EIN MATRIZENTHEORETISCHES PROBLEM, UND SEIN ZUSAMMENHANG MIT DER THEORIE DER ORTHOGONALREIHEN

von
F. BALATONI

Einleitung

Es sei Ω_n die Menge derjenigen reellen, symmetrischen Matrizen $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ n-ter Ordnung, die so beschaffen sind, dass für jedes beliebiges Wertsystem der reellen Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die quadratischen Formen $\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\, \xi_j\, \xi_k$ den Ungleichungen

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\, \xi_j\, \xi_k \geqq \begin{cases} \xi_1^2 \\ (\xi_1+\xi_2)^2 \\ \vdots \\ (\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)^2 \end{cases} \tag{1}$$

genügen.

In diesem Artikel wird die Grössenordnung des maximalen Hauptdiagonalelements der Matrizen $\mathbf{A} \in \Omega_n$ untersucht. Wir beweisen den folgenden

Satz. *Es existiert eine universelle Konstante $K_1 > 0$ derart, dass für ein beliebiges Element $\mathbf{A}$ von Ω_n die Beziehung*

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} a_{kk} \geqq K_1 (\log n)^2 \qquad (n = 2, 3, \ldots)\,. \tag{2}$$

gilt, und es existiert in Ω_n eine Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ und eine universelle Konstante $K_2 > 0$ derart, dass

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} \tilde{a}_{kk} \leqq K_2 (\log n)^2 \qquad (n = 2, 3, \ldots)\,. \tag{3}$$

Als eine einfache Folge des Satzes ergibt sich die folgende Version des RADEMACHER—MENSCHOW'schen Lemmas ([1], S. 75):

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_N$ beliebige reelle Zahlen und $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_N(x)$ ein beliebiges orthonormiertes Funktionensystem im Raume $L^2_{\mu(x)}$, so ist das Quadrat der Funktion $\delta_N(x)$

$$\delta_N(x) = \max_{\nu \leqq N} \left| \sum_{k=1}^{\nu} a_k\, \psi_k(x) \right| \geqq 0 \tag{4}$$

integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b \delta_N^2(x)\, d\mu(x) \leqq K_2 (\log N)^2 \sum_{k=1}^{N} a_k^2\,.$$

(K_2 ist die in unserem Satz vorkommende universelle positive Konstante.) Wir beweisen den Satz auf matrizentheoretischem Wege, und geben dadurch im wesentlichen einen matrizentheoretischen Beweis des RADEMACHER—MENSCHOW'schen Lemmas.

Eine Folge dieses Lemmas ist der Fundamentalsatz über die Konvergenz der Orthogonalreihen, den zu erst RADEMACHER und MENSCHOW bewiesen haben ([1], S. 76):

Die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

ist unter der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n < +\infty$$

fast überall konvergent.

§ 1. Vorbereitung des Beweises

1. Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ bezeichnet einen Spaltenvektor, dessen Transponierter der Reihenvektor $\mathbf{a}^* = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ist.

Demnach ist der Wert des Matrizenproduktes $\mathbf{b}^* \mathbf{a}$ eine skalare Grösse, und $\mathbf{ba}^*$ eine Matrix (Dyade) vom Rang 1.

Es sei $\xi^* = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ ein beliebiger Reihenvektor; $\mathbf{e}_i$ sei ein Vektor dessen i-tes Element gleich 1, alle anderen Elemente gleich 0 sind. Ferner sei $\mathbf{T} = [t_{ik}]$, wobei $t_{ik} = 1$ für $i + k \leqq n + 1$ und $t_{ik} = 0$ für $i + k > n + 1$.

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_{n+1-i} = \mathbf{b}_i \, .$$

Die ersten i Elemente des Vektors $\mathbf{b}_i$ sind gleich 1, die anderen gleich 0. Die Matrix $\mathbf{T}$ ist symmetrisch, d. h. $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$. Schliesslich sei $m(\mathbf{A}) = \max (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Die Bedingung (1) lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$\xi^* \mathbf{A} \xi \geqq \xi^* \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^* \xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \, ,$$

oder

$$\xi^* \mathbf{A} \xi \geqq \xi^* \mathbf{T}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{T} \xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \, , \tag{1.1}$$

also besteht $\mathbf{A} \in \Omega_n$ dann und nur dann, wenn die Bedingung (1.1) erfüllt ist.

