SIMULTANE ÜBERLAGERUNG GEGEBENER GRAPHEN

von

HORST SACHS[1]

1. Einleitung

Bezeichnungen. Wir betrachten gerichtete und ungerichtete Graphen mit endlich vielen Knotenpunkten und Kanten; Mehrfachkanten und Schlingen sind zugelassen. Das Wort *Graph* (ohne Zusatz) bezeichnet stets einen ungerichteten Graphen; es soll jedoch zwischen einem Paar entgegengesetzt gerichteter Kanten (K, K'), (K', K) mit den gleichen Endknotenpunkten K, K' $(K' \neq K)$ und einer ungerichteten Kante $[K, K']$ mit denselben Endknotenpunkten nicht unterschieden werden, und ebenso soll es gestattet sein, je zwei zum gleichen Knotenpunkt gehörige gerichtete Schlingen $(K, K)_1$, $(K, K)_2$ durch eine ungerichtete Schlinge $[K, K]$ zu ersetzen und umgekehrt, so daß jeder (ungerichtete) Graph auch als spezieller gerichteter Graph (und umgekehrt jeder gerichtete Graph, dessen sämtliche gerichtete Kanten sich paarweise zu ungerichteten Kanten zusammenfassen lassen, auch als ungerichteter Graph) aufgefaßt werden kann.

Ein Graph heißt *regulär vom Grade r*, wenn mit jedem seiner Knotenpunkte genau r (ungerichtete) Kanten inzidieren; Schlingen sind doppelt zu zählen. Ein *linearer* bzw. *quadratischer Faktor* eines regulären Graphen G ist ein regulärer Untergraph von G mit den gleichen Knotenpunkten wie G vom Grade 1 bzw. 2. Ein *gerichteter Linearfaktor* von G ist ein gerichteter Untergraph von G mit den gleichen Knotenpunkten wie G und mit der Eigenschaft, daß in jedem seiner Knotenpunkte genau eine gerichtete Kante entspringt und genau eine gerichtete Kante mündet.

Ein (gerichteter) Graph heißt *paar*, wenn seine Knotenpunkte so in zwei Klassen eingeteilt werden können, daß zwei Knotenpunkte der gleichen Klasse niemals durch eine Kante verbunden sind.

Die Knotenpunkte eines (gerichteten oder ungerichteten) Graphen G seien numeriert, g_{ik} sei die Anzahl der gerichteten Kanten, welche vom Knotenpunkt K_i zum Knotenpunkt K_k laufen (g_{ii} sei die Anzahl der zum Knotenpunkt K_i gehörenden gerichteten Schlingen). Die Matrix

$$\mathbf{G} = (g_{ik})$$

heißt die *Adjazenzmatrix* von G; durch sie ist G eindeutig bestimmt.

Problemstellung. In den Theorien der verschiedenen Strukturen spielen die Begriffe „Unterstruktur" und „Faktorstruktur" eine große Rolle. Auch in

[1] Ilmenau, Technische Hochschule.

der Graphentheorie stößt man häufig auf den Begriff des „Untergraphen", während jedoch der Begriff des „Faktorgraphen" seltener angetroffen wird. Das mag daran liegen, daß der Begriff der homomorphen Abbildung, der dem Begriff der Faktorstruktur zugrunde liegt, für die Zwecke der Graphentheorie in seiner allgemeinen Fassung zu weit ist, und es entsteht die Frage, durch welche naturgemäßen Bedingungen er sinnvoll eingeschränkt werden kann. Es liegt nahe, lokale Homöomorphie der Abbildung zu fordern; wegen einiger Analogien wollen wir in diesem Falle den Bildgraphen als Teiler bezeichnen:

Der zusammenhängende Graph D heißt ein *Teiler* des Graphen G, wenn G homomorph und lokal-homöomorph auf D abgebildet werden kann.

Der Begriff der lokal-homöomorphen Abbildung bedarf der Präzisierung: Der folgenden Definition des Teilers D von G ist die in einem gewissen weiteren Sinne lokal-homöomorphe Abbildung von G auf D zugrunde gelegt; wir werden anschließend zeigen, daß dann D stets auch im engeren Sinne (d. h. unter Einbeziehung der Kanten in die Abbildung) lokal-homöomorphes Bild von G ist. — Wir veranschaulichen die Zuordnung zwischen den Knotenpunkten bzw. Kanten, indem wir Original und Bild jeweils mit der gleichen Farbe versehen.

Definition. *Die d Knotenpunkte des zusammenhängenden Graphen D seien paarweise verschieden gefärbt, die Farben seien von 1 bis d numeriert, und von einem Knotenpunkt K der Farbe i mögen genau d_{ik} Kanten ausgehen, welche zu einem Knotenpunkt der Farbe k führen ($i, k = 1, 2, \ldots, d$; d_{ii} ist gleich der doppelten Anzahl der zum Knotenpunkt K gehörigen Schlingen). D heißt genau dann ein Teiler des Graphen G, wenn es möglich ist, auch die Knotenpunkte von G je mit einer der Farben $1, 2, \ldots, d$ zu versehen derart, daß auch in G von jedem Knotenpunkt der Farbe i genau d_{ik} Kanten ausgehen, welche zu Knotenpunkten der Farbe k führen ($i, k = 1, 2, \ldots, d$).*

Es gilt folgender Satz:

