MAXIMALE SYSTEME UNABHÄNGIGER KANTEN

von

T. GALLAI

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit kommen nur solche endliche Graphen vor, die weder Schlingen, noch mehrfache Kanten enthalten. Besteht ein System E aus solchen Kanten des Graphen G, die paarweise keine gemeinsamen Punkte[1] besitzen, so sagen wir, daß die Kanten des Systems E *unabhängig* sind. Die maximale Anzahl der unabhängigen Kanten von G bezeichnen wir mit $\varepsilon(G)$ und nennen ein System E, das aus $\varepsilon(G)$ unabhängigen Kanten von G besteht, ein *ε-System* von G. Besteht das System E aus unabhängigen Kanten von G, und ist zu dem Punkt x von G eine E-Kante (d. h. eine zu E gehörige Kante) inzident, so heißt x ein durch E *saturierter* Punkt. Ist mit x keine E-Kante inzident, so sagen wir, daß E den Punkt x *unsaturiert* läßt. Ist jeder Punkt von G durch E saturiert, so ist E ein *1-Faktor* von G (s. [12], [3]). Bezeichnet $\pi(G)$ die Anzahl der Punkte von G, so gibt $\pi(G) - 2\,\varepsilon(G)$ die ,,minimale Anzahl der unsaturierten Punkte" von G an. Ist $\pi(G) - 2\,\varepsilon(G) = 0$, so bildet jedes ε-System von G einen 1-Faktor von G. Gilt $\pi(G) - 2\,\varepsilon(G) > 0$, so besitzt G keinen 1-Faktor. Man nennt dann G einen *primen* Graphen. Den leeren Graphen (der weder Kanten noch Punkte enthält) betrachten wir als nicht-prim, mit dem 1-Faktor $E = \varnothing$. Wir nennen einen primen Graphen G *kritisch-prim*, wenn für jeden Punkt x von G der Graph $G - x$ nicht-prim ist.[2]

Im ersten Abschnitt unserer Arbeit beweisen wir bezüglich ε-Systeme den folgenden

Satz (E.1). *Bezeichne M_s die Menge jener Punkte des Graphen G, die durch jedes ε-System von G saturiert sind, M_u die Menge der übrigen Punkte, d. h. jener Punkte, die bei gewissen ε-Systemen als unsaturierte Punkte vorkommen und M_b die Menge derjenigen Punkte von M_s, die mit M_u verbunden sind.*[3] *Dann ist jede Komponente von $G - M_b$ entweder eine Komponente von* $[M_u]$

---

[1] Wir sagen statt Knotenpunkte kurz Punkte.

[2] In [3] haben wir die kritisch-primen Graphen durch eine andere Eigenschaft definiert und kurz kritisch genannt [s. die Definition (1.9) und den Satz (1.19) der vorliegenden Arbeit].

$G - x$ bezeichnet jenen Graphen, der aus G durch Weglassen von x und sämtlichen zu x inzidenten Kanten entsteht.

[3] Ist G' ein Teilgraph von G, M' die Menge der Punkte von G', und ist der nicht zu M' gehörige Punkt x durch Kanten von G mit M'-Punkten (d. h. mit Punkten von M') verbunden, so sagen wir, daß x mit M' oder daß x mit G' (in G) verbunden ist.

oder eine von $[M_s - M_b]$.[4] *Ist G prim, also ist* $M_u \neq \emptyset$, *und bezeichnen* $G_1, \ldots, G_p$ $(p \geqq 1)$ *die Komponenten von* $[M_u]$, *so gelten folgende Behauptungen: Jedes* G_i $(i = 1, \ldots, p)$ *ist ein kritisch-primer Graph, jede Komponente von* $[M_s - M_b]$ *besitzt einnen 1-Faktor. Ist E ein beliebiges* ε*-System von G, so ist jeder* M_b*-Punkt durch eine E-Kante mit je einem* G_i $(1 \leqq i \leqq p)$ *verbunden, und verschiedene* M_b*-Punkte sind mit verschiedenen* G_i *verbunden. Diejenigen* G_i, *die durch E-Kanten mit* M_b*-Punkten verbunden sind, enthalten keinen durch E unsaturiert gelassenen Punkt, die übrigen enthalten je einen solchen Punkt.*

Satz (E.1) kann als Spezialfall des Satzes (7.14) von [4] (s. die Bemerkung am Ende des Abschnittes 8 von [4]) und — falls man nur endliche Graphen betrachtet — als eine Verallgemeinerung gewisser Behauptungen über paare Graphen von [8] S. 134—135 betrachtet werden. Der Satz läßt sich mit Hilfe der Theorie der alternierenden Züge verhältnismäßig kurz beweisen (s. [1] und Abschnitt 7 von [4], sowie Abschnitt 4.4 von [10]). Wir wollen jedoch nicht diese Theorie benützen, sondern eine Methode anwenden, die auf einem bekannten Satz über paare Graphen [s. (1.1)] und auf der Untersuchung gewisser extremalen Punktmengen beruht. Die letzterwähnten Untersuchungen dürften auch in sich gewisses Interesse haben. In [3] haben wir mit der gleichen Methode den bekannten Tutte'schen Satz über 1-Faktoren bewiesen. [Satz (E.1) enthält den nichttrivialen Teil dieses Tutte'schen Satzes in sich.] Mit Hilfe des Tutte'schen Satzes könnten wir unsere Untersuchungen einigermaßen verkürzen, wir wollten jedoch diese Möglichkeit nicht benützen, um eine vollständige Behandlung geben zu können. Wir wollen noch bemerken, daß durch eine Modifizierung unserer Behandlungsweise einige Vereinfachungen erreicht werden könnten, dadurch würden jedoch gewisse Ergebnisse verloren gehen [s. die Bemerkung (1.20)]. Abschnitt 1 enthält die Untersuchungen über die extremen Punktmengen, Abschnitt 2 den Beweis des Satzes (E.1).

