CONVERGENCE ET REPRÉSENTATION CONFORME

par

László ALPÁR

§ 1. Introduction

Soit ζ_0 $(0 < |\zeta_0| < 1)$ un point fixe, τ_0 un angle constant,

$$h_1(z) = e^{i\tau_0} \frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} \tag{1.1}$$

une transformation homographique applicant le cercle unité sur lui-même, et

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{1.2}$$

une fonction holomorphe pour $|z| < 1$. La fonction

$$f_1[h_1(z)] = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu \tag{1.3}$$

est alors également holomorphe dans le cercle $|z| < 1$. Supposons de plus qu'il existe un point z', $|z'| = 1$, où $f_1(z)$ est encore définie et la série (1.2) converge, et posons $z' = h_1(z'')$, donc $|z''| = 1$. Il vient alors de (1.3) que $f_1(z') = f_2(z'')$. Mais il est une question à examiner si la convergence de la série (1.2) en z' entraîne-t-elle la convergence de la série (1.3) en z''? Ce problème a été soulevé et résolu par P. Turán [10] qui a démontré l'existence des fonctions $f_1(z)$ telles que, malgré la convergence de la série (1.2) en z', la série (1.3) est divergente en z''.

En généralisant le résultat de Turán nous avons montré [1] que la sommabilité (C, k) $(k \geqq 0)$ de la série (1.2) en z' assure la sommabilité $(C, k + 1/2)$ de la série (1.3) en z'', mais qu'elle n'implique pas la sommabilité $(C, k + \delta)$ de (1.3) en z'' si $0 \leqq \delta < 1/2$. Nous avons établi ensuite [2] que pour $|z| = 1$ la convergence absolue de la série (1.2) entraîne la convergence uniforme, mais non la convergence absolue de la série (1.3) sur la circonférence $|z| = 1$.

Plus récemment nous avons étendu ces investigations à certaines transformations des séries de Faber [3]. Une série de Faber constitue une sorte de représentation d'une fonction analytique dans un domaine différent d'un cercle dont la frontière est formée d'un seul arc analytique régulier. La circonstance que le domaine de convergence d'une série de Faber n'est pas un cercle soulève la question: comment faut-il choisir la transformation à employer, car $h_1(z)$ utilisée pour les séries de Taylor a deux propriétés particulières qu'on ne peut pas simultanément conserver. $h_1(z)$ est d'une part *une fonction homographique qui ne se réduit pas à une rotation*, d'autre part *elle applique sur lui-même le cercle unité*, c'est-à-dire *le domaine de convergence des séries de Taylor envisagées*. Si, dans le cas des séries de Faber, on fait la transformation par une fonction homographique, elle n'applique pas en générale le domaine en question sur lui-même; par contre si l'on effectue une représentation conforme du domaine considéré sur lui-même, la fonction qui réalise cette transformation n'est pas en générale homographique. Nous avons examiné toutes les deux éventualités.

Soient C_1 une courbe fermée simple dans le plan des z_1 formée d'un seul arc analytique régulier, $F_1(z_1)$ une fonction holomorphe à l'intérieur de C_1, et

$$z_1 = h(z_2) = \frac{pz_2 + q}{z_2 - z_2^*} \qquad (pz_2^* + q \neq 0)$$

une transformation homographique qui applique l'intérieur de C_1 sur celui d'une courbe C_2 du plan des z_2 telle que z_2^* soit à l'extérieur de C_2. La courbe C_2 est alors de la même nature que C_1 et la fonction

$$F_1[h(z_2)] = F_2(z_2)$$

est holomorphe à l'intérieur de C_2. $F_1(z_1)$ resp. $F_2(z_2)$ est ainsi développable en série de Faber à l'intérieur de C_1 resp. C_2, soit

$$F_1(z_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \Phi_\nu^{(1)}(z_1)\,, \tag{1.4}$$

$$F_2(z_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)} \Phi_\nu^{(2)}(z_2)\,, \tag{1.5}$$

où $\Phi_\nu^{(j)}(z_j)$ $(j = 1, 2)$ désigne le ν-ième polynome de Faber associé à C_j. Soient de plus $\tilde{z}_1 \in C_1$, $\tilde{z}_2 \in C_2$ deux points liés par l'égalité $\tilde{z}_1 = h(\tilde{z}_2)$. Il est établi qu'il existe de fonctions $F_1(z_1)$ telles que les phénomènes constatés au cas des séries de Taylor (1.2) et (1.3) aient lieu sans aucun changement pour les séries de Faber (1.4) et (1.5), c'est-à-dire la sommabilité (C, k) de la série (1.4) en $\tilde{z}_1$, entraîne la sommabilité $(C, k + {}^1/_2)$ de la série (1.5) en $\tilde{z}_2$, mais non la sommabilité $(C, k + \delta)$ de cette série, et la convergence absolue pour $z_1 \in C_1$ de la série (1.4) implique pour $z_2 \in C_2$ la convergence uniforme, mais non la convergence absolue de la série (1.5). En outre *les théorèmes respectifs peuvent être déduits directement de leurs analogues valables pour les séries de Taylor* ([3], théorèmes 1—5).