(*) *Es sei D ein Teiler von G, jedem Knotenpunkt von G sei — im Sinne der vorstehenden Definition des Teilers — eindeutig ein Knotenpunkt von D als Bild zugeordnet. Die Kanten von D seien paarweise verschieden gefärbt, die verwendeten Farben seien $f_1, f_2, \ldots, f_l$. Dann ist es immer möglich, die Kanten von G ebenfalls je mit einer der Farben $f_1, f_2, \ldots, f_l$ zu versehen derart, daß für $\lambda = 1, 2, \ldots, l$ jeder Knotenpunkt von G mit genau so vielen Kanten der Farbe f_λ inzidiert wie der zugehörige Bildknotenpunkt in D; hierbei sind Schlingen doppelt zu zählen.*

In der Sprechweise der kombinatorischen Topologie können wir also sagen:

D ist genau dann ein Teiler von G, wenn G als unverzweigter Überlagerungskomplex von D aufgefaßt werden kann.

Der Beweis der Behauptung (*) folgt am Schluß der Einleitung.

Immer wenn im Folgenden vorausgesetzt wird, daß ein Graph G_1 Teiler eines Graphen G_2 sei, wollen wir annehmen, daß damit zugleich im oben ausgeführten Sinne eine bestimmte Zuordnung der Knotenpunkte und Kanten von G_1 zu denen von G_2 gegeben sei; auf diese können wir dann im weiteren Verlauf bezug nehmen.

Für „D ist Teiler von G" sagen wir auch

„G ist Vielfaches von D"

und schreiben

$$D \mid G .$$

Die Teilerrelation ist offenbar

transitiv: Aus $A \mid B$ und $B \mid C$ folgt $A \mid C$,

reflexiv: $A \mid A$

und in folgendem Sinne *antisymmetrisch:*

Aus $A \mid B$ und $B \mid A$ folgt: A ist isomorph zu B.

Das Problem, zu einem gegebenen zusammenhängenden Graphen G alle zusammenhängenden Vielfachen von G zu bestimmen, wird in den Lehrbüchern der kombinatorischen Topologie gelöst (siehe z. B. [1], p. 114).

Wir beschäftigen uns hier mit dem Problem, zu zwei gegebenen zusammenhängenden Graphen G_1, G_2 ein gemeinschaftliches Vielfaches G zu finden, d. h. einen Graphen G mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$ zu konstruieren. In § 3 wird eine einfache notwendige Bedingung für die Existenz eines solchen Graphen G angegeben (Satz 1). In § 4 setzen wir voraus, daß G_1 und G_2 regulär vom gleichen Grade sind, und führen die Konstruktion eines gemeinschaftlichen Vielfachen effektiv aus. Die Frage nach der Minimalzahl der hierzu benötigten Knotenpunkte führt zu folgenden Ergebnissen: *Wenn G_1 und G_2 n_1 bzw. n_2 Knotenpunkte haben, so existiert stets ein gemeinschaftliches Vielfaches mit nicht mehr als $2\,n_1\,n_2$ Knotenpunkten* (Satz 3). *Haben überdies G_1 und G_2 einen gemeinsamen Teiler mit d Knotenpunkten, so existiert stets ein gemeinschaftliches Vielfaches mit nicht mehr als $2\,\frac{n_1\,n_2}{d}$ Knotenpunkten* (Satz 5).

*

Beweis *der Behauptung* (*):

Wir betrachten zunächst zwei beliebige verschiedene Knotenpunkte K_i, K_k von D (der Index gebe die Farbe des Knotenpunktes an). Ist dann $d_{ik} = 0$, d. h. sind K_i und K_k nicht verbunden, so ist auch in G kein Knotenpunkt der Farbe i mit einem solchen der Farbe k verbunden. Ist aber $d_{ik} > 0$, so bildet die Gesamtheit der Kanten, welche in G einen Knotenpunkt der Farbe i mit einem solchen der Farbe k verbinden (zusammen mit den Endknotenpunkten aller dieser Kanten) einen Untergraphen U von G, welcher offenbar regulär vom Grade d_{ik} ist. U enthält sämtliche Knotenpunkte der Farben i und k von G und nur diese; zwei Knotenpunkte gleicher Farbe sind in U nicht verbunden, U ist also ein paarer Graph. Nach einem bekannten Satz von König können wir U in d_{ik} Linearfaktoren $L_1, L_2, \ldots, L_{d_{ik}}$ zerlegen. Sind dann (bei willkürlicher Numerierung) $E_1, E_2, \ldots, E_{d_{ik}}$ die Kanten, welche die Knotenpunkte K_i und K_k in D miteinander verbinden, so versehen wir jede Kante des Linearfaktors L_α mit der Farbe der Kante E_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, d_{ik}$).