In Abschnitt 3 behandeln wir mit Hilfe des Satzes (E.1) ein Extremalproblem bezüglich ε-Systeme. Ein Tutte'scher Satz (s. [12] und [1]) besagt, daß die Bedingung der Regularität, d. h. die Bedingung, daß alle Punkte des Graphen gleichen Grades[5] sind zusammen mit gewissen Zusammenhangsbedingungen, die Existenz von 1-Faktoren sichert. Die schwächere Bedingung, daß $d'' - d'$ bzw. d''/d' „klein" ist, wobei d' bzw. d'' den minimalen bzw. maximalen Wert der im Graphen G vorkommenden Grade bezeichnet, reicht schon nicht aus, um einen 1-Faktor von G zu sichern. Man kann jedoch erwarten, daß sich aus diesen Bedingungen gewisse Folgerungen über die Größe von $\varepsilon(G)$ ziehen lassen. Tatsächlich hat J. H. Weinstein [13] bewiesen, daß im Falle $d' = 1$ und im Falle $d' = 2$, $d'' \geqq 4$ die Ungleichung

$$e_{\max} \geqq \frac{d'\, n}{d' + d''} \tag{1}$$

besteht, wobei $e_{\max} = \varepsilon(G)$ und $n = \pi(G)$ gesetzt wurde. Er zeigte sogleich

[4] Ist A eine Punktmenge von G (d. h. besteht sie aus Punkten von G), so bezeichnet $G - A$ jenen Graphen, der aus G durch Weglassen der A-Punkte und der zu den A-Punkten inzidenten Kanten entsteht. Mit $[A]$ bezeichnen wir den durch A gespannten Teilgraphen von G, d. h. den Graphen $G - \bar{A}$, wobei $\bar{A}$ die Menge der nicht zu A gehörigen Punkte von G bezeichnet.

[5] Der Grad (in G) des Punktes x ist die Anzahl der zu x inzidenten Kanten von G.

daß in (1) für halbreguläre paare Graphen[6] die Gleichheit gilt. Es wurde ferner von G. A. DIRAC die Vermutung ausgesprochen (mündliche Mitteilung), daß (1) auch für $d' \geqq 3$ richtig ist, vorausgesetzt, daß eine Bedingung, die eventuell $d'' \geqq d' + 2$ oder $d'' \geqq 2\,d'$ lautet, gefüllt ist. Er bemerkte weiterhin, daß für halbreguläre paare Graphen die Gleichheit in (1) auch für $d' \geqq 3$ eintritt. Bezeichnet man mit $u_{\min}$ die minimale Anzahl der unsaturierten Punkte in G, ist also $u_{\min} = n - 2e_{\max}$, so läßt sich (1), falls $d' \geqq 1$ ist, folgendermaßen umformen

$$\frac{u_{\min}}{e_{\max}} \leqq \frac{d'' - d'}{d'}\,. \tag{2}$$

In Abschnitt 3 wird nun mit Hilfe des Satzes (E.1) die Gültigkeit der Dirac'schen Vermutung bestätigt. Wir beweisen nämlich den folgenden

Satz (E.2). *Bezeichnen $e_{\max}$, $u_{\min}$, d' und d'' der Reihe nach die maximale Anzahl der unabhängigen Kanten, die minimale Anzahl der unsaturierten Punkte des Graphen G, den minimalen und den maximalen Wert der in G vorkommenden Grade, so besteht, falls $d' \geqq 1$ ist,*

$$\frac{u_{\min}}{e_{\max}} \leqq \frac{\max\,(2, d'' - d')}{d'}\,. \tag{3}$$

Das Gleichheitszeichen gilt

a) *falls $d'' - d' > 2$ oder $d'' - d' = 2$ und d' ungerade ist, dann und nur dann, wenn G ein halbregulärer paarer Graph ist,*

b) *falls $d'' - d' = 2$ und d' gerade ist, dann und nur dann, wenn die Komponenten von G vollständige $(d' + 1)$-Graphen*[7] *und eine nicht verschwindende Anzahl solche halbreguläre paare Graphen sind, in derer jedem die Grade d' und d'' vorkommen.*

c) *falls $d'' - d' < 2$ ist, dann und nur dann, wenn $d'' = d'$ besteht und d' gerade ist, und jede Komponente von G ein vollständiger $(d' + 1)$-Graph ist.*

Wir wollen noch bemerken, daß in § 4 von [2] gleichfalls eine Extremalaufgabe bezüglich dem Wert $e_{\max}$ behandelt wird. Die dort angewendete Methode stimmt im wesentlichen mit jenem Verfahren überein, das wir zum Beweis von (E.2) benützen.

1. Extreme Punktmengen. k-Prime Graphen

Wir stützen uns in unseren Untersuchungen auf den folgenden bekannten Satz über paare Graphen:[8]

(1.1) *Es seien A und B die Punktklassen des paaren Graphen G, d. h. G enthalte nur AB-Kanten.*[9] *Ist für eine jede Teilmenge B' von B die Anzahl jener*

[6] Der Graph G heißt ein halbregulärer paarer Graph, wenn die Punkte von G so in zwei Klassen A_1 und A_2 eingeteilt werden können, daß jede Kante von G einen A_1-Punkt mit einem A_2-Punkt verbindet und sämtliche A_i-Punkte den gleichen Grad d_i haben $(i = 1,2)$.

[7] Ein vollständiger j-Graph enthält genau j Punkte, und je zwei von diesen sind durch eine Kante des Graphen verbunden.

[8] Dieser Satz, der mit bekannten Sätzen von KÖNIG, HALL und RADO (s. [6] S. 232—235, [5] und [11]) in enger Beziehung steht, wurde zuerst von ORE formuliert ([7], [8]).

[9] Eine AB-Kante verbindet einen A-Punkt mit einem B-Punkt.

A-Punkte, die (durch Kanten von G) mit B'-Punkten verbunden sind, nicht kleiner als die Anzahl der B'-Punkte, so läßt sich die Menge B durch Kanten von G auf eine Teilmenge von A eineindeutig abbilden, d. h. man kann zu jedem B-Punkt eine zu diesem inzidente Kante von G so auswählen, daß die ausgewählten Kanten paarweise keinen gemeinsamen Punkt enthalten.

(1.2) Wir führen einige weitere Bezeichnungen ein:

$\mathcal{N}(M)$ bezeichnet die Anzahl der Elemente der endlichen Menge M.