Considérons ensuite une courbe C du plan des z différente d'une circonférence et ayant les mêmes propriétés que C_1. Soit $k(z)$ une fonction faisant la transformation conforme biunivoque et non identique de l'intérieur de C sur lui-même, et admettons que $k(z)$ n'est pas homographique. Toutefois la fonction $F_1[k(z)] = F_2(z)$ est holomorphe et développable en série de Faber à l'intérieur de C. Or, dans la note [3] nous avons démontré seulement que *le comportement de la série de Faber de $F_2(z)$ sur la courbe C ne résulte pas directement des propositions homologues établies pour les séries de Taylor* ([3], théorème 6). On ne peut donc pas exclure à priori l'existence des courbes particulières pour lesquelles certains des théorèmes invoqués ne subsistent plus.

Dans cet ouvrage nous allons donner une réponse partielle aux questions restées ouvertes dans la note [3]. Sans pouvoir résoudre tous les problèmes mentionnés plus haut, nous sommes parvenus à généraliser la proposition initiale de TURÁN, à condition que $k(z)$ ne soit pas équivalente à une rotation. Le sens de cette notion sera précisé dans le § 2.

Théorème. — *La convergence des séries de Faber en un point de leur courbe de convergence n'est pas un invariant conforme. Plus exactement, soient* C *une courbe fermée simple formée d'un seul arc analytique régulier,* $k(z)$ *une application conforme biunivoque de l'intérieur de* C *sur lui-même, non équivalente à une rotation, et* $z' \in C$, $z'' \in C$ *deux points tels que* $z' = k(z'')$, *il existe alors de fonctions*

$$F_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \Phi_\nu(z) \tag{1.6}$$

holomorphes à l'intérieur de C, *dont les séries de Faber convergent en* z' *et, malgré cela, les séries de Faber des fonctions*

$$F_1[k(z)] = F_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)} \Phi_\nu(z)\ , \tag{1.7}$$

holomorphes également à l'intérieur de C, *sont divergentes en* z''.

Cette proposition est susceptible de la généralisation ci-après:

Corollaire. — *Étant données deux courbes* C_1 *et* C_2 *fermées simples chacune formée d'un seul arc analytique régulier, une transformation* $z_1 = k^*(z_2)$ *non équivalente à une rotation, faisant la représentation conforme biunivoque de l'intérieur de* C_1 *sur celui de* C_2, *et* $\tilde{z}_1 \in C_1$, $\tilde{z}_2 \in C_2$ *deux points tels que* $\tilde{z}_1 = k^*(\tilde{z}_2)$, *il existe alors de fonctions*

$$F_1(z_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \Phi_\nu^{(1)}(z_1)$$

holomorphes à l'intérieur de C_1, *dont les séries de Faber convergent en* $\tilde{z}_1$ *et, malgré cela, les séries de Faber des fonctions*

$$F_1[k^*(z_2)] = F_2(z_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)} \Phi_\nu^{(2)}(z_2)$$

holomorphes à l'intérieur de C_2 *divergent en* $\tilde{z}_2$.

* * *

On désignera par c, c_i $(i = 0, 1, \ldots)$ des constantes numériques positives.

§ 2. Remarques sur les polynomes et les séries de Faber

Nous allons exposer sans démonstration certaines propriétés des polynomes et des séries de Faber que nous utiliserons par la suite (cf. [4], [5], [6], [7], [9], [11], [12]).

Soit C une courbe fermée simple dans le plan des z formée d'un seul arc analytique régulier avec l'intérieur $I(C)$, l'extérieur $E(C)$. $\overline{I}(C)$ et $\overline{E}(C)$ désignent les domaines correspondants fermés.

Il existe une fonction, et une seul $\varphi(z)$ qui, pour des $|z|$ assez élevées, s'écrit sous la forme

$$w = \varphi(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \tag{2.1}$$

et qui fait la représentation conforme biunivoque de $\overline{\mathrm{E}}(\mathsf{C})$ sur $\overline{\mathrm{E}}(\mathsf{K}_R)$, où l'on note par K_R la circonférence $|w| = R$. Les quantités R, a_0, $a_1, \dots$ sont déterminées univoquement par les conditions imposées à $\varphi(z)$.

Les images des circonférences $\mathsf{K}_\varrho : |w| = \varrho$ par $\varphi(z)$ sont les courbes de niveaux $\mathsf{C}_\varrho : |\varphi(z)| = \varrho$; nous écrirons aussi C_R au lieu de C.

Désignons par

$$z = \psi(w) = w + \beta_0 + \frac{\beta_1}{w} + \frac{\beta_2}{w^2} + \dots \tag{2.2}$$

la fonction inverse de $\varphi(z)$. La série (2.2) est convergente pour $|w| > r$, avec un $r < R$.

L'anneau circulaire limité par K_R et K_r et le domaine annulaire limité par C_R et C_r jouent un rôle important dans la théorie des séries de Faber.