Schließlich betrachten wir einen beliebigen Knotenpunkt K_i von D und die zugehörige Zahl d_{ii}. Ist $d_{ii} = 0$, d. h. ist K_i durch keine Schlinge mit sich selbst verbunden, so sind auch in G keine zwei Knotenpunkte der Farbe i miteinander verbunden. Ist aber $d_{ii} > 0$, so bildet die Gesamtheit der Kanten (einschließlich Schlingen) von G, deren beide Endknotenpunkte die Farbe i haben (zusammen mit allen diesen Knotenpunkten) einen Untergraphen V von G, welcher offenbar regulär vom Grade d_{ii} ist. V enthält sämtliche Knotenpunkte der Farbe i von G und nur diese. Da d_{ii} gerade ist, können wir V nach einem bekannten Satz von Petersen in $\frac{1}{2}\,d_{ii}$ quadratische Faktoren Q_1, $Q_2, \ldots, Q_{d_{ii}/2}$ zerlegen. Sind dann $S_1, S_2, \ldots, S_{d_{ii}/2}$ die Schlingen, welche zum

Knotenpunkt K_i gehören, so versehen wir jede Kante von Q_β mit der Farbe der Schlinge S_β ($\beta = 1, 2, \ldots, d_{ii}/2$).

Es ist leicht einzusehen, daß auf diese Weise jede Kante von G genau eine der Farben $f_1, f_2, \ldots, f_l$ erhält und daß die so gewonnene Färbung die in (*) genannte Eigenschaft besitzt.

2. Summe, direktes und paares Produkt zweier (gerichteter) Graphen

Für die zu führenden Beweise erweist es sich als zweckmäßig, folgende Graphenverknüpfungen zu betrachten:

Summe. A und B seien zwei beliebige gerichtete Graphen über der gleichen Knotenpunktmenge $\mathfrak{K}$, $\mathbf{A} = (a_{ik})$ und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ seien die zugehörigen Adjazenzmatrizen. Dann definiert die Matrix $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ik} + b_{ik})$ einen gerichteten Graphen S über $\mathfrak{K}$, die Summe von A und B. Wir schreiben

$$S = A + B\,.$$

Entsprechend ist die Summe für mehr als zwei Summanden definiert, wir verwenden auch das Summenzeichen Σ.

Direktes Produkt. A und B seien zwei beliebige gerichtete Graphen, A habe die Knotenpunkte K_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), B habe die Knotenpunkte K'_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Wir führen $m \cdot n$ neue Knotenpunkte K_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) ein und verbinden diese folgendermaßen durch gerichtete Kanten: Die Anzahl $m_{ij,kl}$ der Kanten, die von einem Knotenpunkt K_{ij} zu einem Knotenpunkt K_{kl} laufen, sei gleich der Anzahl der Kanten, die in A von K_i nach K_k laufen, multipliziert mit der Anzahl der Kanten, die in B von K'_j nach K'_l laufen, oder kurz:

$$m_{ij,kl} = a_{ik} \cdot b_{jl}\,.$$

Der Graph M, der hierbei entsteht, heiße das direkte Produkt von A und B; wir schreiben

$$M = A \times B\,.$$

Die Adjazenzmatrix $\mathbf{M}$ von M erhält man, wenn man in $\mathbf{A}$ jedes Element a_{ik} durch die Matrix $a_{ik} \cdot \mathbf{B}$ ersetzt.

Paares Produkt. A und B seien zwei beliebige gerichtete Graphen über der gleichen Knotenpunktmenge $\mathfrak{K} = \{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$. $K'_i = K_{n+i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) seien n weitere Knotenpunkte, ferner sei $\mathfrak{K}' = \{K'_1, K'_2, \ldots, K'_n\} = \{K_{n+1}, K_{n+2}, \ldots, K_{2n}\}$. Wir definieren über

$$\mathfrak{K} + \mathfrak{K}' = \{K_1, K_2, \ldots, K_{2n}\}$$

einen gerichteten Graphen P mit der Adjazenzmatrix

$$\mathbf{P} = (p_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2n)$$

durch folgende Festsetzung:

$$p_{ik} = \begin{cases} a_{i,\,k-n} & \text{für } K_i \in \mathfrak{K},\ K_k \in \mathfrak{K}' \\ b_{i-n,\,k} & \text{für } K_i \in \mathfrak{K}',\ K_k \in \mathfrak{K} \\ 0 & \text{für } K_i \in \mathfrak{K},\ K_k \in \mathfrak{K} \\ & \text{sowie für } K_i \in \mathfrak{K}',\ K_k \in \mathfrak{K}'\,, \end{cases}$$

d. h. es sei

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

P ist ersichtlich ein (gerichteter) paarer Graph, der paares Produkt von A und B heißen möge; wir schreiben

$$P = A \circ B.$$

P ist offenbar genau dann ungerichtet, wenn $\mathbf{B}$ zu $\mathbf{A}$ transponiert ist. Ist $B = A$, so nennen wir $A \circ A$ das *paare Quadrat* von A.

H bezeichne den Graphen, der aus einer ungerichteten Kante und deren beiden Endknotenpunkten besteht. Dann gilt

$$A \circ A = H \times A.$$

Für die Definition des direkten Produktes und damit auch des paaren Quadrates ist — anders als für die Definition der Summe und des paaren Produktes im allgemeinen Falle — die Anordnung der Knotenpunkte nicht wesentlich.

Ist G ungerichtet, so ist auch $G \circ G$ ungerichtet, und man veranschaulicht sich $G \circ G$ auf folgende Weise: Der Graph G' sei isomorph zu G; dann kann man sich G und G' in zwei parallelen Ebenen kongruent übereinanderliegend gezeichnet denken, und man erhält $G \circ G$, indem man jedes Paar übereinanderliegender (ungerichteter) Kanten $[K_i, K_j]$, $[K'_i, K'_j]$ durch das zugehörige Paar „sich kreuzender" Kanten $[K_i, K'_j]$, $[K'_i, K_j]$ ersetzt.

