent* von a . Es gilt

Lemma 2.1. *Ist r ein Rechtsabsorbent, l ein Linksabsorbent des Elementes a ($\in L$), so besteht $rl \leq r \cap l$.*

Beweis. Da

$$rl \leq \begin{cases} al \leq l, \\ ra \leq r \end{cases}$$

gelten, ist unsere Behauptung richtig.

Das Element b ($\in L$) heisst ein *Biabsorbent* von a ($\in L$), wenn

$$(2.9) \quad b \leq a \quad \text{und} \quad bab \leq b$$

gelten. Aus den Definitionen folgt sofort, dass die Quasiabsorbenten von a auch Biabsorbenten von a sind. Es gilt

Lemma 2.2. (Vgl. LAJOS [7].) *Ist b ein Biabsorbent des Elementes $a (\in L)$, so sind bx und xb für jedes Element $x (\leq a)$ Biabsorbenten von a .*

Beweis. Wegen $b, x \leq a$ gelten $bx \leq a$ und $xb \leq a$. Weiterhin bestehen $bxabx \leq ba^2 bx \leq babx \leq bx$ und $xbaxb \leq xba^2 b \leq xbab \leq xb$.

Wir definieren für beliebig viele Elemente $a_\lambda (\in L)$ eine Vereinigungsoperation $\cup$ durch

$$(2.10) \quad \bigcup_{\lambda \in A} a_\lambda = \bigcap d_\mu,$$

wo $d_\mu (\in L)$ die gemeinsamen oberen Schranken aller a_λ durchläuft. Es ist bekannt, dass L bezüglich der in ihm definierten Verknüpfungen $\cap$ und $\cup$ einen vollständigen Verband bildet.

Wir machen von jetzt an eine sehr wesentliche Voraussetzung, die gewisse Distributivitätsregeln vorschreibt.

(*)-**Eigenschaft.** *Es bezeichne a ein beliebiges Element der $\mathcal{H}$ -Halbgruppe L .*

(1) *Sind x, y Elemente von L mit $x \leq a$ und $y \leq a$, so sollen*

$$(x \cup ax)y = xy \cup axy \quad \text{und} \quad y(x \cup ax) = yx \cup yax,$$

$$(x \cup xa)y = xy \cup xay \quad \text{und} \quad y(x \cup xa) = yx \cup yxa$$

bestehen.

(2) *Sind $m_\lambda (\lambda \in A)$ Linksabsorbenten (Rechtsabsorbenten) des Elementes a und x ein Element von L mit $x \leq a$, so sollen*

$$\left(\bigcup_{\lambda \in A} m_\lambda \right) x = \bigcup_{\lambda \in A} m_\lambda x \quad \text{und} \quad x \left(\bigcup_{\lambda \in A} m_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in A} x m_\lambda$$

gelten.

Infolge der Voraussetzung (*) ist L im allgemeinen keine verbandsgeordnete Halbgruppe; sondern eine Halbgruppe und ein vollständiger Verband mit gewissen bedingten Distributivitätsregeln. Wir nennen eine $\mathcal{H}$ -Halbgruppe L mit der (*)-Eigenschaft eine (*)-Verbandshalbgruppe. Mit V bezeichnen wir immer eine (*)-Verbandshalbgruppe. Die Elemente $x (0 \leq x \leq a)$ des Intervalls $[0, a]$ bilden offenbar eine (*)-Teilverbandshalbgruppe V_a von V . Natürlich gilt $[0, e] = V_e = V$.

Aus Eigenschaft (1) folgt unmittelbar

$$(x \cup ax \cup xa \cup axa)y = xy \cup axy \cup xay \cup axay \quad \text{und}$$

$$y(x \cup ax \cup xa \cup axa) = yx \cup yax \cup yxa \cup yaxa.$$

Wegen der Eigenschaft (1) und (2.2) gilt $a(x \cup ax) = ax \cup a^2 x = ax \leq x \cup ax$. So ist $x \cup ax$ ein Linksabsorbent von a , mit der Eigenschaft $x \leq x \cup ax$. Ist l ein Linksabsorbent von a mit $x \leq l$, so besteht $x \cup ax \leq l \cup al \leq l$. Die Elemente $x \cup ax$ bzw. $x \cup xa$ bzw. $x \cup ax \cup xa \cup axa$ sind also der durch x erzeugte Linksabsorbent bzw. Rechtsabsorbent bzw. Absorbent von a .

Sind $r_\lambda (\lambda \in A)$ Rechtsabsorbenten des Elementes a , so folgt aus der Eigenschaft (2) und (2.7₂)

$$(2.11) \quad \left(\bigcup_{\lambda \in A} r_\lambda \right) a = \bigcup_{\lambda \in A} r_\lambda a \leq \bigcup_{\lambda \in A} r_\lambda.$$

Die Vereinigung $\bigcup_{\lambda \in A} r_\lambda$ der Rechtsabsorbenten r_λ von a ist also wieder ein Rechtsabsorbent von a .

Bemerkungen 1. Die Teilringe eines assoziativen Ringes R bilden eine $(\times)$ -Verbandshalbgruppe. Definiert man nämlich den Durchschnitt $S \cap T$ der Teilringe S, T von R in üblicher Weise und das Produkt ST als den durch die Elemente st ($s \in S; t \in T$) erzeugten Teilring von R , so bilden die Teilringe von R eine $\mathcal{H}$ -Halbgruppe L_1 . Die Links-, Rechtsabsorbenten, usw. eines Elementes entsprechen den Links-, Rechtsidealen usw. eines Teilringes. Nach (2.10) bezeichnet $S \cup T$ den durch S und T erzeugten Teilring von R und $S + T$ besteht aus den Elementen $s + t$ ($s \in S; t \in T$). ($S + T$ ist im allgemeinen kein Teilring von R .)

Sind A und X ($X \subseteq A$) Teilringe von R , so bestehen $X \cup AX = X + AX$, $X \cup XA = X + XA$. Wir zeigen, dass z. B. die Distributivitätsregel

$$(X + AX)Y = XY + AXY$$

mit irgendwelchem Teilring Y ($Y \subseteq A$) von R gilt. Wir haben nur einzusehen, dass jedes Element der linken Seite in der rechten Seite enthalten ist. Die linke Seite ist durch die Elemente

$$(x + \sum_i a_i x_i) y = xy + \sum_i a_i x_i y \quad (x, x_i \in X; a_i \in A; y \in Y)$$

erzeugt. Wegen $XA, AX, YA, AY \subseteq A$ und $(XY)^2 \subseteq XY$ sind die Summe und das Produkt der erzeugenden Elemente in $XY + AXY$ enthalten, woraus unsere Behauptung folgt. Ähnlicherweise kann man einsehen, dass auch die anderen Distributivitätsregeln der $(\times)$ -Eigenschaft (1) in L_1 richtig sind.