Si $\varphi(z)$ est représentée par la série (2.1), $\Phi_n(z)$, le n-ième polynome de Faber associé à C_R, est la partie polynomiale de l'expression

$$[\varphi(z)]^n = \Phi_n(z) + R_n(z)\,, \tag{2.3}$$

$R_n(z)$ ne contenant que les puissances négatives de z. On démontre aussi que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)^n}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases}\Phi_n(z) & \text{pour } n \geqq 0\\ 0 & \text{pour } n < 0\end{cases} \quad z \in \mathrm{I}(\Gamma)\,, \tag{2.4}$$

où Γ est une courbe fermée simple telle que $\mathrm{I}(\mathsf{C}_r) \subset \mathrm{I}(\Gamma)$. On voit de (2.3) que $\Phi_0(z) \equiv 1$. L'expression (2.4) peut être interprétée comme celle qui donne $\Phi_n(z)$ pour chaque n et $\Phi_n(z) \equiv 0$ si $n < 0$.

La fonction génératrice des $\Phi_n(z)$ est donnée par la formule

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{w^{n+1}}\,. \tag{2.5}$$

Toute fonction $F(z)$ holomorphe dans $\mathrm{I}(\mathsf{C}_R)$ peut être représentée par sa série de Faber unique:

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \Phi_\nu(z) \tag{2.6}$$

qui est uniformément et absolument convergente sur chaque sous-ensemble fermé de $\mathrm{I}(\mathsf{C}_R)$. Les coefficients a_n s'expriment par l'intégrale:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathsf{K}_\varrho} \frac{F[\psi(w)]}{w^{n+1}}\,dw\,, \quad r < \varrho < R\,, \quad n \geqq 0\,. \tag{2.7}$$

Si $F(z)$ a de singularités sur C_R, on dit que C_R est la courbe de convergence de la série (2.6).

Inversement, étant donnée une suite de nombres $\{a_n\}$ telle que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mid a_n \mid^{1/n} \leqq \frac{1}{R}, \tag{2.8}$$

alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)$ est convergente dans $\mathrm{I}(C_R)$ où elle représente une fonction holomorphe; cette série est divergente dans $\mathrm{E}(C_R)$.

Il subsiste de plus la relation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_n(z)}{\varphi(z)^n} = 1 \tag{2.9}$$

uniformément sur chaque sous-ensemble fermée de $\mathrm{E}(C_r)$. Plus exactement, soient $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, $\varrho \geqq r + \varepsilon$, $z \in C_\varrho$, on a alors

$$\left| \frac{\Phi_n(z)}{\varphi(z)^n} - 1 \right| \leqq c_0 \left(\frac{r}{\varrho} \right)^n \leqq c_0 \left(\frac{r}{r+\varepsilon} \right)^n. \tag{2.10}$$

Il en résulte que

$$\lambda \mid \varphi(z) \mid^n < \mid \Phi_n(z) \mid < \mu \mid \varphi(z) \mid^n \tag{2.11}$$

sur chaque sous-ensemble fermée de $\mathrm{E}(C_r)$ où $\lambda > 0$, $\mu > 0$ sont des constantes indépendantes de z.

Il découle en outre de (2.9) que, z étant fixé, la série (2.5) est convergente pour $\mid w \mid > \mid \varphi(z) \mid$.

* * *

Nous sommes maintenant en mesure de définir le sens de la phrase que la transformation $k(z)$ n'est pas équivalente à une rotation. Considérons les points $z' \in C_R$, $z'' \in C_R$ satisfaisant à l'égalité $z' = k(z'')$ et posons $w' = \varphi(z')$, $w'' = \varphi(z'')$, avec $\mid w' \mid = \mid w'' \mid = R$. Si $w'/w'' = e^{i\omega_0}$ reste constante lorsque z' et z'' parcourent C_R, nous disons que $k(z)$ est équivalente à une rotation; si par contre w'/w'' varie avec z' et z'', nous disons que $k(z)$ n'est pas équivalente à une rotation. Cette notion s'étend sans peine au cas où la transformation n'applique pas le domaine considéré sur lui-même.

§ 3. Démonstration du théorème

Nous admettons dans ce qui suit que $k(z)$ a un point double $z_0 = k(z_0)$ sur C_R, ce qui assure que $k(z)$ ne soit pas équivalente à une rotation. Soit $z' = z'' = z_0$. Ces conditions ne restreignent pas la généralité, mais permettent certaines simplifications des calculs. Dès lors $F_1(z_0) = F_2(z_0)$ et il est à prouver que malgré la convergence de la série (1.6) en z_0, la série (1.7) peut être divergente en z_0.