Aus dieser Konstruktion liest man sofort folgende Eigenschaften des paaren Quadrates eines ungerichteten Graphen G ab:

(A) *Ist G zusammenhängend und nicht paar, so ist auch $G \circ G$ zusammenhängend.*

(B) *Ist G zusammenhängend und paar, so zerfällt $G \circ G$ in genau zwei zusammenhängende Komponenten, welche beide zu G isomorph sind.*

(C) *Ist G zusammenhängend, so gilt*

$$G \mid G \circ G.$$

Außerdem benötigen wir folgenden Hilfssatz:

(D) *Der Graph H sei paar, und der Graph G sei ein nicht-paarer Teiler von H. Dann ist auch $G \circ G$ ein Teiler von H.*

Beweis. Wir konstruieren $G \circ G$ auf die oben angegebene Weise, der Knotenpunkt K_i erhält die „Farbe" $(i, 1)$, der darüberliegende Knotenpunkt $K'_i = K_{n+i}$ erhält die Farbe $(i, 2)$. Dann haben verschiedene Knotenpunkte von $G \circ G$ verschiedene Farben, und die Farben zweier durch eine Kante verbundener Knotenpunkte haben verschiedene zweite Komponenten.

Da H paar ist, können wir die Knotenpunkte von H so in zwei Klassen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ einteilen, daß zwei Knotenpunkte der gleichen Klasse niemals durch eine Kante verbunden sind. Nun ordnen wir auch jedem Knotenpunkt von H eine Farbe (i, j) zu, wobei i die Nummer seines Bildknotenpunktes in G und j die Nummer der Klasse ist, welcher er angehört ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2$).

Diese Färbung der Knotenpunkte vermittelt eine lokal-homöomorphe homomorphe Abbildung von H auf $G \circ G$, denn die Farben der Nachbarn eines Knotenpunktes von H stimmen ersichtlich mit den Farben der Nachbarn des zugehörigen Knotenpunktes von $G \circ G$ (in ihrer Gesamtheit und je mit der richtigen Multiplizität gezählt) sowohl in der ersten Komponente i (wegen $G \mid H$) als auch in der zweiten Komponente j (weil H und $G \circ G$ beide paar sind) überein.

3. Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines gemeinschaftlichen Vielfachen

Satz 1. *Es seien G_1 und G_2 zwei gegebene zusammenhängende Graphen. $n_i^{(j)}$ sei die Anzahl der in G_i vorkommenden Knotenpunkte vom Grade j, n_i sei die Anzahl aller in G_i vorkommenden Knotenpunkte ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, \ldots$). Wenn dann ein Graph G mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$ und $G_2 \mid G$ existiert, so gilt*

$$n_2 \, n_1^{(j)} = n_1 \, n_2^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Beweis. $n^{(j)}$ und n seien die Anzahlen der Knotenpunkte vom Grade j bzw. aller Knotenpunkte von G. G ist Überlagerungsgraph zu G_1, jeder Knotenpunkt K von G_1 wird von je gleich vielen Knotenpunkten von G überlagert (s. [1], loc. cit.), welche überdies alle den gleichen Grad wie K haben. Folglich gibt es eine natürliche Zahl c_1 so, daß

$$n^{(j)} = c_1 \cdot n_1^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

und entsprechend eine natürliche Zahl c_2 mit

$$n^{(j)} = c_2 \cdot n_2^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Durch Summation über j ergibt sich aus (2) und (3)

$$n = c_1 \, n_1 = c_2 \, n_2 \,; \tag{4}$$

aus (2) und (3) folgt weiter

$$c_1 \, n_1^{(j)} = c_2 \, n_2^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

und aus (4) und (5) ergibt sich die behauptete Relation (1).

Bemerkung. Ist insbesondere G_1 regulär vom Grade r und gilt $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$, so sind G und G_2 notwendig ebenfalls regulär vom Grade r. Für reguläre Graphen gleichen Grades ist die Bedingung (1) von selbst erfüllt. Diesem Fall wenden wir uns im folgenden Abschnitt zu.

4. Konstruktion gemeinschaftlicher Vielfacher für gegebene reguläre Graphen

Satz 2. *G_1 und G_2 seien zwei beliebige zusammenhängende reguläre Graphen vom Grade r mit n_1 bzw. n_2 Knotenpunkten, welche beide in lineare und quadratische Faktoren zerfallen.*[1] *Dann existiert ein zusammenhängender regulärer Graph G vom Grade r mit nicht mehr als $n_1 \, n_2$ Knotenpunkten, welcher ebenfalls in lineare und quadratische Faktoren zerfällt, mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.*

---

[1] Das ist bekanntlich gewiß der Fall, wenn r gerade ist, sowie für $r = 3$, wenn G_1 und G_2 keine Brücken besitzen.