Sind l_λ ($\lambda \in A$) Linksideale des Teilringes A von R , so gilt $\bigcup_{\lambda \in A} l_\lambda = \sum_{\lambda \in A} l_\lambda$. Es bezeichnet Y einen Teilring von A . Wir zeigen, dass z. B. die Distributivitätsregel $(\sum_{\lambda \in A} l_\lambda) Y = \sum_{\lambda \in A} l_\lambda Y$ besteht. Wir haben nur $(\sum_{\lambda \in A} l_\lambda) Y \subseteq \sum_{\lambda \in A} l_\lambda Y$ einzusehen. Die linke Seite wird durch die Elemente $(\sum_{\lambda \in A} l_\lambda) y = \sum_{\lambda \in A} l_\lambda y$ ($l_\lambda \in l_\lambda; y \in Y$) erzeugt. Da l_λ Linksideale von A sind, sind die Summe und das Produkt der erzeugenden Elemente in $\sum_{\lambda \in A} l_\lambda Y$ enthalten.

Die Gültigkeit der übrigen Distributivitätsregeln aus der $(\times)$ -Eigenschaft (2) in L_1 lässt sich ähnlicherweise einzusehen.

Somit ist L_1 eine $(\times)$ -Verbandshalbgruppe.

2. Ein anderes Beispiel für die $(\times)$ -Verbandshalbgruppen liefert die Menge aller Teilhalbgruppen mit Nullelement einer Halbgruppe mit Nullelement, welche durch L_2 bezeichnet wird. Die Gültigkeit der $(\times)$ -Eigenschaft in L_2 lässt sich ähnlicherweise wie in L_1 einzusehen.

Wir beweisen

Satz 2.3. In V sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:

(i) für jeden Rechtsabsorbenten r und Linksabsorbenten l des Elementes $a \in V$ gilt

$$(2.12) \quad rl = r \cap l;$$

(ii) für jeden Rechtsabsorbenten r und Linksabsorbenten l von a gelten

a) r ist idempotent, d. h. $r^2 = r$,

b) l ist idempotent,

c) rl ist ein Quasiabsorbent von a ;

(iii) die Quasiabsorbenten von a bilden eine reguläre Teilhalbgruppe¹ von V .

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Die Bedingung (ii) c) folgt aus (2.12) und der Tatsache, dass $r \cap l$ ein Quasiabsorbent von a ist. Wegen (2.12) gilt $ra = r \cap a = = r$, woraus infolge der Eigenschaft (1) $r = r \cap (r \cup ar) = r(r \cup ar) = = r^2 \cup rar = r^2$ folgt, was die Bedingung (ii) a) impliziert. Ähnlich kann man die Gültigkeit von (ii) b) einsehen.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Es sei k ein Quasiabsorbent von a . Wir zeigen zuerst

$$(2.13) \quad k = ka \cap ak.$$

Wegen a) und der Eigenschaft (1) gelten

$$k \leq k \cup ka = (k \cup ka)^2 = k^2 \cup k^2 a \cup kak \cup kaka \leq ka.$$

Ähnlich gilt $k \leq ak$, woraus (2.13) wegen (2.8) folgt.

Wegen (2.13) und c) gilt

$$(2.14) \quad rl = rla \cap arl,$$

wo r ein Rechtsabsorbent, l ein Linksabsorbent von a ist. Aus (2.13), (2.14) a), b) bekommt man

$$r \cap l = k = ka \cap ak = kaaka \cap akaak = kaak = kak \leq ral \leq rl,$$

was wegen Lemma 2.1 die Gültigkeit von (2.12) sichert.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Wir zeigen zuerst, dass das Produkt der Quasiabsorbenten k_1, k_2 von a ein Quasiabsorbent von a ist. Wegen (2.12) gilt

$$ak_1 k_2 \cap k_1 k_2 a = k_1 k_2 aak_1 k_2 \leq k_1 \cdot k_2 ak_2 \leq k_1(k_2 a \cap ak_2) \leq k_1 k_2.$$

Somit bilden die Quasiabsorbenten von a eine Teilhalbgruppe K von V . Weiterhin bekommt man wegen der Eigenschaft (1) für einen beliebigen Quasiabsorbenten k von a

$$k \leq (k \cup ka) \cap (k \cup ak) = (k \cup ka)(k \cup ak) = k^2 \cup kak \leq ka \cap ak = ka^2 k,$$

woraus wegen $ka^2 k \leq k$

$$k = ka^2 k,$$

d. h. die Regularität von K folgt.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Da der Durchschnitt $r \cap l$ eines Rechtsabsorbenten r und eines Linksabsorbenten l von a ein Quasiabsorbent von a ist, existiert ein Quasiabsorbent x von a mit

$$r \cap l = (r \cap l)x(r \cap l) \leq (r \cap l)a(r \cap l) \leq ral \leq rl.$$

Damit ist der Beweis beendet.

Wir nennen das Element $a (\in V)$ und zugleich die $(\times)$ -Verbandshalbgruppe V_a regulär, wenn eine der Bedingungen (i), (ii), (iii) in V gilt.

¹ Eine Halbgruppe H heisst regulär, wenn für jedes Element $a (\in H)$ mindestens ein Element $x (\in H)$ mit $a = axa$ existiert.

Bemerkungen 1. Zu (i) und (ii) ähnliche Charakterisierungen der regulären Ringe und Halbgruppen sind von L. KOVÁCS [6], K. ISÉKI [4] und J. CALAIS [1] gegeben.

2. Die zu (i) $\Rightarrow$ (iii) ähnliche Eigenschaft der regulären Halbgruppe hat LAJOS S. [7] bewiesen.²

Aus Satz 2.3 folgt

Korollar 2.4. Ist V regulär, so ist für jeden Absorbenten a von e auch die $(*)$ -Teilverbandshalbgruppe V_a regulär.

Beweis. Wegen (i) genügt es zu zeigen, dass die Rechts- und Linksabsorbenten von a auch Rechts- und Linksabsorbenten von e sind. Ist l ein Linksabsorbent von a , so ist $l \cup el$ infolge der Eigenschaft (1) ebenfalls ein Linksabsorbent von a und besteht

$$(l \cup el)^2 \leq a(l \cup el) \leq l \leq l \cup el,$$

woraus wegen (ii), b) $l = l \cup el$, d. h. $el \leq l$ folgt. Ebenso sieht man ein, dass für jeden Rechtsabsorbenten r von a auch $re \leq r$ gilt.

Lemma 2.5. Für ein Element a ($\neq 0$) einer $(*)$ -Verbandshalbgruppe V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (I) für jedes Element x ($\in V, x \neq 0, x \leq a$) gilt $ax = xa = a$;
- (II) a besitzt nur die trivialen Rechts- und Linksabsorbenten 0 und a , und $a^2 \neq 0$;

(III) jeder Rechts- und Linksabsorbent von a ist idempotent und für die Rechtsabsorbenten r, r_1, r_2 ($\neq 0$) von a die Implikation $rr_1 = rr_2 \Rightarrow r_1 = r_2$ für die Linksabsorbenten l, l_1, l_2 ($\neq 0$) von a die Implikation $l_1 l = l_2 l \Rightarrow l_1 = l_2$ gelten.

Beweis. Aus (I) folgt (II) trivialerweise.

(II) $\Rightarrow$ (I). Für das Element $x \neq 0, x \leq a$ gilt $ax = 0$ oder $ax = a$. Der erste Fall ist unmöglich, weil in diesem Falle nach der Eigenschaft (1)

$$a^2 = a(x \cup xa) = ax \cup axa = 0$$

gültig wäre. Ähnlich muss $xa = a$ ($x \neq 0, x \leq a$) bestehen.