2. Wir benutzen die Spektralzerlegung

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^*$$

der Matrizen

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & 0 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man bestätigt leicht die Beziehungen:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & -1 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & -1 & . & . & . & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\text{(1.2)} \qquad \mathbf{M}_n \overset{\text{def}}{=} \mathbf{T}^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & & & & . & . \\ . & . & . & & & & . & . \\ . & . & . & & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(Siehe: [2].)

Diese Matrix $\mathbf{M}_n$ ist eine Kontinuante mit einer einfachen Struktur, deren Spektralzerlegung mit bekannten Methoden bestimmbar ist (Siehe [3] und [4]). Wir kommen zum Resultat, dass die Eigenwerte und *die normierten Eigenvektoren* der Matrix $\mathbf{M}_n$ die Grössen

$$\text{(1.3)} \qquad x_k = 4 \sin^2 \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}$$

und

$$\text{(1.4)} \qquad \mathbf{u}_k = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \begin{bmatrix} \cos \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \\ \cos 3 \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \\ \vdots \\ \cos (2n-1) \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sind.

Alle Eigenwerte x_k sind verschieden, daher sind die Eigenvektoren der Matrizen $\mathbf{T}$ und $\mathbf{M}_n$ paarweise gleich. Man kann *die absoluten Beträge der Eigenwerte der Matrix* $\mathbf{T}$ unmittelbar angeben:

$$|\lambda_k| = l_k = \frac{1}{2\sin\frac{2k-1}{2n+1}\frac{\pi}{2}}. \tag{1.5}$$

Bemerkung. Obwohl die Vorzeichen der Eigenwerte aus dem Zusammenhang:

$$\mathbf{T}\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \tag{1.6}$$

bestimmbar sind, lassen wir sie ausser Acht, da wir sie nicht brauchen werden.

Es ergibt sich:

$$\lambda_k = \frac{(-1)^{k-1}}{2\sin\frac{2k-1}{2n+1}\frac{\pi}{2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.7}$$

3. Wir benutzen das folgende

Lemma. *Falls* $\mathbf{A}$ *positiv definit ist, so bestehen für beliebige Vektoren* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *die Beziehungen:*

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{y}^* \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \geqq (\mathbf{x}^*\mathbf{y})^2, \tag{1.8}$$

und

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y}^* \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \geqq 2\mathbf{x}^*\mathbf{y} \tag{1.9}$$

([5], S. 69 und 86.).

4. Auf Grund von (1.1) gilt $\xi^* \mathbf{A}\xi \geqq 0$, jedoch ist der Zusammenhang $\bar{\xi}\mathbf{A}\xi = 0$ infolge von (1) nur im Falle $\bar{\xi} = \mathbf{0}$ erfüllt; falls also $\mathbf{A} \in \Omega_n$, so besteht für jedes ξ $(\xi \neq \mathbf{0})$ die Ungleichung $\xi^* \mathbf{A}\xi > 0$. Deshalb ist jedes Element $\mathbf{A}$ von Ω_n positiv definit (was durch die Bezeichung $\mathbf{A} > 0$ ausgedrückt werden soll).

5. Es sei $\mathbf{Q} > 0$ eine beliebige Matrix.

Setzen wir in (1.8)

$$\mathbf{x} = \xi \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{e}_i$$

ein, so erhalten wir:

$$\xi^* \mathbf{T}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{T}\xi \leqq \xi^* \mathbf{Q}\xi \mathbf{e}_i^* \mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{e}_i \leqq m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})\xi^* \mathbf{Q}\xi.$$

Es gilt also für jede Konstante $c \geqq 1$ die Ungleichung

$$cm(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})\xi^* \mathbf{Q}\xi \geqq \xi^* \mathbf{T}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{T}\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Daraus ergibt sich, dass *die Matrix*

$$\mathbf{A} = cm(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})\mathbf{Q} \qquad (c \geqq 1) \tag{1.10}$$

ein Element von Ω_n *ist.*

6. Wir zeigen noch, dass *jedes Element* $\mathbf{A}$ *von* Ω_n *in der Form* (1.10) *geschrieben werden kann.*

Wenn wir in (1.1)

$$\xi = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{e}_i$$

einsetzen, so erhalten wir:

$$\mathbf{e}_i^* \mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{e}_i \geqq (\mathbf{e}_i^* \mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{e}_i)^2 = (\xi^* \mathbf{A}\xi)^2 > 0\,,$$

da $\mathbf{A} > 0$ und $\xi \neq \mathbf{0}$ ist. Daraus folgt

$$0 < \mathbf{e}_i^* \mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{e}_i \leqq 1\,,$$

das heisst, es gilt die Beziehung:

$$0 < m\,(\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}) \leqq 1\,.$$

Es sei nun

$$c = \frac{1}{m(\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T})} \geqq 1\,,$$

also kann $\mathbf{A}$ in der Form

$$\mathbf{A} = cm(\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T})\mathbf{A} \tag{1.11}$$

geschrieben werden, was wir auch zeigen wollten.

§ 2. Beweis des Satzes

1. *Unsere Aufgabe besteht in der Untersuchung des Ausdrucks* $m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})\,m(\mathbf{Q})$. Für das Weitere kann man annehmen, dass $c = 1$ und

$$m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}) = m(\mathbf{Q}) \tag{2.1}$$

ist, da sich der Wert von $m(\mathbf{A}) = m(\mathbf{Q})\,m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})$ nicht ändert, wenn man $\lambda\mathbf{Q}$ anstatt $\mathbf{Q}$ nimmt, wobei $\lambda > 0$ ist. Insbesondere kann λ derart gewählt werden, dass (2.1) erfüllt sei.

Es sei $\mathbf{Q}$ eine beliebige positiv definite Matrix unter der Annahme (2.1),

$$\sqrt{m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})m(\mathbf{Q})} = m(\mathbf{Q}) = \frac{m(\mathbf{Q}) + m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})}{2} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2n}(\mathrm{sp}\,\mathbf{Q} + \mathrm{sp}\,\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}) = \frac{1}{2n}\mathrm{sp}\,(\mathbf{Q} + \mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})$$

und es sei

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q} + \mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T} \tag{2.2}$$

mit den Eigenwerten und Eigenvektoren ξ_ν, $\mathbf{x}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Wenden wir nun (1.9) für

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\,,\ \mathbf{x} = \mathbf{u}_k\,,\ \mathbf{y} = |\,\lambda_k\,|\,\mathbf{u}_k$$

an.

Es seien $l_k = |\,\lambda_k\,|$, $\mathbf{u}_k$ und λ_k die in (1.4) und (1.7) vorkommenden Eigenvektoren und Eigenwerte. Dann gelten die Ungleichungen

$$\mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}\,\mathbf{u}_k + \lambda_k^2 \mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{u}_k \geqq 2\,l_k\,\mathbf{u}_k^*\mathbf{u}_k = 2\,l_k,$$

$$\mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k^* \mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{T}\mathbf{u}_k \geqq 2\,l_k$$

also laut der Bezeichnung (2.2):

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^* \mathbf{B} \mathbf{u}_k \geqq 2 \sum_{k=1}^{n} l_k . \tag{2.3}$$

Mit Hilfe einiger bekannter Eigenschaften der Eigenvektoren zeigen wir, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^* \mathbf{B} \mathbf{u}_k = \operatorname{sp} \mathbf{B} \tag{2.4}$$

ist.

Es gilt nämlich:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^* \mathbf{B} \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^* \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \mathbf{x}_\nu \mathbf{x}_\nu^* \mathbf{u}_k = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_\nu^* \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^* \mathbf{x}_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \mathbf{x}_\nu^* \mathbf{E} \mathbf{x}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \mathbf{x}_\nu^* \mathbf{x}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu = \operatorname{sp} \mathbf{B} .$$

Damit ist (2.4) nachgewiesen.

Wir zeigen nun, dass

$$\sum_{k=1}^{n} l_k \geqq \sqrt{K_1}\, n \log n \tag{2.5}$$

ist.[1]

Auf Grund von (1.5) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} l_k = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 \sin \dfrac{2k-1}{2n+1} \dfrac{\pi}{2}} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 \dfrac{2k-1}{2n+1} \dfrac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2n+1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \geqq \sqrt{K_1}\, n \log n$$

womit (2.5) bewiesen ist.