Zusatz. *Sind G_1 und G_2 außerdem beide paar, so existiert sogar ein paarer zusammenhängender Graph G mit nicht mehr als $\frac{1}{2} n_1 n_2$ Knotenpunkten und mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.*

Beweis. Indem wir nötigenfalls Linearfaktoren paarweise zu quadratischen Faktoren zusammenfassen, dürfen wir annehmen, daß sowohl G_1 als auch G_2 in genau u quadratische und v lineare Faktoren zerfällt ($u \geqq 0$, $v \geqq 0$; $2u + v = r$). Die quadratischen Faktoren Q_i und die linearen Faktoren L_i von G_i werden folgendermaßen numeriert:

$$Q_i^{(1)}, Q_i^{(2)}, \ldots, Q_i^{(u)}; \; L_i^{(2u+1)}, L_i^{(2u+2)}, \ldots, L_i^{(2u+v)} = L_i^{(r)} \qquad (i = 1, 2)\,.$$

Wird nun jeder Kreis eines quadratischen Faktor $Q_i^{(j)}$ in beliebiger Weise fest orientiert, so geht hierdurch $Q_i^{(j)}$ in einen gerichteten Linearfaktor $L_i^{(j)}$ über; der entgegengesetzt orientierte Linearfaktor werde mit $L_i^{(u+j)}$ bezeichnet, so daß also $L_i^{(j)} + L_i^{(u+j)} = Q_i^{(j)}$ ($j = 1, 2, \ldots, u$; $i = 1, 2$). Nach dieser Festsetzung haben wir also

$$G_i = \sum_{\varrho=1}^{r} L_i^{(\varrho)} \qquad (i = 1, 2)\,.$$

Dann ist

$$G_0 = \sum_{\varrho=1}^{r} L_1^{(\varrho)} \times L_2^{(\varrho)}$$

ein ungerichteter Graph mit $n_1 n_2$ Knotenpunkten, u ungerichteten quadratischen Faktoren

$$Q_0^{(j)} = L_1^{(j)} \times L_2^{(j)} + L_1^{(u+j)} \times L_2^{(u+j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, u)$$

und v ungerichteten Linearfaktoren

$$L_0^{(2u+k)} = L_1^{(2u+k)} \times L_2^{(2u+k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, v)\,.$$

G_1 habe die Knotenpunkte K_i^1

G_2 habe die Knotenpunkte K_j^2

G_0 habe die Knotenpunkte K_{ij}^0 $\qquad (i = 1, 2, \ldots, n_1;\; j = 1, 2, \ldots, n_2)$,

wobei die Indizierung der Knotenpunkte von G_0 durch die direkte Multiplikation der Linearfaktoren gegeben ist. Man macht sich leicht klar: Durch die Zuordnung

$$K_{i1}^0, K_{i2}^0, \ldots, K_{in_2}^0 \to K_i^1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_1)$$

ist eine homomorphe und lokal-homöomorphe Abbildung von G_0 auf G_1 definiert, das bedeutet $G_1 \mid G_0$, und ebenso schließen wir $G_2 \mid G_0$ (vgl. Abb. 1); also hat G_0 oder — falls G_0 nicht zusammenhängend ist — jede zusammenhängende Komponente von G_0 alle im Satz für G geforderten Eigenschaften.

Beweis *des Zusatzes:* Sind G_1 und G_2 paar, so gilt $n_1 \equiv n_2 \equiv 0 \pmod 2$, und die Knotenpunktmengen von G_1 und G_2 zerfallen je in zwei Klassen von je $\frac{1}{2} n_1$ bzw. $\frac{1}{2} n_2$ Knotenpunkten derart, daß zwei Knotenpunkte der gleichen Klasse niemals durch eine Kante verbunden sind. Wir denken uns die

Knotenpunkte so numeriert, daß jeweils die Knotenpunkte mit ungeradem Index die eine und die mit geradem Index die andere Klasse bilden, so daß also jede Kante einen Knotenpunkt mit geradem Index mit einem solchen mit ungeradem Index verbindet.

G_1 und G_2 zerfallen nach einem bekannten Satz von KŐNIG als reguläre paare Graphen vollständig in Linearfaktoren, wir können also die im Beweis

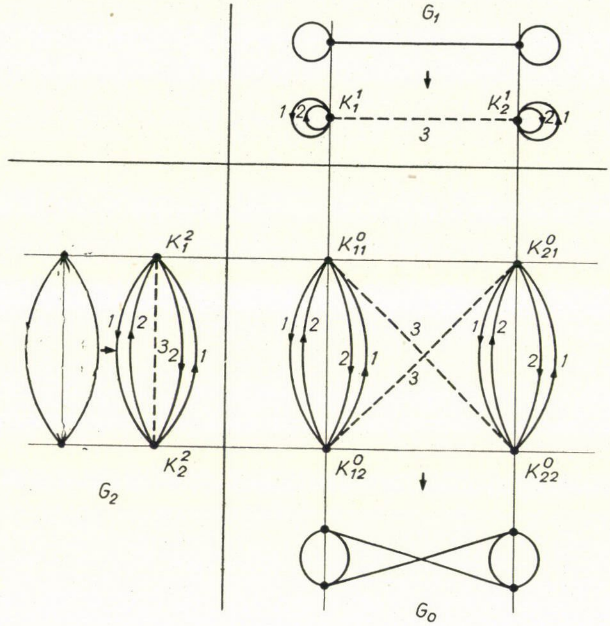

Abb. 1.

zu Satz 2 angegebene Konstruktion mit $u = 0$ und $v = r$ durchführen. Wir teilen die Knotenpunkte K_{ij}^0 in zwei Klassen ein: Diejenigen K_{ij}^0 mit $i \equiv j$ (mod 2) bilden die eine, diejenigen mit $i \not\equiv j$ (mod 2) bilden die andere Klasse. Jede dieser Klassen enthält genau $\frac{1}{2} n_1 \cdot n_2$ Knotenpunkte.