$\mathcal{P}(G)$ bezeichnet die Menge der Punkte des Graphen G. (Mit G bezeichnen wir immer einen Graphen.)

Es ist $\pi(G) = \mathcal{N}(\mathcal{P}(G))$.

$\lambda(G)$ bezeichnet die Anzahl der primen Komponenten von G.

$\delta_G(B) = \lambda(G - B) - \mathcal{N}(B)$, wobei $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ ist.

Wir wollen nun, bei einem festgehaltenen Graphen G solche Teilmengen B von $\mathcal{P}(G)$ untersuchen, für die $\delta_G(B)$ gewisse extreme Eigenschaften besitzt. Dazu werden einige weitere Bezeichnungen und Begriffe benützt. Wir setzen

$$\delta^G_{\max} = \max_{B \subseteq \mathcal{P}(G)} \delta_G(B) .$$

Die Menge $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ heißt eine *extreme* Punktmenge von G, wenn $\delta_G(B) = \delta^G_{\max}$ gilt.

Die Menge $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ heißt eine *δ-maximale* Punktmenge von G, wenn für jedes B' mit $B \subset B' \subseteq \mathcal{P}(G)$ die Ungleichung $\delta_G(B') < \delta_G(B)$ besteht. ($\mathcal{P}(G)$ ist eine δ-maximale Punktmenge von G.)

Der Kürze halber wollen wir in den Bezeichnungen $\delta_G(B)$ und $\delta^G_{\max}$ die Indizes G weglassen. Also beziehen sich $\delta(B)$ und $\delta_{\max}$ immer auf den mit G bezeichneten Graphen. Ebenso beziehen sich die Begriffe δ-maximale und extreme Punktmengen auf den mit G bezeichneten Graphen.

Offensichtlich gelten die folgenden zwei Behauptungen:

(1.3) *Ist $\pi(G)$ ungerade, so ist G prim.*

(1.4) *$\lambda(G) > 0$ besteht dann und nur dann, wenn G prim ist.*

Wir beweisen die Behauptung

(1.5) *Enthält G einen 1-Faktor, so gilt für jedes $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ die Ungleichung $\delta(B) \leqq 0$.*

Beweis. Es genügt, den Fall $\lambda(G - B) > 0$ zu betrachten. F sei ein 1-Faktor von G. Dann gibt es zu einer jeden primen Komponente G_i von $G - B$ mindestens eine solche F-Kante, die G_i mit einem B-Punkt verbindet. Daraus folgt $\lambda(G - B) \leqq \mathcal{N}(B)$, d. h. $\delta(B) \leqq 0$.

Nach (1.5) gilt

(1.6) *Gibt es ein $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ mit $\delta(B) > 0$, so ist G prim.*

Offensichtlich bestehen auch die folgenden Behauptungen:

(1.7) *Für $B = \emptyset$ gilt $\delta(B) = \lambda(G) \geqq 0$. Ist G prim, so ist für $B = \emptyset$ $\delta(B) > 0$.*

(1.8) *Es gilt stets $\delta_{\max} \geqq 0$. $\delta_{\max} > 0$ besteht dann und nur dann, wenn G prim ist.*

Die wichtigste Begriffsbildung unserer Untersuchungen ist die folgende Definition:

(1.9) **Definition.** Der prime Graph G heißt *k-prim*,[10] falls er zusammenhängend ist und für jedes *nichtleere* $B \subseteq \mathscr{P}(G)$, $\delta(B) \leqq 0$ besteht.

So ist z. B. ein einpunktiger Graph k-prim.

(1.10) *Die Menge $B \subseteq \mathscr{P}(G)$ sei δ-maximal. Dann sind sämtliche nichtleeren Komponenten von $G - B$ k-prim.*

Beweis. 1) Es sei G_0 eine solche nichtleere Komponente von $G - B$, die einen 1-Faktor enthält und $x_0 \in G_0$.[11] Dann ist $\pi(G_0 - x_0)$ ungerade, und demzufolge $G_0 - x_0$ prim. Es gilt daher $\lambda(G_0 - x_0) > 0$. Für $B_0 = B \cup \{x_0\}$ besteht so $\lambda(G - B_0) = \lambda(G - B) + \lambda(G_0 - x_0) > \lambda(G - B)$, woraus $\delta(B_0) \geqq \geqq \delta(B)$ folgt. Dies widerspricht der Maximalität von B.

2) Jetzt sei G_1 eine prime Komponente von $G - B$, und nehmen wir an, daß G_1 nicht k-prim ist. Dann gibt es ein nichtleeres $B_1 \subseteq \mathscr{P}(G_1)$ mit $\lambda(G_1 - B_1) > \mathscr{N}(B_1)$. Es bestehen $B' = B \cup B_1 \supset B$ und $\lambda(G - B') = \lambda(G - B) - 1 + \lambda(G_1 - B_1)$. Daher ist $\delta(B') = \lambda(G - B') - \mathscr{N}(B') = \lambda(G - B) - \mathscr{N}(B) + \lambda(G_1 - B_1) - \mathscr{N}(B_1) - 1 \geqq \lambda(G - B) - \mathscr{N}(B) = \delta(B)$, und dies widerspricht ebenfalls der Maximalität von B.

(1.11) **Definition.** Die Menge $B \subseteq \mathscr{P}(G)$ heißt eine *k-extreme* Punktmenge (von G), wenn B extrem ist und sämtliche primen Komponenten von $G - B$ k-prim sind.

Nach (1.10) gilt die folgende Behauptung

(1.12) *Ist die Menge $B \subseteq \mathscr{P}(G)$ extrem und δ-maximal, so ist sie auch k-extrem.*

Da in jedem (endlichen) Graphen solche extreme Punktmengen existieren, die auch δ-maximal sind, folgt aus (1.12), daß in jedem (endlichen) Graphen k-extreme Punktmengen existieren.

(1.13) **Definition.** Die Menge $B \subseteq \mathscr{P}(G)$ heißt eine *minimale k-extreme* Punktmenge (von G), wenn sie k-extrem ist, und keine von ihr verschiedene k-extreme Teilmenge besitzt.