(II) $\Rightarrow$ (III) ist trivial.

(III) $\Rightarrow$ (II). Ist l ($\neq 0$) ein Linksabsorbent von a , so gilt wegen $l = l^2 \leq al \leq l$

$$ll = al,$$

woraus $l = a$ folgt. Dasselbe gilt für die Rechtsabsorbenten $r \neq 0$ von a . Damit ist der Beweis beendet.

$a \in V$ heisst ein *Divisionselement*, wenn für a eine der Bedingungen (I), (II), (III) gilt.

Ist a ein Divisionselement, so ist V_a wegen (II) und (i) regulär.

Bemerkung. Die Bedingungen (I), (II), (III) können als Definitionen eines Schiefkörpers bzw. einer Gruppe mit Nullelement in L_1 bzw. in L_2 betrachtet werden.

² Inzwischen ist eine Arbeit von J. LUH »A characterization of regular rings« (*Proc. Japan Acad.* **39** (1963), 741–743) erschienen, in welcher im wesentlichen die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iii) für Ringe bewiesen ist.

Wir brauchen noch den folgenden

Satz 2.6. *Es sei p ein Absorbent des Elementes a ($\in V$). Für p sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(A) *sind b, c Absorbenten von a mit $bc \leq p$, so gilt entweder $b \leq p$ oder $c \leq p$;*

(B) *ist r bzw. l ein Rechtsabsorbent bzw. ein Linksabsorbent von a mit $rl \leq p$, so gilt entweder $r \leq p$ oder $l \leq p$;*

(C) *sind r_1, r_2 Rechtsabsorbenten von a mit $r_1 r_2 \leq p$, so gilt entweder $r_1 \leq p$ oder $r_2 \leq p$;*

(D) *sind l_1, l_2 Linksabsorbenten von a mit $l_1 l_2 \leq p$, so gilt entweder $l_1 \leq p$ oder $l_2 \leq p$;*

(E) *sind x, y ($\leq a$) Elemente von V mit $xay \leq p$, so gilt entweder $x \leq p$ oder $y \leq p$.*

Beweis. (A) $\Rightarrow$ (B). Gilt $rl \leq p$ mit einem Rechtsabsorbenten r und mit einem Linksabsorbenten l von a , so gilt wegen Eigenschaft (1) auch $(r \cup ar)(l \cup la) = rl \cup rla \cup arl \cup arla \leq p$, woraus nach (A) entweder $r \leq r \cup ar \leq p$ oder $l \leq l \cup la \leq p$ folgt.

(B) $\Rightarrow$ (C). Sind r_1, r_2 Rechtsabsorbenten von a mit $r_1 r_2 \leq p$, so gilt nach der Eigenschaft (1) $r_1(r_2 \cup ar_2) = r_1 r_2 \cup r_1 ar_2 = r_1 r_2 \leq p$, woraus wegen (B) entweder $r_1 \leq p$ oder $r_2 \leq r_2 \cup ar_2 \leq p$ folgt.

Ähnlich kann man (B) $\Rightarrow$ (D) einsehen.

(B) $\Rightarrow$ (E). Besteht für die Elemente x, y ($\leq a$) von V die Voraussetzung $xay \leq p$, so gilt nach der Eigenschaft (1)

$$(x \cup xa)a(y \cup ay) = xay \cup xa^2 y \cup xa^2 y \cup xa^3 y = xay \leq p,$$

woraus wegen (B) entweder $x \leq x \cup xa \leq p$ oder $a(y \cup ay) \leq p$ folgt. Da die zweite Möglichkeit nach (B) entweder $y \leq a \leq p$ oder $y \leq y \cup ay \leq p$ impliziert, ist unsere Behauptung (B) $\Rightarrow$ (E) richtig.

Da (C) $\Rightarrow$ (A) und (D) $\Rightarrow$ (A) trivialerweise gelten, haben wir nur (E) $\Rightarrow$ (A) zu zeigen. Sind b, c Absorbenten von a mit $bc \leq p$, so gilt $bac \leq bc \leq p$, was nach (E) entweder $b \leq p$ oder $c \leq p$ impliziert.

Ein Absorbent p von a , für welchen eine der Bedingungen (A)–(E) erfüllt ist, heisst *prim*.

Bemerkung. Satz 2.6 liefert eine Charakterisierung der Primideale der Ringe und Halbgruppen. (Vgl. MCCOY [8] und STEINFELD [9].)

Satz 2.7. *Es sei q ein Absorbent des Elementes a ($\in V$). Für q sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(α) *sind x, y ($\leq a$) Elemente von V mit $xy \leq q$, so gilt entweder $x \leq q$ oder $y \leq q$,*

(β) *ist l bzw. r ein Linksabsorbent bzw. ein Rechtsabsorbent von a mit $lr \leq q$, so gilt entweder $l \leq q$ oder $r \leq q$.*

Beweis. Aus (α) folgt (β) trivialerweise.

(β) $\Rightarrow$ (α). Ist $xy \leq q$, so gilt wegen der Eigenschaft (1) auch

$$(x \cup ax)(y \cup ya) = xy \cup xya \cup axy \cup axya \leq q,$$

woraus entweder $x \leq x \cup ax \leq q$ oder $y \leq y \cup ya \leq q$ folgt.

Ein Absorbent q von a mit der Eigenschaft (α) oder (β) heisst *vollständig prim*. Ist 0 ein vollständig Primabsorbent von a , so nennen wir a und zugleich V_a *nullteilerfrei*.

Bemerkung. Satz 2.7 liefert eine Charakterisierung der vollständig Primideale der Ringe und Halbgruppen. (Vgl. STEINFELD [9].)

§ 3. Über die minimalen Links-, Rechts-, Bi- und Quasiabsorbenten

Der Absorbent b ($\neq 0$) des Elementes a ($\in V$) heisst *minimal*, wenn a keinen Absorbenten b' mit $0 < b' < b$ besitzt. Ähnlich definiert man die minimalen Links-, Rechts-, Bi- und Quasiabsorbenten.

Satz 3.1. *Der Durchschnitt eines minimalen Links- und eines minimalen Rechtsabsorbenten des Elementes a ($\in V$) ist entweder 0 oder ein minimaler Quasiabsorbent von a .*

Beweis. Es sei k der Durchschnitt eines minimalen Linksabsorbenten l und eines minimalen Rechtsabsorbenten r von a , und $k \neq 0$. Setzen wir voraus, dass es — im Widerspruch zu unserer Behauptung — einen Quasiabsorbenten k' mit $0 < k' < k$ gibt. Wegen der Minimalität von l gilt entweder $ak' = 0$ oder $ak' = l$. Im Fall $ak' = 0$ wäre k' ein Linksabsorbent von a mit $0 < k' < k \leq l$, was aber wegen der Definition von l unmöglich ist. Folglich ist $ak' = l$. Ebenso folgt $k'a = r$. Daraus ergibt sich $k = l \cap r = ak' \cap k'a \leq k'$, was der Bedingung $k' < k$ widerspricht. Damit ist Satz 3.1 bewiesen.