Auf grund der Konstruktionsvorschrift für G_0 ist klar: Jede der neu eingeführten Kanten verbindet zwei Knotenpunkte miteinander, welche zur gleichen Klasse gehören. Folglich zerfällt G_0 in mehrere (untereinander nicht verbundene) Komponenten, von denen keine mehr als $\frac{1}{2} n_1 n_2$ Knotenpunkte besitzt, und jede dieser Komponenten hat sowohl G_1 als auch G_2 zu Teilern. Diese sind überdies paar, da sie paare Teiler haben.

Satz 3. *G_1 und G_2 seien zwei beliebige zusammenhängende reguläre Graphen vom Grade r mit n_1 bzw. n_2 Knotenpunkten. Es sei*

$h = \frac{1}{2} n_1 n_2$, *falls G_1 und G_2 beide paar sind,*

$h = n_1 n_2$, *falls genau einer der Graphen G_1, G_2 paar ist,*

$h = 2 n_1 n_2$, *falls keiner der Graphen G_1, G_2 paar ist.*

Dann existiert ein zusammenhängender regulärer p a a r e r Graph G mit nicht mehr als h Knotenpunkten und mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.

Bemerkung. Aus Satz 3 folgt insbesondere, daß es zu zwei beliebigen zusammenhängenden regulären Graphen gleichen Grades stets ein gemeinschaftliches Vielfaches mit nicht mehr als $2\, n_1\, n_2$ Knotenpunkten gibt. Diese Schranke ist scharf in dem Sinne, daß es Fälle gibt, in welchen kein gemeinschaftliches Vielfaches mit weniger als $2\, n_1\, n_2$ Knotenpunkten existiert; Beispiel siehe Abb. 2.

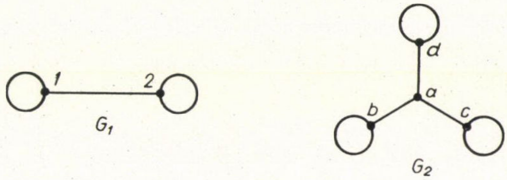

Abb. 2.

(Man zeigt leicht durch Probieren, daß kein gemeinschaftliches Vielfaches mit 4, 8 oder 12 Knotenpunkten existiert.)

Es kann jedoch neben dem paaren Vielfachen, dessen Existenz in Satz 3 behauptet wird, weitere nicht-paare gemeinschaftliche Vielfache mit $2\, n_1\, n_2$ Knotenpunkten geben; für unser Beispiel siehe Abb. 3.

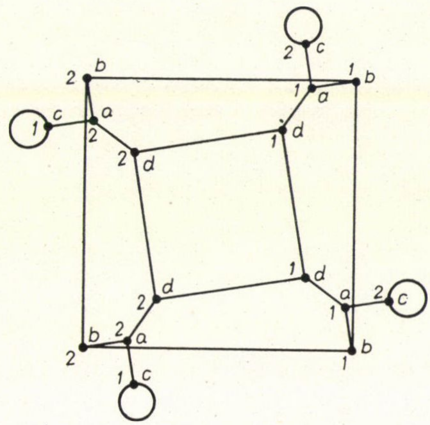

Abb. 3.

Beweis *von Satz* 3. Wenn G_1 und G_2 beide paar sind, so stimmt die Behauptung mit dem Zusatz zu Satz 2 überein.

Wenn genau einer der beiden Graphen, etwa G_1 paar ist, so betrachten wir die Graphen G_1 und $G_2^* = G_2 \circ G_2$; nach dem Zusatz zu Satz 2 existiert dann ein paarer Graph G^* mit nicht mehr als $\frac{1}{2} n_1 \cdot 2\, n_2 = n_1\, n_2$ Knotenpunkten und mit der Eigenschaft $G_1 | G^*$, $G_2^* | G^*$. Wegen $G_2 | G_2 \circ G_2 = G_2^*$ gilt dann auch $G_2 \mid G^*$.

Wenn keiner der Graphen G_1, G_2 paar ist, so betrachten wir die Graphen $G_1^* = G_1 \circ G_1$ und $G_2^* = G_2 \circ G_2$ und wenden wieder den Zusatz zu Satz 2 an: hiernach existiert ein paarer Graph G^{**} mit nicht mehr als $\frac{1}{2}\, 2\, n_1 \cdot 2\, n_2 = 2\, n_1 n_2$ Knotenpunkten und mit der Eigenschaft $G_1^* \mid G^{**}$, $G_2^* \mid G^{**}$. Daraus ergibt sich wegen $G_1 \mid G_1^*$ und $G_2 \mid G_2^*$ sofort $G_1 \mid G^{**}$ und $G_2 \mid G^{**}$.

Satz 4. *G_1 und G_2 seien zwei beliebige zusammenhängende reguläre Graphen mit n_1 bzw. n_2 Knotenpunkten, welche einen gemeinsamen Teiler D mit d Knotenpunkten besitzen, der in lineare und quadratische Faktoren zerfällt. Dann existiert ein zusammenhängender regulärer Graph G mit nicht mehr als $\frac{n_1 n_2}{d}$ Knotenpunkten und mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.*

Bemerkung. Der Zusatz zu Satz 2 ergibt sich aus Satz 4 als Spezialfall, die Rolle von D hat der aus zwei Knotenpunkten und r diese Knotenpunkte miteinander verbindenden Kanten bestehende Graph.