Aus den obigen folgt: $m(\mathbf{Q}) \geqq \dfrac{1}{2n} \operatorname{sp} \mathbf{B}$.

Mit Benutzung von (2.3), (2.4) und (2.5) erhalten wir:

$$m(\mathbf{Q}) \geqq \frac{1}{2n} \operatorname{sp} \mathbf{B} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^* \mathbf{B} \mathbf{u}_k \geqq \frac{2}{2n} \sum_{k=1}^{n} l_k \geqq \sqrt{K_1} \log n ,$$

also

$$m(\mathbf{Q}) \geqq \sqrt{K_1} \log n .$$

Wegen (2.1) gilt:

$$m(\mathbf{Q})\, m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}) \geqq K_1 (\log n)^2 . \tag{2.6}$$

In (2.6) kann die Bedingung (2.1) weggelassen werden. Also existiert für jede beliebige Matrix $\mathbf{Q} > 0$ eine Konstante $K_1 > 0$, mit welcher (2.) erfüllt ist.

---

[1] Die Eigenwerte und die Eigenwektoren der Matrix $\mathbf{T}$, ferner die Beziehung (2.5) siehe auch in [6].

Es sei

$$\mathbf{A} \in \Omega_n .$$

Nach (1.11) folgt:

$$m(\mathbf{A}) = cm(\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T})\, m(\mathbf{A}) \geqq m(\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}) m(\mathbf{A}) \geqq K_1(\log n)^2 .$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

2. Zum Beweis von (3) wählen wir die Matrix $\mathbf{Q}$ in einer speziellen Art. Es sei

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{n} l_k\, \mathbf{u}_k\, \mathbf{u}_k^* , \tag{2.7}$$

$\mathbf{Q} > 0$. $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{T}$ sind vertauschbar, da ihre Eigenvektoren übereinstimmen. Ferner ist

$$\mathbf{Q}^2 = \mathbf{T}^2 , \quad \text{da} \quad l_k = |\, \lambda_k \,| .$$

Aus den obigen folgt:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1}\, \mathbf{T}^2 = \mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\, \mathbf{T} .$$

Für die Matrix $\mathbf{Q}$ ist die Bedingung (2.1) erfüllt. Wegen (1.10) ist $\tilde{\mathbf{A}} = m\, (\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})\, \mathbf{Q} = m(\mathbf{Q})\, \mathbf{Q}$ ein Element von Ω_n. Wir zeigen:

$$m(\tilde{\mathbf{A}}) = m^2(\mathbf{Q}) \leqq K_2(\log n)^2. \tag{2.8}$$

Mit Benutzung von (1.4) und (1.5):

$$\mathbf{e}_i^*\, \mathbf{Q}\, \mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{n} l_k\, \mathbf{e}_i^*\, \mathbf{u}_k\, \mathbf{u}_k^*\, \mathbf{e}_i = \frac{4}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2 \dfrac{(2i-1)(2k-1)}{2n+1} \dfrac{\pi}{2}}{2 \sin \dfrac{2k-1}{2n+1} \dfrac{\pi}{2}} \leqq$$

$$\leqq \frac{4}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 \sin \dfrac{2k-1}{2n+1} \dfrac{\pi}{2}} \leqq \frac{4}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 \dfrac{2}{\pi} \dfrac{2k-1}{2n+1} \dfrac{\pi}{2}} ,$$

da $\sin x \geqq \dfrac{2}{\pi} x$ für $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Des weiteren:

$$\mathbf{e}_i^*\, \mathbf{Q}\, \mathbf{e}_i \leqq 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \leqq \sqrt{K_2} \log n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) ,$$

daher

$$m(\mathbf{Q}) \leqq \sqrt{K_2} \log n .$$

Also ist (2.8) verifiziert, und damit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen.

§ 3. Bemerkungen. Probleme

1. Wir beweisen das RADEMACHER—MENSCHOW'sche Lemma. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_N$ beliebige reelle Zahlen, und $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_N(x)$ ein ortonormiertes System im Raume $L^2_{\mu(x)}$.