On a, en vertu de (2.7), (1.6) et (1.7),

$$\begin{aligned} a_n^{(2)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\varrho} F_1(k[\psi(w)]) \frac{dw}{w^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \int_{K_\varrho} \Phi_\nu(k[\psi(w)]) \frac{dw}{w^{n+1}}, \qquad r < \varrho < R,\ n \geqq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Posons

$$\Phi_\nu(k[\psi(w)]) = \Phi_\nu(k)\,, \quad \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu^{(1)} \Phi_\mu(z_0) = A_\nu^{(1)}(z_0)\,. \tag{3.2}$$

Comme $|\varphi(z_0)| = R$, on tire de (2.11) que $\Phi_\nu(z_0) \neq 0$. On peut donc écrire, vu (3.1) et (3.2),

$$\begin{aligned} A_m^{(2)}(z_0) &= \sum_{n=0}^{m} a_n^{(2)} \Phi_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \Phi_\nu(z_0) \int_{K_\varrho} \frac{\Phi_\nu(k)}{\Phi_\nu(z_0)} \sum_{n=0}^{m} \frac{\Phi_n(z_0)}{w^{n+1}} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{(1)}(z_0) \int_{K_\varrho} \left\{\frac{\Phi_\nu(k)}{\Phi_\nu(z_0)} - \frac{\Phi_{\nu+1}(k)}{\Phi_{\nu+1}(z_0)}\right\} \sum_{n=0}^{m} \frac{\Phi_n(z_0)}{w^{n+1}} dw\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

c'est que

$$A_m^{(2)}(z_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{m\nu} A_\nu^{(1)}(z_0)\,, \tag{3.4}$$

avec

$$\begin{aligned} c_{m\nu} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\varrho} \left\{\frac{\Phi_\nu(k)}{\Phi_\nu(z_0)} - \frac{\Phi_{\nu+1}(k)}{\Phi_{\nu+1}(z_0)}\right\} \sum_{n=0}^{m} \frac{\Phi_n(z_0)}{w^{n+1}} dw = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_\varrho} D_\nu(w) \sum_{n=0}^{m} \frac{\Phi_n(z_0)}{w^{n+1}} dw\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

La suite $\{A_\nu^{(1)}(z_0)\}$ étant convergente, le théorème est établi, selon (3.4), si l'on vérifie que la matrice $[c_{m\nu}]$ n'est pas régulière, et si l'on montre que $\{u_\nu\}$ étant une suite convergente qui se transforme par $[c_{m\nu}]$ en une suite divergente $\{v_m\}$, alors, en posant $A_\nu^{(1)}(z_0) = u_\nu$, $A_m^{(2)}(z_0) = v_m$, on peut déterminer les suites des coefficients $\{a_\nu^{(1)}\}$, $\{a_m^{(2)}\}$, dont chacune satisfait à la relation (2.8) tels que $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)}\Phi_\nu(z) = F_1(z)$ et $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)} \Phi_\nu(z) = F_2(z)$ soient des fonctions holomorphes dans $I(C_R)$.

Nous établirons en premier lieu que

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{m\nu}| = \infty\,. \tag{3.6}$$

Dans ce but nous allons transformer l'expression (3.5) de $c_{m\nu}$, introduire les quantités $\gamma_{m\nu}^*$, $\gamma_{m\nu}$ et démontrer d'une part que

$$\begin{aligned} \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} (|c_{m\nu}| - |\gamma_{m\nu}|)\right| &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{m\nu} - \gamma_{m\nu}| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{m\nu} - \gamma_{m\nu}^*| + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{m\nu}^* - \gamma_{m\nu}| = o(1) \quad (m\to\infty), \end{aligned} \tag{3.7}$$

d'autre part que

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{m\nu}| = \infty\,. \tag{3.8}$$

1° C_R étant formée d'un seul arc analytique régulier, $k(z)$ est prolongeable au delà de C_R dans un domaine partiel de $\mathrm{E}(\mathsf{C}_R)$. Par conséquent si $R_0 > R$ désigne le plus grand nombre pour lequel $k(z)$ est encore holomorphe dans $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_0})$, on peut remplacer dans (3.5) le contour d'intégration K_ϱ par $\mathsf{K}_{\varrho'}$, avec $R < \varrho' < R_0$.

De l'autre côté $|\varphi(z_0)| = R < \varrho'$, donc, vu (2.9), la série (2.5) est convergente pour $|w| = \varrho'$, et l'on a

$$I_\nu = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathsf{K}_{\varrho'}} D_\nu(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z_0)}{w^{n+1}}\, dw = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathsf{K}_{\varrho'}} D_\nu(w)\, \frac{\psi'(w)\, dw}{\psi(w) - z_0},$$

d'où, avec le changement de variable $\zeta = \psi(w)$, et en tenant compte du fait que $\Phi_\nu[k(\zeta)]$ est holomorphe dans $\bar{\mathrm{I}}(\mathsf{C}_{\varrho'})$,

$$I_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathsf{C}_{\varrho'}} \left\{\frac{\Phi_{\nu+1}[k(\zeta)]}{\Phi_{\nu+1}(z_0)} - \frac{\Phi_\nu[k(\zeta)]}{\Phi_\nu(z_0)}\right\} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 0\,. \tag{3.9}$$

En effet, $k(z_0) = z_0$, donc $\Phi_{\nu+1}[k(z_0)]/\Phi_{\nu+1}(z_0) - \Phi_\nu[k(z_0)]/\Phi_\nu(z_0) = 0$. Nous obtenons ainsi de (3.5) et (3.9)

$$c_{m\nu} - I_\nu = c_{m\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathsf{K}_{\varrho'}} D_\nu(w) \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\Phi_n(z_0)}{w^{n+1}}\, dw\,.$$