Als ein Analogon des vorigen Satzes gilt

Satz 3.1'. *Das Produkt rl eines minimalen Rechtsabsorbenten r und eines minimalen Linksabsorbenten l von a ($\in V$) ist entweder 0 oder ein minimaler Biabsorbent von a .*

Beweis. Nach Lemma 2.2 ist rl ein Biabsorbent von a . Es sei b ein Biabsorbent von a , mit $0 < b < rl$. Es gilt $ba^2b \leq bab \leq b$. Da $b \leq r, l$ ist, sind $ba \leq r$ und $ab \leq l$ gültig. Wegen der Minimalität von r und l sind nur die Fälle

$$ba = \begin{cases} 0 \\ r \end{cases} \quad \text{und} \quad ab = \begin{cases} 0 \\ l \end{cases}$$

möglich. Ist $ba = 0$, so ist b ein Rechtsabsorbent von a mit $0 < b \leq rl \leq r$. Daraus folgt wegen der Minimalität von r

$$b = r,$$

was $rl \leq ra = 0$ impliziert. Ähnlich sieht man ein, dass aus $ab = 0$ die Bedingung $rl = 0$ folgt. Somit können wir $ba = r$ und $ab = l$ voraussetzen. Daraus folgt aber $baab = rl \leq b$, d. h. $b = rl$. Qu. e. d.

Satz 3.2. *Ist b ein minimaler Biabsorbent des Elementes a ($\in V$), so ist b entweder ein Divisionselement oder gilt $b^2 = 0$.³*

Beweis. Es sei x ein Element mit $0 < x \leq b$. Nach Lemma 2.2 sind bx und xb Biabsorbenten von a . Wegen der Minimalität von b sind nur die Fälle

$$bx = \begin{cases} 0 \\ b \end{cases} \quad \text{und} \quad xb = \begin{cases} 0 \\ b \end{cases}$$

möglich. Ist $xb = 0$, so muss nach Eigenschaft (1) auch $(x \cup ax)b = xb \cup \cup axb = 0$ bestehen. Wegen $x \leq b$ und der Minimalität von b gilt $(x \cup ax) \cap b = b$, woraus $b^2 = 0$ folgt. Ähnlich schliessen wir $b^2 = 0$ aus $bx = 0$.

³ Ob ein ähnliches Ergebnis über die minimalen Quasiabsorbenten gültig ist, ist eine offene Frage (Vgl. [10] Satz 4a, [11] Satz 3 und [12] Satz 4).

Gelten $bx \neq 0$ und $xb \neq 0$, so ist $bx = xb = b$; folglich ist b nach Lemma 2.5 (I) ein Divisionselement.

Aus Satz 3.1' und 3.2 folgt nun

Korollar 3.3. *Ist r ein minimaler Rechtsabsorbent, l ein minimaler Linksabsorbent von $a (\in V)$, so ist rl entweder ein Divisionselement oder $(rl)^2 = 0$.*

Ein Teil von Satz 3.2 lässt sich umkehren:

Satz 3.4. *Wenn ein Biabsorbent b des Elementes $a (\in V)$ ein Divisionselement ist, so ist b ein minimaler Biabsorbent von a .*

Beweis. Es sei x ein Biabsorbent von a mit $0 < x \leq b$. Da nach Lemma 2.5 (I)

$$bx = xb = b \quad (0 < x \leq b)$$

gilt, muss $b = b^2 = xbbx \leq xax \leq x$, d. h. $x = b$ bestehen.

Satz 3.5. *Ist l ein minimaler Linksabsorbent, r ein minimaler Rechtsabsorbent von $a (\in V)$, so sind die Quadrate der Elemente rl , lr , $r \cap l$ gleichzeitig entweder Null oder nicht-Null.*

Beweis. Es sei zuerst $(rl)^2 = 0$. Ist dabei $rl = 0$, so ist $lr = l \cdot rl \cdot r = 0$ und $(r \cap l)(r \cap l) \leq rl = 0$, also jetzt ist die Behauptung richtig. Ist dagegen $rl \neq 0$ und $(rl)^2 = 0$, so ist entweder $lr = 0$ oder $lrl \neq 0$. Aus $rl \neq 0$ und $lrl = 0$ folgt wegen der Eigenschaft (1) und der Minimalität von r $l(rl \cup rla) = lrl \cup lrla = 0$ und $(rl \cup rla) \cap r = r$. Dies impliziert $lr = 0$, woraus auch $(l \cap r)(l \cap r) = 0$ folgt. Der zweite Fall $rl \neq 0$ und $lrl \neq 0$ ist unmöglich, denn wegen der Voraussetzung und der Minimalität von l muss $lrl = l$ bestehen. Dies führt aber wegen $(rl)^2 = 0$ zum Widerspruch $0 = rl \cdot rl = r \cdot lrl = rl$.

Jetzt setzen wir voraus, dass $(lr)^2 = 0$ ist. Ist $lr = 0$, so gilt $rl \cdot rl = r \cdot lr \cdot l = 0$ und $(r \cap l)(r \cap l) \leq lr = 0$. Es sei zunächst $lr \neq 0$ und $(lr)^2 = 0$; es ist entweder $lrl \neq 0$ oder $lrl = 0$. Der Fall $lr \neq 0$ und $lrl \neq 0$ ist wieder unmöglich, da aus $lrl \neq 0$ wieder $lrl = l$ und daraus der Widerspruch $0 = lr \cdot lr = lrl \cdot r = l$ folgt. Der Fall $lr \neq 0$ und $lrl = 0$ gibt zwei Möglichkeiten: $rl = 0$ oder $rl \neq 0$. Ist $rl = 0$, so ist $(r \cap l)(r \cap l) \leq rl = 0$. Wenn dagegen $rl \neq 0$ und $lrl = 0$ gelten, bekommen wir wieder — wie oben — $lr = 0$, was der Voraussetzung $lr \neq 0$ widerspricht.

Zuletzt bestehe $(r \cap l)^2 = 0$. Man sieht, dass jetzt wegen $rl \leq r \cap l$ auch $(rl)^2 = 0$ gilt. Ist ausserdem $rl = 0$, so ist auch $(lr)^2 = 0$ gültig. Wenn dagegen $(rl)^2 = 0$ und $rl \neq 0$ gelten, lässt sich der Beweis wie oben beenden.

Ein Element a von V heisst *nilpotent*, wenn eine natürliche Zahl n mit $a^n = 0$ existiert. Ist l ein nilpotenter Linksabsorbent von e , so ist wegen der Eigenschaft (1) $l \cup le$ ein nilpotenter Absorbent von e .

Besitzt das Element $a (\in V)$ keinen von Null verschiedenen nilpotenten Linksabsorbenten, so nennen wir a und zugleich die $(\times)$ -Verbandshalbgruppe V_a *radikalfrei*.

Wegen der vorigen Bemerkung hat ein radikalfreies Element auch keinen von Null verschiedenen nilpotenten Rechtsabsorbenten. Nach der Bedingung (ii) a) von Satz 2.3 ist eine reguläre $(\times)$ -Verbandshalbgruppe radikalfrei.