Beweis *von Satz* 4 (vgl. dazu Abb. 4): Die Knotenpunkte von D seien von 1 bis d numeriert. Auf der Menge $\{K\}$ aller Knotenpunkte von G_1 und G_2 definieren wir nun eine Funktion $\delta = \delta(K)$ durch die Vorschrift:

$\delta(K)$ ist gleich der Nummer desjenigen Knotenpunktes von D, auf welchen K abgebildet wird (durch den Homomorphismus, welcher der Relation $D \mid G_1$ bzw. $D \mid G_2$ zugrunde liegt).

D wird wie beim Beweis von Satz 2 in r (gerichtete und ungerichtete) Linearfaktoren $L^{(\varrho)}$ zerlegt; diesen entsprechen je r Linearfaktoren $L_1^{(\varrho)}$ von G_1 und $L_2^{(\varrho)}$ von G_2 ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$).[2] Wie beim Beweis von Satz 2 konstruieren wir nun den Graphen

$$G^* = \sum_{\varrho=1}^{r} L_1^{(\varrho)} \times L_2^{(\varrho)}$$

mit den $n_1 \cdot n_2$ Knotenpunkten K_{ij}^* ($i = 1, 2, \ldots, n_1$; $j = 1, 2, \ldots, n_2$); dabei entspreche K_{ij}^* dem Knotenpunktpaar $K_i^1 \in G_1$, $K_j^2 \in G_2$. Es gilt $G_1 \mid G^*$, $G_2 \mid G^*$. $\mathfrak{C}$ sei die Klasse derjenigen Knotenpunkte K_{ij}^* von G^*, für welche $\delta(K_i^1) = \delta(K_j^2)$ ist; $\mathfrak{C}$ enthält offenbar genau $\frac{n_1 n_2}{d}$ Knotenpunkte. Wir wollen zeigen, daß in G^* kein Knotenpunkt von $\mathfrak{C}$ mit einem nicht zu $\mathfrak{C}$ gehörigen Knotenpunkt durch eine Kante verbunden ist; daraus folgt dann, daß $\mathfrak{C}$ einen Untergraphen G von G^* mit $\frac{n_1 n_2}{d}$ Knotenpunkten bestimmt, welcher ebenfalls die Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$ besitzt, womit dann der Satz bewiesen sein wird.

Wir betrachten eine von dem Knotenpunkt $K_{ij}^* \in \mathfrak{C}$ ausgehende gerichtete Kante $E^* = (K_{ij}^*, K_{i'j'}^*)$ von G^*, welche dem Linearfaktor $L_1^{(\varrho_0)} \times L_2^{(\varrho_0)}$ angehören möge. Diese hat in G_1 die Bildkante $E_1 = (K_i^1, K_{i'}^1) \in L_1^{(\varrho_0)}$ und in

[2] Allgemein gilt: Sind D und G reguläre Graphen mit $D \mid G$ und besitzt D einen (gerichteten oder ungerichteten) regulären Faktor, so bilden die zu den Kanten dieses Faktors gehörigen Originalkanten in G einen entsprechenden regulären Faktor von G. Zu einer Faktorzerlegung von D gehört eine entsprechende Faktorzerlegung von G.

Man beachte aber, daß sich umgekehrt die Eigenschaft eines Graphen, eine Faktorzerlegung bestimmter Art zu besitzen, nicht allgemein auf seine Teiler überträgt: Der PETERSENsche Graph Π ist ein Teiler des Pentagondodekaeder-Graphen Δ, Δ zerfällt in 3 Linearfaktoren, Π dagegen nicht.

G_2 die Bildkante $E_2 = (K_j^2, K_{j'}^2) \in L_2^{(\varrho_0)}$. E_1 und E_2 wiederum haben in D Bildkanten, welche dem Linearfaktor $L^{(\varrho_0)}$ angehören und von Knotenpunkten mit den Nummern $\delta(K_i^1)$ und $\delta(K_j^2)$ beziehentlich ausgehen. Wegen $\delta(K_i^1) = \delta(K_j^2)$ folgt hieraus aber sogleich, daß diese beiden Kanten identisch sind, daß also E_1 und E_2 in D dieselbe Bildkante und damit $K_{i'}^1$ und $K_{j'}^2$ in D denselben Bildknotenpunkt haben. Das bedeutet aber $\delta(K_{i'}^1) = \delta(K_{j'}^2)$, und folglich gehört auch $K_{i'j'}^*$ zu $\mathfrak{C}$.