2° Posons maintenant

$$\gamma^*_{m\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathsf{K}_{\varrho'}} D_\nu(w) \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\varphi(z_0)^n}{w^{n+1}}\, dw = \frac{\varphi(z_0)^{m+1}}{2\pi i}\int_{\mathsf{K}_{\varrho}} \frac{D_\nu(w)\, dw}{w^{m+1}[w - \varphi(z_0)]}, \tag{3.10}$$

et formons la différence

$$c_{m\nu} - \gamma^*_{m\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathsf{K}_{\varrho'}} D_\nu(w) \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\Phi_n(z_0) - \varphi(z_0)^n}{w^{n+1}}\, dw\,. \tag{3.11}$$

On a, d'après (2.10),

$$|\Phi_n(z_0) - \varphi(z_0)^n| \leq c_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n |\varphi(z_0)|^n = c_0 r^n\,. \tag{3.12}$$

En changeant donc dans (3.11) $\mathsf{K}_{\varrho'}$ en K_ϱ $(r < \varrho < R)$, la somme qui y figure reste uniformément convergente étant majorée par la série

$$\frac{c_0}{\varrho} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left|\frac{\varphi(z_0)}{w}\right|^n = \frac{c_0}{\varrho} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n = \frac{c_1}{\varrho}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1}. \tag{3.13}$$

L'évaluation de $|D_\nu(w)|$ se fait maintenant au moyen de (2.11). Comme $k(z)$ applique C_R sur elle-même et φ, ψ, k sont univalentes, on a, si $R - \varrho$ est suffisamment petit,

$$R > \max_{|w|=\varrho} |\varphi(k[\psi(w)])| = \varrho_0 > r \tag{3.14}$$

et, par suite,

$$(3.15)\qquad |D_\nu(w)| \leqq \left|\frac{\Phi_{\nu+1}(k)}{\Phi_{\nu+1}(z_0)}\right| + \left|\frac{\Phi_\nu(k)}{\Phi_\nu(z_0)}\right| \leqq \frac{\mu}{\lambda}\left|\frac{\varphi(k)}{\varphi(z_0)}\right|^\nu \left(\left|\frac{\varphi(k)}{\varphi(z_0)}\right| + 1\right) \leqq 2\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\varrho_0}{R}\right)^\nu,$$

avec $\varphi(k) = \varphi(k[\psi(w)])$. On obtient ainsi de (3.11), (3.12), (3.13) et (3.15)

$$(3.16)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{m\nu} - \gamma^*_{m\nu}| \leqq 2\,c_1 \frac{\mu}{\lambda}\,\frac{1}{1-\dfrac{\varrho_0}{R}}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1} = c_2\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1}.$$

3° Soit ensuite

$$(3.17)\qquad \begin{aligned} \gamma_{m,\nu} &= \frac{\varphi(z_0)^{m+1}}{2\pi i}\int_{K_{\varrho'}}\left(\frac{\varphi(k)^{\nu+1}}{\varphi(z_0)^{\nu+1}} - \frac{\varphi(k)^\nu}{\varphi(z_0)^\nu}\right)\frac{dw}{w^{m+1}[w-\varphi(z_0)]} = \\ &= \frac{\varphi(z_0)^{m+1}}{2\pi i}\int_{K_{\varrho'}}\frac{d_\nu(w)\,dw}{w^{m+1}[w-\varphi(z_0)]} \end{aligned}$$

où $\psi(w_0) = z_0$ et $\varphi(k[\psi(w_0)]) = \varphi[k(z_0)] = \varphi(z_0)$. Il suit alors de la seconde expression de $\gamma^*_{m\nu}$ [cf. (3.10)] et de (3.17)

$$(3.18)\qquad \gamma^*_{m\nu} - \gamma_{m\nu} = \frac{\varphi(z_0)^{m+1}}{2\pi i}\int_{K_{\varrho'}}\frac{D_\nu(w) - d_\nu(w)}{w^{m+1}[w-\varphi(z_0)]}\,dw\,.$$

A fin de majorer

$$(3.19)\qquad |D_\nu(w) - d_\nu(w)| \leqq \left|\frac{\Phi_{\nu+1}(k)}{\Phi_{\nu+1}(z_0)} - \frac{\varphi(k)^{\nu+1}}{\varphi(z_0)^{\nu+1}}\right| + \left|\frac{\Phi_\nu(k)}{\Phi_\nu(z_0)} - \frac{\varphi(k)^\nu}{\varphi(z_0)^\nu}\right|,$$