Im radikalfreien Falle gilt die Umkehrung von Satz 3.1:

Satz 3.6. *Ist $V_a (a \in V)$ eine radikalfreie $(\times)$ -Verbandshalbgruppe, so ist jeder minimale Quasiabsorbent k von a der Durchschnitt eines geeigneten minimalen Linksabsorbenten und eines minimalen Rechtsabsorbenten von a .*

Beweis. Wegen (2.8) und der Minimalität von k sind die folgenden zwei Fälle möglich:

$$ak \cap ka = \begin{cases} 0 \\ k \end{cases}.$$

Es sei zuerst $ak \cap ka = 0$. Es ist entweder $ak = 0$ oder $ak \neq 0$. Im Falle $ak = 0$ ist k ($\neq 0$) ein Linksabsorbent von a mit $k^2 = 0$, was der Voraussetzung widerspricht. Im Falle $ak \neq 0$ betrachten wir das Produkt kak . Dieses ist wegen $kak \leq ak \cap ka = 0$ gleich Null, woraus $akak = 0$ folgt, was wegen $ak \neq 0$ wieder unmöglich ist.

Es sei dann $ak \cap ka = k$. Wir behaupten, dass ak bzw. ka ein minimaler Links- bzw. ein minimaler Rechtsabsorbent von a ist. Es genügt die Behauptung für ak zu beweisen. Ist ak nicht minimal, so existiert ein Linksabsorbent l mit

$$(3.1) \quad 0 < l < ak.$$

Da der Durchschnitt $al \cap ka$ ein Quasiabsorbent von a ist, muss wegen der Voraussetzungen entweder

$$(3.2) \quad al \cap ka = 0$$

oder

$$(3.3) \quad al \cap ka = k$$

bestehen. Im Falle (3.2) gilt wegen $kl \leq al \cap ka = 0$ auch $kl = 0$. Das impliziert $akl = 0$, woraus wegen (3.1) $l^2 = 0$, was aber unmöglich ist. Im Falle (3.3) gilt wegen $k \leq al \leq l$ auch $ak \leq l$, was der Annahme (3.1) widerspricht. Damit ist der Beweis beendet.

Ein Analogon von Satz 3.6 ist

Satz 3.6'. Ist $V_a(a \in V)$ eine radikalfreie $(*)$ -Verbandshalbgruppe, so ist jeder minimale Biabsorbent von a ($a \in V$) das Produkt rl eines geeigneten minimalen Rechtsabsorbenten r und eines minimalen Linksabsorbenten l von a .

Beweis. Es sei b ein minimaler Biabsorbent von a . Da ba^2b ($\leq b$) auch ein Biabsorbent von a ist, muss entweder $ba^2b = 0$ oder $ba^2b = b$ gelten. Ist $ba^2b = 0$, dann gilt auch $abaaba = 0$, woraus wegen der Radikalfreiheit von V_a die Gültigkeit von $aba = 0$ folgt. So gilt $ba \cdot ba = 0$, was $ba = 0$ impliziert. Der Rechtsabsorbent $b \cup ab$ ($\neq 0$) hat also die Eigenschaft: $(b \cup ab)^2 \leq (b \cup ab)a = ba \cup aba = 0$, was aber der Radikalfreiheit von V_a widerspricht. Folglich besteht

$$(3.4) \quad ba \cdot ab = b.$$

Wir zeigen, dass ba ein minimaler Rechtsabsorbent von a ist. Es sei r ein Rechtsabsorbent von a mit $0 < r \leq ba$. Nach (3.4) gilt $rab \leq b$, woraus wegen der Minimalität von b entweder $rab = 0$ oder $rab = b$ folgt. Ist $rab = 0$, so gilt $ra \cdot ra \leq rar \leq raba = 0$, woraus sich der Widerspruch $r^2 \leq ra = 0$ ergibt. Daher muss $rab = b$ gelten, woraus $b \leq r$ folgt. Dies impliziert aber $ba \leq ra \leq \leq r$, also $r = ba$.

Ähnlich sieht man ein, dass ab ein minimaler Linksabsorbent von a ist. Infolge (3.4) ist der Beweis damit beendet.

Aus den Sätzen 3.6, 3.1', 3.6', 3.1 und 2.2 (i), folgt

Korollar 3.7. Ist V_a ($a \in V$) eine reguläre $(\times)$ -Verbandshalbgruppe, so ist jeder minimale Quasiabsorbent von a ein minimaler Biabsorbent von a und umgekehrt.

Bemerkung: Sätze 3.1, 3.5, 3.6 und Korollar 3.3 sind Verallgemeinerungen der entsprechenden Ergebnisse von STEINFELD [10], [11], [12].

§ 4. Zerlegungssätze

Wir nennen ein Element a ($\in V$) und zugleich die $(\times)$ -Verbandshalbgruppe V_a einfach, wenn a keinen Absorbenten ($\neq 0$, $\neq a$) besitzt und $a^2 \neq 0$ gilt.

Aus Satz 2.6 folgt unmittelbar

Korollar 4.1. Sind r , r' bzw. l , l' beliebige von Null verschiedene Rechtsabsorbenten bzw. Linksabsorbenten eines einfachen Elementes a ($\in V$), so gelten

$$ll' \neq 0, rr' \neq 0 \quad \text{und} \quad rl \neq 0.$$

Eine Zerlegung $a = \bigcup_{\omega \in \Omega} x_\omega$ ($a, x_\omega \in V$) des Elementes a heisst direkt, wenn für jedes x_ω die Bedingung

$$x_\omega \cap \left(\bigcup_{\substack{\omega' \in \Omega \\ \omega' \neq \omega}} x_{\omega'} \right) = 0$$

gilt.

Das Element a ($\in V$) und zugleich die $(\times)$ -Verbandshalbgruppe V_a wird vollständig zerlegbar, vollständig links-, rechts-, bi- oder quasi-zerlegbar genannt, je nachdem eine Zerlegung

$$a = \bigcup_{\omega \in \Omega} x_\omega \quad (\Omega \text{ ist eine beliebige Indexmenge})$$

mit verschiedenen minimalen Absorbenten, Links-, Rechts-, Bi- oder Quasiabsorbenten x_ω gültig ist.

Satz 4.2. Das Element e von V ist dann und nur dann radikalfrei und vollständig rechts-zerlegbar, wenn $e^2 = e$ ist und für jeden Absorbenten c von e die direkten Zerlegungen

$$(4.1) \quad ec = \bigcup_{\mu} a_\mu \quad \text{und} \quad ce = \bigcup_{\nu} a_\nu$$

bestehen, wo die a_μ bzw. die a_ν eindeutig bestimmte, einfache, paarweise annullierende vollständig rechts-zerlegbare Absorbenten von e sind.

Beweis. Es sei e radikalfrei und vollständig rechts-zerlegbar. Dann besteht eine Zerlegung

$$(4.2) \quad e = \bigcup_{\omega \in \Omega} r_\omega,$$

wo r_ω verschiedene, minimale Rechtsabsorbenten von e bezeichnen. Da e radikalfrei ist, gilt $r_\omega^2 = r_\omega$ ($\omega \in \Omega$), was wegen (4.2) und der Eigenschaft $e^2 = e$ impliziert. Wegen der Minimalität von r_ω gilt

$$(4.3) \quad r_\omega r_{\omega'} = 0 \quad \text{oder} \quad r_\omega \quad (\omega, \omega' \in \Omega).$$

Es ist leicht einzusehen, dass in der Menge der Rechtsabsorbenten r_ω ($\omega \in \Omega$) die folgende Relation $\equiv$

$$(4.4) \quad r_\alpha \equiv r_{\alpha'} \Leftrightarrow r_\alpha r_{\alpha'} = r_\alpha \quad (\alpha, \alpha' \in \Omega)$$

eine Klasseneinteilung liefert. Bezeichne a_α die Vereinigung der Elemente r_ω , die eine Klasse K_α bilden. Nach (4.2) gilt

$$(4.5) \quad e = \bigcup_{\alpha \in A} a_\alpha,$$

wo A die Indexmenge der verschiedenen Klassen bezeichnet.