Es seien weiterhin $\xi_k = a_k \psi_k(x)$ und $n = N$, ferner

$$\max_{\nu \leq N} \left| \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k \right| = \max_{\nu \leq N} \left| \sum_{k=1}^{\nu} a_k \psi_k(x) \right| = \delta_N(x) .$$

$\delta_N^2(x)$ ist $L_{\mu(x)}$ integrierbar, da sie die obere Hülle endlich vieler integrierbarer Funktionen ist. Setzen wir die obigen Werte von ξ_k in (1) ein. Dann erhalten wir

$$\sum_{j,k=1}^{N} \tilde{a}_{jk} a_j a_k \psi_j(x) \psi_k(x) \geqq \delta_N^2(x) .$$

Nun sollen beide Seiten über dem Basisintervall integriert werden. Auf Grund von (3):

$$\int_a^b \delta_N^2(x) \, d\mu(x) \leqq \sum_{k=1}^{N} \tilde{a}_{kk} a_k^2 \leqq m(\tilde{\mathbf{A}}) \sum_{k=1}^{N} a_k^2 \leqq K_2 (\log N)^2 \sum_{k=1}^{N} a_k^2 ,$$

w. z. b. w.

2. Wir nennen eine Matrix $\mathbf{Q} \in \Omega_n$ optimal, wenn für irgendein Element $\mathbf{A}$ der Menge Ω_n

$$m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})\, m(\mathbf{Q}) \leqq m(\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T})\, m(\mathbf{A})$$

ausfällt.

Wir haben die einzig mögliche optimale Matrix für nur $n = 2, 3$ gefunden. In diesen Fällen genügt die optimale Matrix $\mathbf{Q}$ den folgenden Bedingungen:

a) $\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{Q}$

und

b) $\mathbf{e}_i^* \mathbf{Q} \mathbf{e}_i = \sigma$ (σ unabhängig von i).

Im Falle $n = 2, 3$ lässt sich $\mathbf{Q}$ aus den obigen beiden Bedingungen eindeutig bestimmen und die so erhaltene Matrix ist optimal. Es wird vermutet, dass die Bedingungen a) und b) im Falle $\mathbf{Q} > 0$ für beliebige n eindeutig die optimale Matrix bestimmen.

(Eingegangen: 21. Mai, 1964.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ALEXITS, G.: *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.

[2] EGERVÁRY, J.: „Über gewisse Extremumprobleme der Funktionentheorie." *Math. Annalen* **99** (1928) 542—561.

[3] EGERVÁRY J.: „Mátrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról." *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.* **3** (1953) 417—458.

[4] GANTMACHER, F. R.—KREIN, M. G.: *Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme.* Akademie-Verlag, Berlin, 1960.

[5] BECKENBACH, E. F.—BELLMAN, R.: *Inequalities.* Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1961.

[6] AITKEN, A. C.: „Two notes on matrices." *Proc. Glasgow math. Assoc.* **5** (1962) 109—113

ПРОБЛЕМА ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ И ЕЕ СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

F. BALATONI

Резюме

Пусть Ω_n множество вещественных симметричных матриц $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ n-го порядка, которые удовлетворяют условия

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\, \xi_j\, \xi_k \geqq \begin{cases} \xi_1^2 \\ (\xi_1 + \xi_2)^2 \\ \vdots \\ (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)^2, \end{cases}$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ любые вещественные числа.

Доказываем следующую теорему:

Существует универсальная константа $K_1 > 0$, такая, что в каждом случае:

$$\max_{k=1,2,\dots,n} a_{kk} \geqq K_1(\log n)^2 \qquad (n = 2, 3, \dots),$$

если $\mathbf{A} \in \Omega_n$, и существует b Ω_n матрица $\mathbf{A}$ и универсальная константа K_2 такие, что

$$\max_{k=1,2,\dots,n} a_{kk} \leqq K_2(\log n)^2 \qquad (n = 2, 3, \dots).$$

Простое следствие теоремы следующий вариант леммы Радемахера—Меньшова:

Если $a_1, a_2, \dots, a_N$ любие вещественные числа и $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_N(x)$ любая ортонормированная система, то функция

$$\max_{\nu \leqq N} \left| \sum_{k=1}^{\nu} a_k\, \psi_k(x) \right| = \delta_N(x) \geqq 0$$

$L^2_{\mu(x)}$-интегрируемая, и

$$\int_a^b \delta_N^2(x)\, d\mu(x) \leqq K_2(\log N)^2 \sum_{k=1}^{N} a_k^2 .$$