écrivons (2.10) sous la forme suivante

$$(3.20)\qquad \Phi_n(z) = \left[1 + c_0\left(\frac{r}{|\varphi(z)|}\right)^n t_n(z)\right]\varphi(z)^n$$

où $|t_n(z)| \leqq 1$. Puis nous obtenons, pour la même raison que (3.14),

$$(3.21)\qquad R < \min_{|w|=\varrho'} |\varphi(k[\psi(w)])| = \varrho'_* < \max_{|w|=\varrho'} |\varphi(k[\psi(w)])| = \varrho'_0\,,$$

et nous aurons, en vertu de (2.11), (3.20) et (3.21),

$$(3.22)\qquad \left|\frac{\Phi_\nu(k)}{\Phi_\nu(z_0)} - \frac{\varphi(k)^\nu}{\varphi(z_0)^\nu}\right| \leqq \frac{c_0}{\lambda}\left[\left(\frac{r}{\varrho'_*}\right)^\nu |t_\nu(k)| + \left(\frac{r}{R}\right)^\nu |t_\nu(z_0)|\right]\left|\frac{\varphi(k)}{\varphi(z_0)}\right|^\nu \leqq \frac{2\,c_0}{\lambda}\left(\frac{r\varrho'_0}{R^2}\right)^\nu.$$

Si $\varrho' - R$ est assez petit, on a $R < \varrho'_0 < R^2/r$ et $r\varrho'_0/R^2 < 1$. On conclut donc de (3.19) et (3.22)

$$(3.23)\qquad |D_\nu(w) - d_\nu(w)| \leqq c_3\left(\frac{r\varrho'_0}{R^2}\right)^\nu.$$

Il vient enfin de (3.18) et (3.23)

$$(3.24)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} | \gamma^*_{m\nu} - \gamma_{m\nu} | \leq \frac{c_3}{\varrho' - R} \frac{\varrho'}{1 - \frac{r\,\varrho_0'}{R^2}} \left(\frac{R}{\varrho'}\right)^{m+1} = c_4 \left(\frac{R}{\varrho'}\right)^{m+1}.$$

(3.16) et (3.24) entraînent (3.7).

4° Il reste à établir (3.8). À cet effet remarquons que dans (3.17) la fonction à intégrer n'a pas de pôle en $w_0 = \varphi(z_0)$, puisque w_0 est un zéro de $d_\nu(w)$. En conséquence on peut changer le contour d'intégration $\mathsf{K}_{\varrho'}$ en K_R et mettre (3.17) sous la forme

$$(3.25)\qquad \gamma_{m\nu} = \frac{\varphi(z_0)^{m-\nu}}{2\pi i} \int\limits_{\mathsf{K}_R} \frac{\varphi(k)^\nu}{w^{m+1}} \frac{\varphi(k) - \varphi(z_0)}{w - \varphi(z_0)} dw\,.$$

Posons, pour $| w | = R$,

$$(3.26)\qquad \varphi\big(k[\psi(w)]\big) = Re^{i\vartheta}\,,\ \varphi(z) = w = Re^{i\omega(\vartheta)}\,,\ \varphi(z_0) = w_0 = Re^{i\omega(\vartheta_0)} = Re^{i\vartheta_0}\,,$$

c'est que $\omega(\vartheta_0) = \vartheta_0$. Nous pouvons ainsi écrire

$$(3.27)\qquad \gamma_{m\nu} = e^{i(m-\nu)\vartheta_0} g_{m\nu}\,,$$

avec

$$(3.28)\qquad g_{m\nu} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i[\nu\vartheta - m\omega(\vartheta)]} \frac{e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}}{e^{i\omega(\vartheta)} - e^{i\vartheta_0}} \omega'(\vartheta)\, d\vartheta\,.$$

φ, ψ, k étant des fonctions analytiques univalentes dans les domaines envisagés, $\omega(\vartheta)$ est également analytique et $\omega'(\vartheta) > 0$. $e^{i\omega(\vartheta)}$ est en outre périodique de période 2π. La périodicité de $e^{i\omega(\vartheta)}$ entraîne $\omega(\vartheta + 2\,\pi) = \omega(\vartheta) + 2\,\pi$; ainsi, en écrivant

$$(3.29)\qquad \omega(\vartheta) = \tau(\vartheta) + \vartheta\,,$$

on voit que $\tau(\vartheta) = \tau(\vartheta + 2\,\pi)$ est une fonction analytique, et $\tau(\vartheta_0) = 0$. Admettons pour un instant, contrairement à l'hypothèse initiale, que $z' \neq z''$ et posons $\varphi(z') = w' = Re^{i\omega(\vartheta')}$, $\varphi(z'') = w'' = Re^{i\omega(\vartheta'')}$, nous aurons, d'après (3.26) et (3.29), $\omega(\vartheta') = \vartheta'' = \tau(\vartheta') + \vartheta'$. Il s'ensuit que si $\tau(\vartheta)$ se réduisait à une constante $\tau_0 = \vartheta'' - \vartheta'$, $k(z)$ serait équivalente à une rotation, cas exclus par les conditions adoptées. Lorsque $z' = z'' = z_0$ et $\tau(\vartheta)$ est constante, on a $\tau_0 = \tau(\vartheta_0) = 0$, ou $\tau(\vartheta) \equiv 0$; $\tau(\vartheta)$ est alors une identité, c'est-à-dire équivalente à une rotation d'un angle zéro.