In jedem (endlichen) Graphen existiert eine minimale k-extreme Punktmenge. Es gilt ferner

(1.14) *Enthält G einen 1-Faktor, so ist $B = \emptyset$ eine k-extreme Punktmenge, und sie ist die einzige minimale k-extreme Punktmenge von G.*

In den Abschnitten 1 und 2 wird der Satz (1.1) über paare Graphen nur beim Beweis des folgenden Satzes gebraucht.

(1.15) *Ist $B \subseteq \mathscr{P}(G)$, so bezeichne H^* die Menge der primen Komponenten von $G - B$. Es sei*

a) *B eine extreme Punktmenge von G und $H = H^*$, oder*

b) *G zusammenhängend,*

$$\max_{\emptyset \neq \tilde{B} \subseteq \mathscr{P}(G)} \delta(\tilde{B}) \geqq 0 \,, \quad B \subseteq \mathscr{P}(G) \ \mathit{mit}\ \delta(B) = \max_{\emptyset \neq \tilde{B} \subseteq \mathscr{P}(G)} \delta(\tilde{B}) \,,$$

ferner $H = H^*$, oder

[10] Im folgenden wird sich ergeben [s. (1.19)], daß die k-primen Graphen mit den in der Einleitung definierten kritisch-primen Graphen identisch sind (s. auch die Fußnote 2).

[11] Die Punkte werden stets mit kleinen lateinischen Buchstaben, die Kanten mit Buchstabenpaaren bezeichnet. $x \in G$ bedeutet, daß der Punkt x zu dem Graphen G gehört.

c) *B eine minimale k-extreme Punktmenge von G und $H = H^* - \{G_0\}$, wobei G_0 ein beliebiges Element von H^* ist.*

In jedem dieser drei Fälle kann B eineindeutig durch Kanten von G auf eine Teilmenge von H abgebildet werden, d. h. es gibt in G $\mathcal{N}(B)$ solche Kanten, die je einen Punkt von B mit je einer zu H gehörigen Komponente verbindet, und zwar verschiedene B-Punkte mit verschiedenen Komponenten.

Beweis. Bezeichne B' eine beliebige Teilmenge von B und H' die Menge jener Komponenten von H, die (durch Kanten von G) mit B'-Punkten verbunden sind. Wir beweisen, daß $\mathcal{N}(H') \geqq \mathcal{N}(B')$ besteht. Daraus folgt dann nach (1.1) die Richtigkeit der Behauptung von (1.15).[12]

Von der Annahme

$$\mathcal{N}(H') < \mathcal{N}(B') \tag{1}$$

ausgehend, werden wir in jedem der drei Fälle a), b) und c) zu einem Widerspruch gelangen. Aus (1) folgt

$$B' \neq \varnothing\,. \tag{2}$$

Man setze $H'' = H - H'$ und $B'' = B - B'$. Da die zu H'' gehörigen Komponenten (durch Kanten von G) nur mit B''-Punkten verbunden sein können, gilt mit Rücksicht auf (1)

$$\lambda(G - B'') \geqq \mathcal{N}(H'') = \mathcal{N}(H) - \mathcal{N}(H') > \mathcal{N}(H) - \mathcal{N}(B')\,. \tag{3}$$

In den Fällen a) und b) ist $\mathcal{N}(H) = \lambda(G - B)$, und so folgt aus (3) mit Hilfe von $B' = B - B''$

$$\lambda(G - B'') - \mathcal{N}(B'') > \lambda(G - B) - \mathcal{N}(B)\,. \tag{4}$$

Im Falle a) bedeutet dies unmittelbar einen Widerspruch.

Im Falle b) ergibt (4) nur dann keinen Widerspruch, wenn $B'' = \varnothing$ ist. In diesem Falle muß auch $H'' = \varnothing$ bestehen, da die Elemente von H'' nur mit B''-Punkten verbunden sein können, und G zusammenhängend ist. Es folgt $B' = B$, $H' = H$ und nach (1) $\mathcal{N}(H) < \mathcal{N}(B)$, also $\lambda(G - B) < \mathcal{N}(B)$. Dies steht jedoch mit der Bedingung $\delta(B) \geqq 0$ in Widerspruch.

Im Falle c) ist $\mathcal{N}(H) = \lambda(G - B) - 1$, und so folgt aus (3) mit Rücksicht auf $B' = B - B''$

$$\lambda(G - B'') - \mathcal{N}(B'') \geqq \lambda(G - B) - \mathcal{N}(B)\,. \tag{5}$$

Da B eine extreme Menge ist, kann in (5) nur das Gleichheitszeichen gelten. Es folgt daraus einerseits, daß B'' eine extreme Menge ist, und andererseits, daß in (3) $\lambda(G - B'') = \mathcal{N}(H'')$ bestehen muß. Das letzte bedeutet jedoch, daß die primen Komponenten von $G - B''$ eben die Menge H'' bilden, also alle Elemente von H^* sind. Da B k-extrem ist, sind alle Elemente von H^* k-prim, woraus also folgt, daß auch B'' k-extrem ist. Dies steht jedoch wegen (2) mit der Minimalität von B in Widerspruch.

[12] Zur formalen Anwendung von (1.1) betrachte man jenen paaren Graphen G^*, dessen Punktklassen H und B sind, und in dem ein »Punkt« von H, d.h. eine zu H gehörige Komponente G_i dann und nur dann mit einem Punkt $b \in B$ durch eine Kante von G^* verbunden ist, falls G_i in G mit b verbunden ist.

Der folgende Satz drückt die wichtigste Eigenschaft der k-primen Graphen aus.

(1.16) **Satz.** *Ist G k-prim, so gilt für jedes nichtleere $B \subseteq \mathscr{S}(G)$ die Ungleichung $\delta(B) < 0$. Auf den Fall $\mathscr{N}(B) = 1$ angewendet ergibt dies: Für jeden beliebigen Punkt x des k-primen Graphen G besitzt $G - x$ einen 1-Faktor.*

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß die zweite Behauptung tatsächlich die Folge der ersteren ist. Ist $x \in G$ und $B = \{x\}$, so ist $\delta(B) = \lambda(G - x) - 1$. Daher folgt aus $\delta(B) < 0$ die Gleichung $\lambda(G - x) = 0$. Dies bedeutet jedoch, daß $G - x$ 1-Faktoren besitzt.