Wir zeigen, dass das Element $a_\alpha = \bigcup_{r_\omega \in K_\alpha} r_\omega$ ein einfacher Absorbent von e ist. Wegen (4.3), (4.4) und der Eigenschaft (2) gilt

$$(4.6) \quad a_\alpha a_\beta = \begin{cases} a_\alpha, & \text{wenn } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{wenn } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

woraus nach (4.5)

$$(4.7) \quad e a_\alpha = a_\alpha e = a_\alpha$$

folgt.

Es sei $x (\neq 0)$ ein Absorbent des Elementes a_α . x ist wegen (4.5) und (4.6) auch ein Absorbent von e . Andererseits gilt nach der Eigenschaft (2)

$$(4.8) \quad a_\alpha x = \left(\bigcup_{r_\omega \in K_\alpha} r_\omega \right) x = \bigcup_{r_\omega \in K_\alpha} r_\omega x \neq 0,$$

im entgegengesetzten Falle wäre nämlich $x^2 \leq a_\alpha x = 0$, was der Radikalfreiheit von e widerspräche. Wegen (4.8) muss z. B. für das Element $r_\sigma (\in K_\alpha)$

$$r_\sigma x \neq 0 \Rightarrow r_\sigma x = r_\sigma \leq x$$

bestehen. Daraus folgt wegen (4.4) und der Eigenschaft (2)

$$x \geq a_\alpha x \geq a_\alpha r_\sigma = \bigcup_{r_\omega \in K_\alpha} r_\omega r_\sigma = \bigcup_{r_\omega \in K_\alpha} r_\omega = a_\alpha,$$

d. h. $x = a_\alpha$, womit die Einfachheit von a_α bewiesen ist.

Da a_α ein einfacher Absorbent von e ist, gilt $a_\alpha \cap \left(\bigcup_{\alpha \neq \beta \in A} a_\beta \right) = 0$ oder a_α . Der zweite Fall impliziert $a_\alpha \leq \bigcup_{\alpha \neq \beta \in A} a_\beta$. Multipliziert man beide Seiten mit a_α , so besteht wegen (4.6) und der Eigenschaft (2)

$$a_\alpha = a_\alpha^2 = a_\alpha \left(\bigcup_{\alpha \neq \beta \in A} a_\beta \right) = \bigcup_{\alpha \neq \beta \in A} a_\alpha a_\beta = 0,$$

was unmöglich ist. So muss für jedes a_α ($\alpha \in A$) der erste Fall gelten und (4.5) ist also eine direkte Zerlegung.

Aus der Definition von a_α folgt, dass a_α vollständig rechts-zerlegbar ist.

Um die Eindeutigkeit der Darstellung (4.5) zu zeigen, nehmen wir eine zweite direkte Darstellung

$$(4.5') \quad e = \bigcup_{\beta \in B} b_\beta,$$

wo b_β einfache Absorbenten von e sind. Wegen (4.5'), (4.7) und der Eigenschaft (2) besteht

$$a_\alpha = ea_\alpha = \left(\bigcup_{\beta \in B} b_\beta \right) a_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} b_\beta a_\alpha \neq 0$$

woraus die Existenz mindestens eines Absorbenten b_β mit $b_\beta a_\alpha \neq 0$ folgt. Da a_α und b_β einfache Absorbenten von e sind, muss

$$b_\beta a_\alpha = a_\alpha = b_\beta$$

gelten, was die Eindeutigkeit der Darstellung (4.5) sichert. Bezeichne $c (\neq 0)$ einen beliebigen Absorbenten von e . Aus (4.5) folgen wegen der Einfachheit der Komponenten a_α und der Eigenschaft (2) die direkten Zerlegungen (4.1) von ec und ce .

Umgekehrt bestehe für jeden Absorbenten $c (\neq 0)$ von e die direkte Zerlegung (4.1) mit einfachen, vollständig rechts-zerlegbaren Absorbenten a_μ von e . Daraus folgt wegen

$$a_\mu \leq \bigcup a_\mu = ec \leq c,$$

dass c nichtnilpotent ist, was die Radikalfreiheit von e sichert. Infolge (4.1) und $e^2 = e$ ist e auch vollständig rechts-zerlegbar.

Damit ist Satz 4.2 bewiesen.

Satz 4.3. *Ist e radikalfrei, so sind die folgenden drei Eigenschaften äquivalent:*

- (a) *e ist vollständig quasi-zerlegbar,*
- (b) *e ist gleichzeitig vollständig rechts- und links-zerlegbar,*
- (c) *e ist vollständig bi-zerlegbar.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b). Die Bedingung (a) impliziert eine Darstellung von e

$$(4.9) \quad e = \bigcup k_\omega$$

mit minimalen Quasiabsorbenten k_ω von e . Nach Satz 3.6 kann man statt (4.9)

$$e = \bigcup (r_\omega \cap l_\omega)$$

schreiben, wo r_ω bzw. l_ω geeignete minimale Rechts- bzw. Linksabsorbenten von e sind. Daraus folgen die Darstellungen $e = \bigcup r_\omega = \bigcup l_\omega$, was zu beweisen war.

(b) $\Rightarrow$ (c). Es sei e gleichzeitig vollständig rechts- und links-zerlegbar, d. h.

$$(4.10) \quad e = \bigcup r_\nu = \bigcup l_\mu$$

gelte mit minimalen Rechtsabsorbenten r_ν und minimalen Linksabsorbenten l_μ von e . Wegen der Minimalität von l_μ und der Eigenschaft (2) gilt

$$l_\mu = el_\mu = \left(\bigcup_\nu r_\nu \right) l_\mu = \bigcup_\nu r_\nu l_\mu,$$

woraus nach (4.10)

$$e = \bigcup_\mu \bigcup_\nu r_\nu l_\mu$$

folgt, wo die von Null verschiedenen $r_\nu l_\mu$ nach Satz 3.1' minimale Biabsorbenten von e sind.

(c) $\Rightarrow$ (a). Gilt eine Darstellung

$$(4.11) \quad e = \bigcup b_e$$

mit minimalen Biabsorbenten b_e von e , so ist e nach Satz 3.6' in der Form

$$(4.12) \quad e = \bigcup r_e l_e$$

darstellbar, wo r_e bzw. l_e minimale Rechtsabsorbenten bzw. Linksabsorbenten von e sind. Aus (4.12) folgt wegen $r_e l_e \leq r_e \cap l_e$ die Darstellung $e = \bigcup (r_e \cap l_e)$, wo $r_e \cap l_e$ nach Satz 3.1 minimale Quasiabsorbenten von e sind.

Über die einfachen, vollständig links- und rechts-zerlegbaren Elementen von V geben die folgenden Eigenschaften weitere Aufklärungen.

Es sei das Element a einfach und es gelte

$$(4.13) \quad a = \bigcup_{\alpha \in A} r_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} l_\beta,$$

wo r_α bzw. l_β verschiedene minimale Rechtsabsorbenten bzw. Linksabsorbenten von a sind.