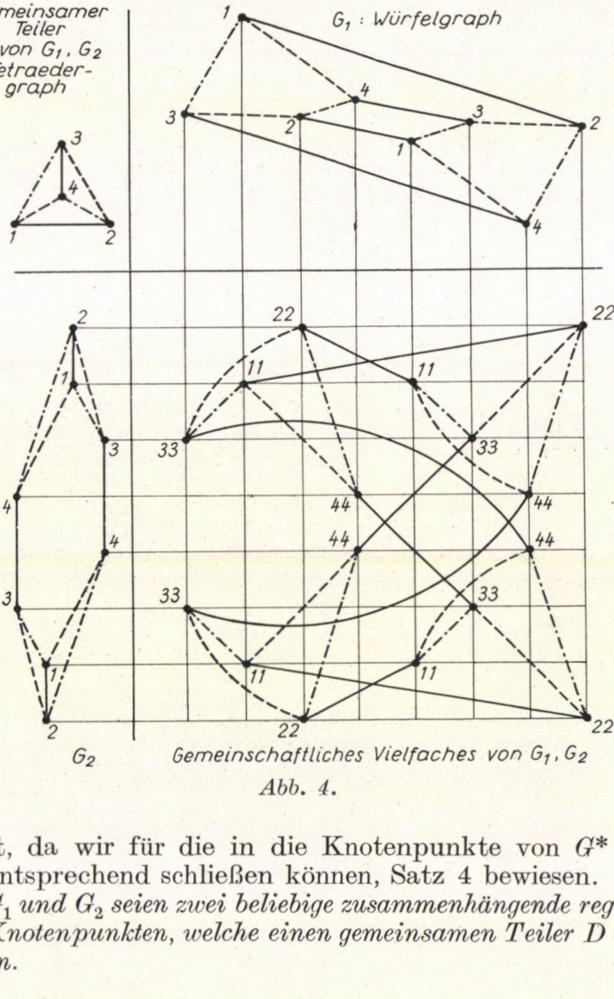

Abb. 4.

Damit ist, da wir für die in die Knotenpunkte von G^* einlaufenden Kanten ganz entsprechend schließen können, Satz 4 bewiesen.

Satz 5. *G_1 und G_2 seien zwei beliebige zusammenhängende reguläre Graphen mit n_1 bzw. n_2 Knotenpunkten, welche einen gemeinsamen Teiler D mit d Knotenpunkten besitzen.*

Es sei

$h = \frac{1}{2}\,\frac{n_1 n_2}{d}$, *falls D nicht paar ist, aber G_1 und G_2 beide paar sind,*

$h = \frac{n_1 n_2}{d}$, *falls D paar ist oder falls D nicht paar und genau einer der Graphen G_1, G_2 paar ist,*

$h = 2\,\frac{n_1 n_2}{d}$, *falls keiner der Graphen D, G_1, G_2 paar ist.*

Dann existiert ein zusammenhängender regulärer paarer Graph G mit nicht mehr als h Knotenpunkten und mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.

Beweis *von Satz* 5.

1. D ist nicht paar, G_1 und G_2 sind beide paar.

Nach (D) gilt sogar $D \circ D \mid G_1$, $D \circ D \mid G_2$. Da $D \circ D$ als paarer Graph in Linearfaktoren zerfällt, kann Satz 4 mit $D^* = D \circ D$ angewandt werden: Es gibt einen zusammenhängenden regulären Graphen G mit $\frac{n_1 n_2}{d^*} = \frac{n_1 n_2}{2d}$ Knotenpunkten und mit $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$, und da G den paaren Teiler D^* besitzt, ist G gewiß paar.

2. a) D ist paar.

Dann folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 4.

b) D ist nicht paar, genau einer der Graphen G_1, G_2, etwa G_1, ist paar.

Dann sei $D^* = D \circ D$, $G_2^* = G_2 \circ G_2$; aus Satz 4, angewandt auf die Graphen G_1, G_2^*, D^*, ergibt sich die Existenz eines paaren Graphen G mit $\frac{n_1 \cdot 2 n_2}{2d} = \frac{n_1 n_2}{d}$ Knotenpunkten mit $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.

3. Keiner der Graphen D, G_1, G_2 ist paar.

Jetzt sei $D^* = D \circ D$, $G_1^* = G_1 \circ G_1$, $G_2^* = G_2 \circ G_2$; wie vorher ergibt sich die Existenz eines paaren Graphen G mit $\frac{2 n_1 \cdot 2 n_2}{2d} = 2 \frac{n_1 n_2}{d}$ Knotenpunkten mit $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.

Damit ist Satz 5 bewiesen.

(Eingegangen: 29. April, 1964.)

LITERATUR

[1] Reidemeister, K.: *Einführung in die kombinatorische Topologie*. Braunschweig 1932

ОДНОВРЕМЕННОЕ ПОКРЫТИЕ ДАННЫХ ГРАФОВ

H. SACHS

Резюме

Пусть D и G односвязные, неориентированные графы. D называется делителем G и G называется кратным D, если D является гомоморфным и локально гомеоморфным отображением от G, т. е. если G является неразветвленным покрывающим множеством от D.

В работе изучена задача, найти к данным двум односвязным неориентированным графам общий кратный.

В § 3 дается простое необходимое условие для существования такого графа (Теорема 1).

В § 4 предположено, что G_1 и G_2 являются регулярными *равными порядками*. В этом случае конструкция общего кратного может быть эффек-

тивно выполнена. Вопрос о минимальном числе вершин, потребованных для этого ведет к следующему результату: *если* G_1 *и* G_2 *имеют* n_1 *и* n_2 *вершин, тогда всегда существует общий кратный с не больше чем* $2n_1n_2$ *вершинами* (Теорема 3). *Если* G_1 *и* G_2 *имеют общий делитель с* d *вершинами, тогда всегда существует общий кратный с не больше чем* $2\frac{n_1n_2}{d}$ *вершинами.*