Wir führen nun den Beweis der ersten Behauptung mit Induktion bezüglich $\pi(G)$ durch. Ist $\pi(G) = 1$, so ist die Behauptung richtig. Nehmen wir an, daß sie für Graphen mit weniger als n ($n > 1$) Punkten richtig ist, und es sei G ein k-primer Graph mit $\pi(G) = n$. Da jetzt für jedes nichtleere $B \subseteq \mathscr{S}(G)$ $\delta(B) \leq 0$ gilt, bedeutet für G das Gegenteil der Behauptung unseres Satzes, daß nichtleere $B \subseteq \mathscr{S}(G)$ mit $\delta(B) = 0$ existieren. Wir wählen von diesen eine maximale Menge B aus. Dann ist B auch δ-maximal, und es besteht

$$(1) \qquad \delta(B) = \max_{\emptyset \neq \tilde{B} \subseteq \mathscr{S}(G)} \delta(\tilde{B}) = 0\,.$$

Da B nicht mit $\mathscr{S}(G)$ zusammenfallen kann, sind nach (1.10) sämtliche Komponenten von $G - B$ k-prime Graphen. Es seien diese Komponenten $G_1, \ldots, G_p$, wobei wegen $\delta(B) = 0$

$$p = \lambda(G - B) = \mathscr{N}(B)$$

besteht. Man setze ferner $B = \{b_1, \ldots, b_p\}$ und $H = \{G_1, \ldots, G_p\}$. Da G zusammenhängend ist, kann man nach (1) den Satz (1.15) b) anwenden. Die nach diesem Satze existierenden „abbildenden" Kanten von G seien mit $b_i\, x_i$ ($x_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, p$) bezeichnet. Laut der Induktionsannahme besitzt $G_i - x_i$ einen 1-Faktor F_i ($i = 1, \ldots, p$). Die Kanten von $\bigcup_{i=1}^{p} F_i$, zusammen mit den Kanten $b_1 x_1, \ldots, b_p x_p$ bilden jedoch einen 1-Faktor von G. Dieser Widerspruch beweist die Richtigkeit unseres Satzes.

Aus der zweiten Behauptung von (1.16) folgt

(1.17) *Ist G k-prim, so ist $\pi(G)$ ungerade.*

Wir beweisen jetzt die Umkehrung der zweiten Behauptung von (1.16):

(1.18) *Es sei G nichtleer, und besitze für jedes $x \in G$ der Graph $G - x$ einen 1-Faktor. Dann ist G k-prim.*

Beweis. Da $\pi(G)$ ungerade ist, muß G prim sein. Zuerst zeigen wir, daß G zusammenhängend ist. Im entgegengesetzten Falle gäbe es nämlich eine prime Komponente G_1 und eine von G_1 verschiedene Komponente G_2 von G. Ist $x \in G_2$, so wäre $G - x$ (entgegen unserer Annahme) prim.

Ist nun der zusammenhängende Graph G nicht k-prim, so gibt es ein nichtleeres $B \subseteq \mathscr{S}(G)$ mit $\delta(B) > 0$. Dann kann nach (1.6) für ein $x \in B$ der Graph $G' = G - x$ keinen 1-Faktor besitzen, da für $B' = B - x$

$$\lambda(G' - B') = \lambda(G - B) > \mathscr{N}(B) > \mathscr{N}(B')$$

besteht.

Aus (1.16) und (1.18) folgt

(1.19) *Die k-primen Graphen sind mit den in der Einleitung definierten kritisch-primen Graphen identisch.*

(1.20) **Bemerkung.** L. Pósa und V. T. Sós haben mich darauf aufmerksam gemacht, daß der in [3] gegebene Beweis des Tutte'schen Satzes über 1-Faktoren durch Modifizierung unserer Beweismethode kürzer gefaßt werden kann. Wir wollen diese Modifizierung kurz andeuten:

Bezeichne $\mu(G)$ die Anzahl der „ungeraden" Komponenten von G, d. h. jener Komponenten, die eine ungerade Anzahl von Punkten besitzen. Dann gilt für $A \subseteq \mathscr{P}(G)$

$$\mu(G - A) - \mathscr{N}(A) \equiv \pi(G) \pmod 2. \tag{1}$$

Es genüge nun G für ein jedes $A \subseteq \mathscr{P}(G)$ der Bedingung

$$\mu(G - A) \leqq \mathscr{N}(A).$$

Um zu beweisen, daß dann G 1-Faktoren besitzt, betrachte man — statt die in [3] benützte δ-maximale Menge B — eine maximale Punktmenge $A \subseteq \mathscr{P}(G)$ von größtmöglichem $\mu(G - A) - \mathscr{N}(A)$. Gewisse Eigenschaften dieses A und (1) ermöglichen — ohne Einführung des Begriffes der kritisch-primen Graphen — vollständige Induktion bezüglich $\pi(G)$ anzuwenden und dadurch zum gewünschten Resultat zu gelangen.

Eine ähnliche Modifizierung kann auch bei unserem Beweis des Satzes (E.1) durchgeführt werden. Statt $\lambda(G - B) - \mathscr{N}(B)$ nähme man $\mu(G - B) - \mathscr{N}(B)$, und dementsprechend verändere die Definitionen der k-primen Graphen und der extremen, δ-maximalen, k-extremen, minimalen k-extremen Punktmengen. Der modifizierte Beweis ist möglicherweise ein wenig kürzer als der von uns mitgeteilter, es gehen jedoch dabei gewisse Ergebnisse [z. B. die Behauptung (1.16) für $\mathscr{N}(B) > 1$] verloren.

2. Beweis des Satzes (E. 1)

Wie wir in (2.2) zeigen werden, ermöglicht der folgende Satz die Bestätigung sämtlicher Behauptungen von (E.1).