1. Zu jedem r_α ($\alpha \in A$) existiert mindestens ein l_{α^*} ($\alpha^* \in B$), so dass $l_{\alpha^*} r_\alpha = a$ ist und zu jedem l_β ($\beta \in B$) existiert mindestens ein r_{β^*} ($\beta^* \in A$), so dass $l_\beta r_{\beta^*} = a$ gilt.

Wegen (4.13) und der Einfachheit von a besteht nämlich für jedes r_α die Darstellung: $a = ar_\alpha = (\bigcup_{\beta \in B} l_\beta) r_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} l_\beta r_\alpha$. Da für das Paar l_β, r_α entweder $l_\beta r_\alpha = 0$ oder $l_\beta r_\alpha = a$ gilt, muss mindestens ein l_{α^*} mit $l_{\alpha^*} r_\alpha = a$ ($\alpha^* \in B$) existieren. Die zweite Behauptung kann man ähnlich einsehen.

2. Für jeden Rechtsabsorbenten r ($\neq 0$) und Linksabsorbenten l ($\neq 0$) von a gelten $r_\alpha r = r_\alpha$ ($\alpha \in A$) und $ll_\beta = l_\beta$ ($\beta \in B$). Nach Korollar 4.1 ist $r_\alpha r \neq 0$, woraus wegen der Minimalität von r_α die Behauptung folgt. Ähnlich beweist man die zweite Behauptung.

3. Es gilt $a = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcup_{\beta \in B} r_\alpha l_\beta$, wo $r_\alpha l_\beta$ ($\alpha \in A; \beta \in B$) lauter verschiedene minimale Biabsorbenten von a sind.

Nach Satz 3.1' und Korollar 4.1 haben wir nur $r_\alpha l_\beta = r_{\alpha'} l_{\beta'} \Rightarrow r_\alpha = r_{\alpha'}, l_\beta = l_{\beta'}$ zu zeigen. Aus $r_\alpha l_\beta = r_{\alpha'} l_{\beta'}$ folgen $ar_\alpha l_\beta = ar_{\alpha'} l_{\beta'} = al_\beta = al_{\beta'} = l_\beta = l_{\beta'}$ und $r_\alpha l_\beta a = r_{\alpha'} l_{\beta'} a = r_\alpha a = r_{\alpha'} a = r_\alpha = r_{\alpha'}$.

4. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent: (a) $l_\beta r_\alpha \neq 0$, (b) $r_\alpha l_\beta$ ist ein Divisionselement, (c) für jedes r_ξ und l_η ($\xi \in A; \eta \in B$) gilt $r_\xi l_\beta r_\alpha l_\eta = r_\xi l_\eta$.

(a) $\Rightarrow$ (b). Wegen (a) gilt $l_\beta r_\alpha = a$, folglich $(l_\beta r_\alpha)^2 \neq 0$. So besteht nach Satz 3.5 $(r_\alpha l_\beta)^2 \neq 0$, woraus nach Korollar 3.3 die Behauptung (b) folgt.

(b) $\Rightarrow$ (a). Aus (b) folgt $(r_\alpha l_\beta)^2 \neq 0$, was nach Satz 3.5 $(l_\beta r_\alpha)^2 \neq 0$ impliziert, weshalb $l_\beta r_\alpha \neq 0$ gilt.

(a) $\Rightarrow$ (c). Wegen (a) und 2. besteht $r_\xi l_\beta r_\alpha l_\eta = r_\xi al_\eta = r_\xi l_\eta$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Nach (c) und 3. gilt $r_\xi l_\beta r_\alpha l_\eta = r_\xi l_\eta \neq 0$, was die Behauptung (a) impliziert.

5. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent: (a') $l_\beta r_\alpha = 0$, (b') $(r_\alpha l_\beta)^2 = 0$, (c') für jedes r_ξ und l_η gilt $r_\xi l_\beta r_\alpha l_\eta = 0$.

Da (a') $\Rightarrow$ (c') und (c') $\Rightarrow$ (b') trivialerweise gelten, haben wir nur (b') $\Rightarrow$ (a') zu zeigen. Wegen (b') besteht $(r_\alpha l_\beta)^2 = 0$, was wegen Satz 3.5 $(l_\beta r_\alpha)^2 = 0$ impliziert, woraus $l_\beta r_\alpha = 0$ folgt.

Infolge der vorigen Eigenschaft gilt

Satz 4.4. *Ist das Element $a \in V$ einfach und*

$$(4.14) \quad a = \bigcup_{\alpha \in A} r_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} l_\beta \quad (\bar{A} = m, \bar{B} = n)$$

mit verschiedenen minimalen Rechtsabsorbenten r_α bzw. Linksabsorbenten l_β von e , so besteht

$$(4.15) \quad a = \bigcup_{\alpha} \bigcup_{\beta} r_\alpha l_\beta$$

mit verschiedenen minimalen Biabsorbenten $r_\alpha l_\beta$ ($\alpha \in A$; $\beta \in B$) von a , unter welchen mindestens $\max(m, n)$ Divisionselemente vorkommen. Weiterhin gilt

$$(4.16) \quad r_\alpha l_\beta r_{\alpha'} l_{\beta'} = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow l_\beta r_{\alpha'} = 0 \\ r_\alpha l_{\beta'} \Leftrightarrow l_\beta r_{\alpha'} \neq 0 \end{cases} \quad (a, a' \in A; \beta, \beta' \in B).$$

Bemerkungen 1. Man kann die Ergebnisse der Sätze 4.2, 4.3 und 4.4 als ein Analogon der Struktursätze der radikalfreien Ringe betrachten, die mit ihrem Sockel übereinstimmen. (Vgl. VAN DER WAERDEN [15], KERTÉSZ—STEINFELD [5] und SZÁSZ [14].)

2. Es ist bekannt, dass die vollständig einfachen Halbgruppen mit Nullelement die Eigenschaft (b) von Satz 4.3 haben. (S. CLIFFORD—PRESTON [2] Korollar 2.49.) So bietet eine radikalfreie ($\times$)-Verbandshalbgruppe mit der Eigenschaft (a) [oder (b) oder (c)] eine Verallgemeinerung der vollständig einfachen Halbgruppe mit Nullelement. Korollar 2.52 a in CLIFFORD—PRESTON [2] ergibt sich als ein Spezialfall des Satzes 4.4.

Da eine reguläre ($\times$)-Verbandshalbgruppe nach Satz 2.3 (ii) radikalfrei ist,⁴ können wir die vorigen Ergebnisse für den regulären Fall spezialisieren.

Infolge Satz 2.3 (i) und Korollar 2.4 bekommt man aus Satz 4.2 den

Satz 4.2'. *Das Element e von V ist dann und nur dann regulär und vollständig rechts-zerlegbar, wenn für jeden Absorbenten c von e eine direkte Zerlegung*

$$c = \bigcup_{\mu} a_\mu$$

gilt, wo a_μ eindeutig bestimmte, einfache, paarweise annullierende, reguläre, vollständig rechts-zerlegbare Absorbenten von e sind.