Posons, en tenant compte de (3.28) et (3.29),

$$(3.30)\qquad g_{m\nu} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i\nu\vartheta} p(\vartheta;\, m)\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i[(\nu-m)\vartheta - m\tau(\vartheta)]}\, q(\vartheta)\, d\vartheta\,,$$

et désignons par **A** l'ensemble des fonctions

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i\nu t}\,, \quad \text{avec} \quad \| f \| = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} | a_\nu | < \infty\,.$$

$q(\vartheta)$ étant analytique, $q(\vartheta) \in \mathbf{A}$; et comme $q(\vartheta) \neq 0$, $q(\vartheta)^{-1}$ est aussi analytique et $q(\vartheta)^{-1} \in \mathbf{A}$, avec $\| q^{-1} \| = c$. D'autre part, selon une proposition de J. P. Kahane ([8], Théorème V, p. 254), $\tau(\vartheta)$ *étant réelle, analytique, périodique et de période* 2π, *et non constante, il existe deux constantes* λ_1 *et* λ_2 *telles que* $\lambda_1 \sqrt{| n |} < \| e^{in\tau} \| < \lambda_2 \sqrt{| n |}$ $(-\infty < n$ *entier* $< \infty)$.[1] En conséquence, $p(\vartheta; m)$ étant le produit de fonctions appartenant à **A**, $p(\vartheta; m) \in \mathbf{A}$, et

$$\lambda_1 \sqrt{m} < \| e^{-im\tau} \| \leqq \| e^{im\vartheta} \| \cdot \| q^{-1} \| \cdot \| p \| = c \, \| p \|\,. \tag{3.31}$$

Soit

$$p(\vartheta; m) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} p_\nu^{(m)} e^{i\nu\vartheta}\,.$$

La relation (3.30) exprime alors que $g_{m\nu} = p_{-\nu}^{(m)}$, où l'on avait admis que $\nu \geqq 0$. Mais $g_{m\nu}$ a un sens même si $\nu < 0$. Il suffit donc de montrer que

$$\sum_{\nu=-\infty}^{-1} | g_{m\nu} | = O(1) \qquad (m \to \infty). \tag{3.32}$$

On a, par la définition (3.27), $| g_{m\nu} | = | \gamma_{m\nu} |$ même lorsque $\nu < 0$. Changeons en (3.25) K_R en $K_{\varrho'}$ $(R < \varrho' < R_0)$, nous aurons, vu (3.21), pour $\nu < 0$

$$| \gamma_{m\nu} | \leqq c_5 \left(\frac{R}{\varrho'}\right)^m \left(\frac{R}{\varrho'_*}\right)^{-\nu},$$

d'où

$$\sum_{\nu=-\infty}^{-1} | \gamma_{m\nu} | \leqq c_6 \left(\frac{R}{\varrho'}\right)^m \to 0\,, \qquad m \to \infty. \tag{3.33}$$

(3.32) est donc établi. (3.31) et (3.32) entraînent déjà (3.8).

La relation (3.32) n'est pas inattendue. Nous avons remarqué dans le § 2 que la formule (2.4) peut être interprétée telle que $\Phi_\nu(z) \equiv 0$, pour $\nu < 0$. Il s'ensuit, d'après (3.5), que $c_{m\nu} \equiv 0$ pour $\nu < 0$.

5° Ceci posé considérons une suite convergente $\{u_\nu\}$ qui se transforme par $[c_{m\nu}]$ en une suite divergente $\{v_m\}$. z_0 comme un point double de la transformation $k(z)$ (il en a deux au plus) est bien déterminé. Soit $u_\nu = A_\nu^{(1)}(z_0)$, $v_m = A_m^{(2)}(z_0)$. On a alors, d'après (3.2) et (3.3),

$$a_\nu^{(1)} = \frac{u_\nu - u_{\nu-1}}{\Phi_\nu(z_0)}\,, \quad a_m^{(2)} = \frac{v_m - v_{m-1}}{\Phi_m(z_0)}$$

$(\Phi_\nu(z_0) \neq 0,\ \nu = 0, 1, \ldots)$. Il en découle, grâce à (2.9),

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, | a_\nu^{(1)} |^{1/\nu} \leqq \frac{1}{R}\,. \tag{3.34}$$

[1] C'est pourquoi que nous avons supposè que $k(z)$ n'est pas équivalente à une rotation; autrement $\tau(\vartheta)$ était constant et la proposition de Kahane ainsi que notre théorème n'aurait pas lieu.

$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \Phi_\nu(z)$ représente donc une fonction $F_1(z)$ holomorphe dans $\mathrm{I}(C_R)$. On obtient pour $a_m^{(2)}$ la relation analogue à (3.34) en déduisant de (3.2) et (3.3) la formule (3.1) qui a lieu pour chaque $\varrho = R - \eta$, avec un $\eta > 0$ arbitrairement petit. On en tire

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \, | a_m^{(2)} |^{1/m} \leqq \frac{1}{R}.$$

$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(2)} \Phi_m(z) = F_2(z)$ est ainsi également holomorphe dans $\mathrm{I}(C_R)$.