(2.1) **Satz.** a) *Bezeichnet $u_{\min}$ die minimale Anzahl der unsaturierten Punkte des Graphen G, so gilt*

$$u_{\min} = \delta_{\max}.$$

b) *Ist G prim, B eine extreme Punktmenge von G und E ein beliebiges ε-System von G, sind ferner $G_1, \ldots, G_p$ die primen Komponenten von $G - B$ und ist $G^u = \bigcup_{i=1}^{p} G_i$, so liegen sämtliche durch E unsaturiert gelassenen Punkte in G^u, und zwar befindet sich in jedem G_i höchstens ein solcher Punkt. Enthält ein G_i einen (keinen) solchen Punkt, so gibt es keine (genau eine) E-Kante, die G_i mit einem B-Punkt verbindet. Jeder B-Punkt ist durch eine E-Kante mit je einem G_i verbunden.*

Enthält ein G_i einen durch E unsaturiert gelassenen Punkt, und ist G_i ein k-primer Graph, so existiert zu einem jeden Punkt x von G_i ein solches ε-System E' von G, das x unsaturiert läßt.

c) *Ist die in* b) *vorkommende Menge B eine minimale k-extreme Menge von G und x ein beliebiger Punkt von G^u, so gibt es ein solches ε-System von G, das x unsaturiert läßt.*

Beweis. I) Besitzt G 1-Faktoren, so ist $u_{\min} = 0$ und $\delta_{\max} = 0$ [s. (1.8)]. Im folgenden sei nun G ein primer Graph. Dann ist $u_{\min} > 0$ und $\delta_{\max} > 0$. Ferner sei B eine extreme Punktmenge von G, d. h. es bestehe

$$\delta(B) = \lambda(G - B) - \mathcal{N}(B) = \delta_{\max}.$$

Wir setzen

$$p = \lambda(G - B), \qquad q = \mathcal{N}(B)$$

$$\text{und im Falle } q > 0 \qquad B = \{b_1, \ldots, b_q\}.$$

Es besteht dann

$$p = q + \delta_{\max} > 0. \tag{1}$$

Die Menge der primen Komponenten von $G - B$ sei

$$H^* = \{G_1, \ldots, G_p\}, \qquad \text{ferner sei } G^u = \bigcup_{i=1}^{p} G_i.$$

Diese Bezeichnungen wollen wir während des ganzen Beweises behalten.

II) Es sei E ein ε-System von G und H_s die Menge jener G_i ($1 \leqq i \leqq p$), die keinen durch E unsaturiert gelassenen Punkt enthalten. Wir setzen $H_u = H^* - H_s$. Zu jedem $G_i \in H_s$ existiert mindestens eine solche E-Kante, die G_i mit einem B-Punkt verbindet. Es gilt daher

$$\mathcal{N}(H_s) \leqq q, \tag{2}$$

und demzufolge

$$\mathcal{N}(H_u) \geqq p - q = \delta_{\max}. \tag{3}$$

Daraus folgt, daß in G^u mindestens $\delta_{\max}$ durch E unsaturiert gelassene Punkte liegen. Es besteht also

$$u_{\min} \geqq \delta_{\max}. \tag{4}$$

III) Wir nehmen jetzt vorläufig an, daß in (4) das Gleichheitszeichen gilt. Daraus folgt in Betracht von (3), daß jeder durch E unsaturiert gelassene Punkt in G^u liegt, jedes $G_i \in H_u$ genau einen unsaturierten Punkt enthält und $\mathcal{N}(H_u) = p - q$ besteht. Die letzte Behauptung ergibt $\mathcal{N}(H_s) = q$, woraus man sieht, daß es zu jedem $G_i \in H_s$ genau eine, zu jedem $G_i \in H_u$ dagegen keine solche E-Kante gibt, die G_i mit einem B-Punkt verbindet. Dann wird jeder B-Punkt durch eine E-Kante mit je einem $G_i \in H_s$ verbunden.

Es sei $G_i \in H_u$, G_i ein k-primer Graph und $x \in G_i$. Nach (1.16) besitzt $G_i - x$ einen 1-Faktor F'_i. Bezeichnet F_i die Menge der zu G_i gehörigen E-Kanten, so sieht man aus den vorangehenden, daß $E' = (E - F_i) \cup F'_i$ ein solches ε-System von G ist, das den Punkt x unsaturiert läßt.

IV) Von jetzt ab soll $u_{\min} = \delta_{\max}$ nicht vorausgesetzt werden. Wir nehmen nun an, daß B nicht nur extrem, sondern auch k-extrem ist. Es sind dann $G_1, \ldots, G_p$ alle k-prime Graphen. Ist $q > 0$, so existieren nach (1.15) a) solche Kanten in G, welche die Menge B auf eine Teilmenge von H^* eineindeutig abbilden. Wir dürfen diese in der Form $b_i x_i$ ($x_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, q$) angeben. Wähle man — auch im Falle $q = 0$ — in jedem G_i ($i = q + 1, \ldots, p$) einen beliebigen Punkt x_i aus. Es soll ferner F_i ($i = 1, \ldots, p$) einen nach (1.16) existierenden 1-Faktor von $G_i - x_i$ bezeichnen, und es sei F_0 ein 1-Faktor desjenigen Graphen, der durch die Vereinigung der nichtprimen Komponenten von $G - B$ entsteht. (Falls es keine solche Komponente gibt, so sei $F_0 = \emptyset$.) Im Falle $q = 0$ setze man $E' = \bigcup_{i=0}^{p} F_i$, im Falle $q > 0$ sei $E' = (\bigcup_{i=0}^{p} F_i) \cup \cup \{b_1 x_1, \ldots, b_q x_q\}$. Die Kanten von E' sind unabhängig, und E' läßt in G nur die Punkte $x_{q+1}, \ldots, x_p$, also genau $p - q = \delta_{\max}$ Punkte unsaturiert. Es besteht demnach $u_{\min} \leqq \delta_{\max}$. Dies und (4) ergeben

$$u_{\min} = \delta_{\max}. \tag{5}$$

Damit sind also der Teil a) und in Betracht von III) auch der Teil b) unseres Satzes bewiesen.