Im regulären Falle fallen die Bedingungen (a) und (c) von Satz 4.3 wegen Korollar 3.7 überein und die Biabsorbenten $r_\alpha l_\beta$ im Satz 4.4 sind auch minimale Quasiabsorbenten von a .

Als einen Sonderfall von Satz 2.3 beweisen wir

Lemma 4.5. *In V sind die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:*

(i) *für jeden Rechtsabsorbenten r und Linksabsorbenten l des Elementes $a \in V$ gilt*

$$rl = r \cap l \leq lr,$$

(ii) *jeder Quasiabsorbent von a ist idempotent.*

⁴ Bekanntlich sind die halbeinfachen Ringe bzw. die vollständig einfachen Halbgruppen mit Nullelement regulär. Wir konnten ein ähnliches Ergebnis über die ($\times$)-Verbandshalbgruppen nicht beweisen.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Nach dem Beweis des Satzes 2.3 gilt $k = ka^2 k$, woraus wegen (i)

$$k = ka \cdot ak \leq ak \cdot ka$$

folgt. Dies impliziert wegen $a^2 = a \cap a = a$

$$k = ka \cdot kak \cdot ak \leq ka \cdot ak^2 a \cdot ak = kak \cdot kak = k^2$$

d. h. $k = k^2$ gilt.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Es sei r ein Rechtsabsorbent, l ein Linksabsorbent von a . Da $r \cap l$ ein Quasiabsorbent von a ist, gilt nach (ii)

$$r \cap l = (r \cap l)^2 \leq rl \cap lr,$$

woraus wegen $rl \leq r \cap l$ die Behauptung (i) folgt.

Bemerkung. Ein ähnliches Ergebnis wurde in Satz 2 von L. Kovács [6] über Ringe bewiesen.⁵

Satz 4.6. Ist das Element $e \in V$ vollständig quasi-zerlegbar und ist jeder Quasiabsorbent von e idempotent, so besitzt V kein von Null verschiedenes nilpotentes Element. Jeder Absorbent c von e hat eine direkte Zerlegung

$$(4.17) \quad c = \bigcup_{\mu} a_{\mu},$$

wo a_{μ} eindeutige bestimmte, einfache, paarweise annullierende, nullteilerfreie Absorbenten von e sind.

Weiterhin ist jeder Quasiabsorbent von a_{μ} idempotent und a_{μ} hat eine Zerlegung

$$a_{\mu} = \bigcup_{\alpha} k_{\mu\alpha},$$

wo $k_{\mu\alpha}$ Divisionselemente sind.

Beweis. Es sei $x (\neq 0)$ ein Element von V mit

$$x^n = 0, \quad x^{n-1} \neq 0 \quad (n \geq 2).$$

Dies impliziert nach Lemma 4.5 und Eigenschaft (1)

$$\begin{aligned} 0 \neq x^{n-1} &\leq (x \cup xe) \cap (x^{n-1} \cup ex^{n-1}) = (x \cup xe)(x^{n-1} \cup ex^{n-1}) \leq \\ &\leq (x^{n-1} \cup ex^{n-1})(x \cup xe) = x^n \cup ex^n \cup x^ne \cup ex^ne = 0, \end{aligned}$$

was unmöglich ist. Nach Lemma 4.5 ist e regulär, so ist die direkte Zerlegung (4.17) nach Satz 4.2 richtig.

Ist l ein Linksabsorbent, r ein Rechtsabsorbent von a_{μ} , so ist

$$(4.18) \quad 0 \neq rl \leq lr$$

wegen Lemma 4.5 und Korollar 4.1 gültig. Nach Satz 2.7 bedeutet (4.18), dass a_{μ} in der Tat nullteilerfrei ist.

⁵ Es ist eine offene Frage, wie sich die anderen Charakterisierungen im erwähnten Satz von L. Kovács für $(\times)$ -Verbandshalbgruppen übertragen lassen.

Jetzt zeigen wir, dass jeder Quasiabsorbent k von a_μ ein Quasiabsorbent von e ist. Wegen Lemma 4.5 gilt

$$\begin{aligned} ke \cap ek &= (ke \cap ek)^3 \leq (ke \cap ek) a_\mu (ke \cap ek) = \\ &= keek a_\mu keek \leq ka_\mu k \leq k, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Endlich ist a_μ vollständig quasi-zerlegbar und die minimalen Quasiabsorbenten von a_μ sind Divisionselemente. Damit ist der Beweis beendet.

(Eingegangen: 25. Februar 1964.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] CALAIS, J.: »Demi-groupes quasi-inversifs.« *Comptes Rendus de l'Acad. Sci.* **252** (1961), 257—259.
- [2] CLIFFORD, A. H.—PRESTON, G. B.: *The algebraic theory of semigroups*. I. *Amer. Math. Soc.*, 1961.
- [3] FUCHS, L.: *Partially ordered algebraic systems*. Oxford—London—New York—Paris, 1963.
- [4] ISÉKI, K.: »A characterisation of regular semi-group«, *Proc. Japan Acad.* **32** (1956), 676—677.
- [5] KERTÉSZ, A.—STEINFELD, O.: »A féligegyszerű gyűrűk jellemzéséről.« *M. T. A. III. Oszt. Közl.* **9** (1959) 301—314.
- [6] KOVÁCS, L.: »A note on regular rings«, *Publ. Math. (Debrecen)* **4** (1956), 465—468.
- [7] LAJOS, S.: »A félsoportok ideálméletéhez.« *M. T. A. III. Oszt. Közl.* **11** (1961), 57—66.
- [8] MCCOY, N. H.: »Prime ideals in general rings.« *Amer. J. Math.* **71** (1949) 823—833.
- [9] STEINFELD, O.: »Remark on a paper of N. H. McCoy.« *Publ. Math. (Debrecen)* **3** (1953) 171—173.
- [10] STEINFELD, O.: »Über die Quasiideale von Halbgruppen.« *Publ. Math. (Debrecen)* **4** (1956) 262—275.
- [11] STEINFELD, O.: »Über die Quasiideale von Ringen.« *Acta Sci. Math.* **17** (1956) 170—180.
- [12] STEINFELD, O.: »Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichem Suschkewitsch-Kern.« *Acta Sci. Math.* **18** (1957) 235—242.
- [13] STEINFELD, O.: »Verbandstheoretische Betrachtung gewisser idealtheoretischer Fragen.« *Acta Sci. Math.* **22** (1961) 136—149.
- [14] SZÁSZ, F.: »A főjobbideálokra nézve minimumfeltételű gyűrűk.« *M. T. A. III. Oszt. Közl.* **11** (1961) 135—177.
- [15] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Algebra II*. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.

ТЕОРЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ УСЛОВНО ДИСТРИБУТИВНЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУПП

O. STEINFELD

Резюме

Определенная в настоящей работе $(*)$ -структура-полугруппа является частично упорядоченной полугруппой и полной структурой, удовлетворяющей некоторому условному закону дистрибутивности. Например, все подкольца ассоциативного кольца образуют $(*)$ -структуру-полугруппу.

Для некоторых $(\ast)$ -структур-полугрупп доказываются теоремы разложения, аналогичные теоремам о строении полупростых колец и вполне простых (completely simple) полугрупп.

При доказательстве теорем разложения используются результаты, являющиеся обобщениями некоторых теорем относящихся к односторонним идеалам и квазиидеалам колец и полугрупп.