6° La démonstration du corollaire ne sera pas détaillée. Notons seulement qu'en utilisant les notations (façile à comprendre) r_j, R_j, C_{R_j}, K_{R_j}, $w_j = \varphi_j(z_j)$, $z_j = \psi_j(w_j)$ $(j = 1, 2)$ et en rappelant que $z_1 = k^*(z_2)$ est à présent une application de $\overline{\mathrm{I}}(C_{R_1})$ sur $\overline{\mathrm{I}}(C_{R_2})$, nous pouvons montrer avec des modifications insignifiantes des raisonnements précédents que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (| \tilde{c}_{m\nu} | - | \tilde{\gamma}_{m\nu} |) = o(1) \qquad (m \to \infty),$$

où

$$\tilde{\gamma}_{m\nu} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\varphi_2(\tilde{z}_2)^{m+1}}{\varphi_1(\tilde{z}_1)^{\nu+1}} \int_{K_{R_2}} \frac{\varphi_1(k^*)^\nu}{w_2^{m+1}} \frac{\varphi_1(k^*) - \varphi_1(\tilde{z}_1)}{w_2 - \varphi_2(\tilde{z}_2)} dw_2 = \frac{R_1}{R_2} e^{i\theta_{m\nu}} \gamma_{m\nu},$$

$\varphi_1(k^*) = \varphi_1(k^*[\psi_2(w_2)])$ et $\tilde{c}_{m\nu}$, $\tilde{\gamma}_{m\nu}$ sont des quantités analogues à $c_{m\nu}$ et $\gamma_{m\nu}$.

(Reçu le 23 Juillet 1964)

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALPÁR, L.: „Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercle de convergence, III." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **5** (1960) 97—152.

[2] ALPÁR, L.: „Sur certaines transformées des séries de puissances absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **7** (1962) 287—316.

[3] ALPÁR, L.: „Sur certaines transformations des séries de Faber." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **9** (1964) 283—296.

[4] FABER, G.: „Über polynomische Entwickelungen." *Mathematische Annalen* **57** (1903) 389—408.

[5] FABER, G.: „Über polynomische Entwickelungen II." *Mathematische Annalen* **64** (1907) 116—135.

[6] FABER, G.: „Über Tschebischeffsche Polynome." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **150** (1919—20) 79—105.

[7] ILIEFF, L.: *Analytische Nichtfortsetzbarkeit und Überkonvergenz einiger Klassen von Potenzreihen.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.

[8] KAHANE, J. P.: „Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes." *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **35** (1956) 349—359.

[9] MONTEL, P.: *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe.* Gauthier-Villars, Paris 1910.

[10] TURÁN, P.: „A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence-circle." *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **12** (1958) 19—26.

[11] ULLMAN, J. L.: „On Faber séries, 1. A problem of transfer." *The Michigan Mathematical Journal* **2** (1953—54) 109—114.

[12] ULLMAN, J. L.: „Studies on Faber polynomials I." *Transactions of the American Mathematical Society* **94** (1960) 515—528.

СХОДИМОСТЬ И КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

L. ALPÁR

Резюме

Пусть означают $\Phi_\nu(z)$ многочлен Фабера, ассоциированный с кривой C и $\Phi_\nu^{(j)}(z)$ многочлен Фабера, ассоциированный с кривой $C_j (j = 1, 2)$. В работе доказываются следующие:

Теорема. *Сходимость рядов Фабера в одной точке своих кривых сходимости не является конформно инвариантной. Точнее, пусть C простая, замкнутая кривая, которая состоит из единственной аналитической дуги, $k(z)$ — конформное, однолистное отображение внутренности C на себя, не является эквивалентным ротации, и пусть $z' \in C$, $z'' \in C$ две точки, такие, что $z' = k(z'')$, тогда существует функция*

$$F_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \Phi_\nu(z)$$

аналитическая внутри C, ряд Фабера, которой сходится в z', но функция

$$F_1(k(z)) = F_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)} \Phi_\nu(z)$$

которая также является аналитической внутри C, имеет ряд Фабера, расходящийся в z''.

Следствие. *Если C_1 и C_2 простые, замкнутые кривые (в плоскостях z_1 ссотв. z_2) каждая которых состоит из единственной аналитической дуги, $z_1 = k^*(z_2)$ отображение внутренности C_1 на внутренность C_2, конформное, однолистное, не эквивалентное ротации, и если $\tilde{z}_1 \in C_1$, $\tilde{z}_2 \in C_2$, две точки, такие что $\tilde{z}_1 = k^*(\tilde{z}_2)$ тогда существует функция*

$$F_1(z_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \Phi_\nu^{(1)}(z_1)$$

аналитическая внутри C_1, ряд Фабера которой сходится в $\tilde{z}_1$, но ряд Фабера *функции*

$$F_1(k^*(z_2)) = F_2(z_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)} \Phi_\nu^{(2)}(z_2)$$

являющейся аналитической внутри C_2 расходится в $\tilde{z}_2$.