V) Um den Teil c) zu beweisen, sei B eine minimale k-extreme Menge und x ein beliebiger Punkt von G^u. Es sei $x \in G_p$ und $H = H^* - \{G_p\}$. Im Falle $q > 0$ gibt es nach (1.15) c) solche Kanten in G, welche die Menge B auf eine Teilmenge von H eineindeutig abbilden. Man darf diese in der Form $b_i x_i$ $(x_i \in G_i,\ i = 1, \ldots, q)$ angeben. Man setze $x_p = x$ und, wenn $p > q + 1$, wähle — auch im Falle $q = 0$ — in jedem G_i $(i = q + 1, \ldots, p - 1)$ einen beliebigen Punkt x_i aus. Dann führt die in IV) benützte Konstruktion zu einem solchen Kantensystem E', welches aus unabhängigen Kanten besteht und nur die Punkte $x_{q+1}, \ldots, x_p = x$ unsaturiert läßt. Nach (5) ist E ein gesuchtes ε-System von G. Damit ist der Beweis von (2.1) beendet.

(2.2) Haben die Mengen M_s, M_u und M_b die im Satze (E.1) gegebene Bedeutung, und ist B eine minimale k-extreme Menge von G, so folgt aus (2.1) $G^u = [M_u]$ und $B = M_b$. Man kann folglich mit Hilfe von (1.19) und (2.1) sämtliche Behauptungen des Satzes (E.1) leicht bestätigen.

Auf Grund dieser Überlegungen gelangt man aus (2.1) zu folgendem:

(2.3) **Satz.** *In jedem Graphen G gibt es eine einzige minimale k-extreme Punktmenge. Diese ist der Durchschnitt sämtlicher k-extremen Mengen von G und fällt mit der in der Einleitung definierten Menge M_b zusammen.*

3. Beweis des Satzes (E. 2)

(3.1) Wir beweisen den Satz erst für zusammenhängende Graphen.

Besitzt der Graph G einen 1-Faktor, gilt also $u_{\min} = 0$, so ist die zu beweisende Ungleichung

$$\frac{u_{\min}}{e_{\max}} \leqq \frac{\max(2, d'' - d')}{d'} \qquad (d' \geqq 1) \tag{1}$$

offensichtlich richtig. Das Gleichheitszeichen kann in diesem Falle nie auftreten.

I) Wir nehmen an, daß G ein zusammenhängender primer Graph ist. Es gilt dann $u_{\min} > 0$. M_s, M_u, M_b sollen die im Satze (E.1) definierten Mengen sein, $G_1, \ldots, G_p$ die Komponenten von $[M_u]$. Nach (E.1) sind $G_1, \ldots, G_p$ kritisch-prime Graphen. Setzt man $\mathcal{N}(M_b) = q$, so gilt nach (E.1)

$$p = q + u_{\min}. \tag{2}$$

Es sei E ein beliebiges ε-System von G, und bezeichne a_i $(i = 1, \ldots, p)$ die Anzahl der in G_i liegenden E-Kanten. Nach (E.1) ist $\pi(G_i) = 2a_i + 1$ und es gibt in jedem G_i genau einen Punkt x_i, der entweder durch E unsaturiert.

oder durch eine E-Kante mit einem M_b-Punkt verbunden ist ($i = 1, \ldots, p$). Es gibt genau q E-Kanten, die M_b-Punkte mit den Graphen $G_1, \ldots, G_p$ verbinden. Falls $M_s \neq \emptyset$ ist, so sind sämtliche M_s-Punkte durch E saturiert. Wir setzen $X = \{x_1, \ldots, x_p\}$ und werden die Anzahl $\nu(X, M_b)$ jener Kanten, die X-Punkte mit M_b-Punkten verbinden, von oben und von unten abschätzen.

Da in dem Graphen G zu jedem Punkte höchstens d'' Kanten inzident sind, besteht

$$\nu(X, M_b) \leqq qd''. \tag{3}$$

Zu einem Punkt x_i ($1 \leqq i \leqq p$) sind mindestens d' Kanten inzident, von denen wegen $\pi(G_i) = 2a_i + 1$ höchstens $2a_i$ Kanten in G_i liegen können. Deshalb gilt für die Anzahl $\nu(x_i, M_b)$ jener Kanten, die x_i mit M_b-Punkten verbinden,

$$\nu(x_i, M_b) \geqq d' - 2a_i \qquad (i = 1, \ldots, p)\,. \tag{4}$$

Demzufolge ist

$$\nu(X, M_b) = \sum_{i=1}^{p} \nu(x_i, M_b) \geqq \sum_{i=1}^{p} (d' - 2a_i) = pd' - 2\sum_{i=1}^{p} a_i\,. \tag{5}$$

Die Anzahl derjenigen E-Kanten, die zu M_u-Punkten inzident sind, ist $q + \sum_{i=1}^{p} a_i$. Es gilt daher

$$q + \sum_{i=1}^{p} a_i \leqq e_{\max}. \tag{6}$$

Aus (3), (5) und (6) erhält man

$$pd' - 2(e_{\max} - q) \leqq qd''. \tag{7}$$

Laut (2) gilt daher

$$d' u_{\min} \leqq (d'' - d')q + 2(e_{\max} - q)\,. \tag{8}$$

Setzt man $m = \max(2, d'' - d')$, so ergibt sich

$$d' u_{\min} \leqq mq + m(e_{\max} - q) = me_{\max}. \tag{9}$$

Ist $d' \geqq 1$, so ergibt sich daraus die Richtigkeit von (1).

II) Nehmen wir nun an, daß in (1) die Gleichheit besteht. Dann muß auch in (8), (7), (6), (3) und in (4) für $i = 1, \ldots, p$ das Gleichheitszeichen gelten.

In (6) besteht die Gleichheit nur dann, wenn $M_s - M_b = \emptyset$ ist. In (3) nur dann, wenn jeder M_b-Punkt den Grad d'' hat und jeder solche Punkt nur mit X-Punkten verbunden ist.

1) Betrachte man erst den Fall, wo nicht alle a_i verschwinden. Es sei z. B. $a_1 > 0$. Wir zeigen, daß wenn in (4) für $i = 1$ die Gleichheit besteht, so M_b leer sein muß. Ist nämlich $M_b \neq \emptyset$, dann muß — da G zusammenhängend ist — mindestens ein Punkt von G_1 mit einem M_b-Punkt verbunden sein. Es ist also $\nu(x_1, M_b) = d' - 2a_1 > 0$. Aus $d' > 2a_1$ folgt dann jedoch, daß der Grad eines jeden von x_1 verschiedenen Punktes von G_1 kleiner als d' ist. Das ist ein Widerspruch.

Aus $M_b = \emptyset$ folgt $G = G_1$. Jetzt kann in (4) die Gleichheit nur im Falle $d' = 2a_1$ gelten. Wegen $\pi(G) = 2a_1 + 1 = d' + 1$ muß dann $d'' = d'$ bestehen, also G ein vollständiger $(d' + 1)$-Graph sein, wobei d' eine gerade Zahl ist. In diesem Falle besteht in (1) tatsächlich die Gleichheit.

2) Wir nehmen jetzt an, daß $a_1 = \ldots = a_p = 0$ gilt, also alle G_i aus den einzelnen Punkten x_i bestehen $(i = 1, \ldots, p)$. Die Gleichheiten in (4) ergeben dann, daß alle X-Punkte den gleichen Grad d' besitzen. Daraus und aus den Folgerungen, die wir aus der Bestehung der Gleichheit in (3) gezogen haben, sieht man, daß G ein halbregulärer paarer Graph sein muß. In diesem Falle ist $d'p = d''q$, und mit Hilfe von (1.1) erhält man, falls $d' \geqq 1$ ist, daß $e_{\max} = q$ besteht. Es gilt dann in (8) die Gleichheit, und zwar in der Form

$$d'u_{\min} = (d'' - d')\,e_{\max}.$$

Man sieht daraus, daß im betrachteten Falle in (1) das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $d'' - d' \geqq 2$ ist. Damit ist der Satz (E.2) für zusammenhängende Graphen vollständig bewiesen.

(3.2) Es besitze nun G die Komponenten $G^{(1)}, \ldots, G^{(j)}$ $(j > 1)$, und $u_{\min}^{(i)}, e_{\max}^{(i)}, d_i', d_i''$ sollen für den Graphen $G^{(i)}$ dieselbe Bedeutung haben, wie $u_{\min}, e_{\max}, d', d''$ für G. Man setze ferner

$$f(d', d'') = \frac{\max(2, d'' - d')}{d'} \qquad (d' \geqq 1).$$

Aus $d' \leqq d_i' \leqq d_i'' \leqq d''$ folgt dann

$$(1) \qquad f(d_i', d_i'') \leqq f(d', d'') \qquad (i = 1, \ldots, j),$$

aus (3.1)

$$(2) \qquad u_{\min}^{(i)} \leqq f(d_i', d_i'')\, e_{\max}^{(i)} \qquad (i = 1, \ldots, j).$$

Es besteht aber

$$\sum_{i=1}^{j} u_{\min}^{(i)} = u_{\min} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{j} e_{\max}^{(i)} = e_{\max},$$

und so erhält man aus (2) und (1)

$$(3) \qquad u_{\min} \leqq f(d', d'')e_{\max}.$$

Das Gleichheitszeichen besteht hier dann und nur dann, wenn es in (2) und (1) für jedes $i = 1, \ldots, j$ gilt (wegen $d' \geqq 1$ ist $e_{\max}^{(i)} > 0$, $i = 1, \ldots, j$). Es muß also $d_i' = d'$ $(i = 1, \ldots, j)$, und im Falle $d'' - d' > 2$ auch $d_i'' = d''$ $(i = 1, \ldots, j)$ bestehen. Es ergibt sich nun leicht, daß in (3.1) (1) die Gleichheit tatsächlich nur in jenen Fällen auftritt, die im Satze (E.2) angegeben wurden. Damit ist der Beweis von (E.2) beendet.

(Eingegangen: 29. April, 1964.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Berge, C.: *Théorie des graphes et ses applications.* Paris 1958.
[2] Erdős, P. and Gallai, T.: „On maximal paths and circuits of graphs." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959) 337—356.
[3] Gallai, T.: „Neuer Beweis eines Tutte'schen Satzes." *Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci.*, **8** (1963) 135—139.
[4] Gallai, T.: „Kritische Graphen II." *Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci.*, **8** (1963) 373—395.
[5] Hall, P.: „On representatives of subsets." *Journal London Math. Soc.*, **10** (1935) 26—30.
[6] König, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Leipzig 1936.
[7] Ore, O.: „Graphs and matching theorems." *Duke Math. Journal*, **22** (1955) 625—639.
[8] Ore, O.: *Theory of graphs.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **38** (1962).
[9] Ore, O.: „Graphs and subgraphs". *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957) 109—136.
[10] Ore, O.: „Graphs and subgraphs II." *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93** (1959) 185—204.
[11] Rado, R.: „Factorization of even graphs." *Quarterly journal of Math.*, **20** (1949) 95—104.
[12] Tutte, W. T.: „The factorization of linear graphs." *Journal London Math. Soc.*, **22** (1947) 107—111.
[13] Weinstein, J. H.: „On the number of disjoint edges in a graph." *Canadian Journal of Math.* **15** (1963) 106—111.

МАКСИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ НЕЗАВИСИМЫХ РЕБЕР

T. Gallai

Резюме

Пусть G — конечный граф, не содержащий петли и кратного ребра. Обозначаем через $\varepsilon(G)$ максимальное число независимых ребер графа G, т. е. из графа G можно выбирать $\varepsilon(G)$ — ребер, попарно не содержащих общую точку, а больше таких ребер нет. Множество M_u — точек графа G определяется так: точка $x \in M_u$ тогда и только тогда, если из графа G можно выбирать $\varepsilon(G)$ — независимых ребер, каждое из которых не содержит точки x. Одна из теорем, теорема (E. 1) приводит несколько знаменитых свойств множества M_u. В теореме (E. 2) дана нижняя оценка для $\varepsilon(G)$, в которую входит только число точек графа G и минимальное и максимальное значение степени этих точек.