ÜBER EIN INTERPOLATIONSVERFAHREN

von

M. SALLAY

1.

Herr Dr. G. Freud hat in seiner Arbeit [2] den folgenden Satz gezeigt: Betrachten wir die Nullstellen des Tschebischeffschen Polynoms $T_n(x) = \cos n(\operatorname{arc}\cos x)$ als Knotenpunkte der Interpolation; dann kann man eine Folge von Interpolationspolynomen konstruieren, welche den Jacksonschen Satz direkt beweist.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit der Frage ob man die Nullstellen allgemeiner Orthogonalpolynome als Knotenpunkte der Interpolation so wählen könnte, dass die in [2] definierten Interpolationspolynome die Jacksonsche Eigenschaft besitzen. Wir geben eine positive Antwort auf das Problem.

Wir bemerken, dass diese allgemeinere Klasse der Orthogonalpolynome die Tschebischeffschen Polynome enthält.

2.

Es sei $w(x)$ in dem Intervall $[-1, +1]$ stetige Funktion.

Setzen wir voraus, dass $w(x)$ die Bedingungen

$$0 < m \leqq w(x) \leqq M\,, \qquad (-1<x<1;\ m, M = \text{konst.}) \tag{2.1}$$

$$|\, w(x_1) - w(x_2)\,| = O(|\, x_2 - x_1\,|) \qquad (-1 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1) \tag{2.2}$$

befriedigt.

Bezeichnen wir mit $\{p_n(x)\}$ die Folge der orthonormalen Polynome, die zur Gewichtsfunktion $w(x)$ gehören, und mit x_{in} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ die Nullstellen des Polynoms $p_n(x)$.

Da $w(x)$ die Bedingung (2.2) befriedigt, gilt nach dem Satze von J. Korous (s.z.B. [5] Seite 160) für $-1 < x < 1$ die Abschätzung

$$|\, p_n(x)\,| < A(1 - x^2)^{-1/2}\,, \qquad (A = \text{konst.})$$

Also sind die Polynome $\{p_n(x)\}$ in irgendeinem Teilintervall (α, β) von $(-1, +1)$ gleichmässig beschränkt, d. h.

$$|\, p_n(x)\,| < K\,, \qquad (\alpha \leqq x \leqq \beta\,,\ K = \text{konst.}) \tag{2.3}$$

Es sei

$$\varphi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} v_k(x)\, l_{kn}^4(x) + 2(x - x_{kn})\, l_{kn}^3(x)\, l'_{kn}(x), \tag{2.4}$$

wo

$$v_{kn}(x) = 1 - \frac{p_n''(x_{kn})}{p_n'(x_{kn})}(x - x_{kn})$$

ist und es bezeichne

$$l_{kn}(x) = \frac{p_n(x)}{p_n'(x_{kn})(x - x_{kn})}$$

die Grundpolynome der Lagrangeschen Interpolation über die Knotenpunkte x_{kn}.

Es sei $f(x)$ eine in dem Intervall (α, β) $(-1 < \alpha \leqq 0 \leqq \beta < 1)$ stetige Funktion, ferner sei

$$I_n(f; x) \overset{\text{def}}{=} f(0) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x)\,[f(x_{kn}) - f(0)]\,. \tag{2.5}$$

Satz 1. *Es seien die Bedingungen* (2.1)—(2.3) *erfüllt. Dann ist*

$$|\,I_n(f; x) - f(x)\,| \leqq C\,\omega\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

wo C eine nur von $w(x)$ abhängige Konstante ist, und $\omega(f; \delta)$ bezeichnet den Stetigkeitsmodul von $f(x)$.

3.

Wir schicken jetzt einige wohlbekannten Formeln und Relationen voran, die wir in unserer Arbeit anwenden werden.

Es bezeichne $\lambda_n(\xi)$ die, zur Stelle ξ gehörige Cottesche Zahl und $l_n(x, \xi)$ die zum Grundpunktsystem gehörigen Lagrange-Parabeln. Die folgenden Relationen gelten (s. z. B. [3]):

$$\lambda_n(\xi) = \int_{-1}^{1} l_n^2(x, \xi)\, w(x)\, dx \geqq 0\,, \tag{3.1}$$

$$l_n(x, \xi) = \lambda_n(\xi) \sum_{r=0}^{n-1} p_r(\xi)\, p_r(x)\,, \tag{3.2}$$

$$\lambda_n(\xi) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-1} p_k^2(\xi)}\,. \tag{3.3}$$

Es sei $-1 + h \leqq x_{kn} \leqq 1 - h$; infolge (2.1) besteht für zwei benachbarte, in $(-1 + h, 1 - h)$ fallenden Nullstellen x_k und x_{k+1}

$$\frac{C_1(h)}{n} \leqq x_{k+1} - x_k \leqq \frac{C_2(h)}{n}\,, \tag{3.4}$$

wo $C_1(h)$ und $C_2(h)$ nur von h abhängige positive Zahlen sind (s. [1]).

Endlich sind wegen (3.4) und (2.3) die folgenden Relationen gültig:

$$\sum_{k=1}^{n} l_{kn}^2(x) = O(1) \tag{3.5}$$

(s. [3], Hilfssatz I),

$$\lambda_n(\xi) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \xi \in (\alpha, \beta) \tag{3.6}$$

(s. [3], Hilfssatz II),

$$l_{kn}(x) = \lambda_{kn} \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{p_{n-1}(x_{kn})\, p_n(x)}{x - x_{kn}} \tag{3.7}$$

wo $\frac{a_{n-1}}{a_n} \leqq 1$ ist (s. [4]), ferner

$$-\frac{p_n''(x_{kn})}{p_n'(x_{kn})} = \frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_n(x_{kn})} = \frac{\lambda_{kn}'}{\lambda_{kn}} \tag{3.8}$$

(s. [3], Beziehung (19)).

4.

Hilfssatz 1. *Für* $-1 + h < x < 1 - h$ *ist*

$$\sum_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x)\, |\, x - x_{kn}\,| = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.1}$$

Beweis. Es sei $x_j \leqq x \leqq x_{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$.
Wir zerlegen (4.1), wie folgt:

$$\sum_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x)\, |\, x - x_{kn}\,| = \sum_{\substack{r \neq j \\ r \neq j+1}}^{*} l_{rn}^4(x)\, |\, x - x_{kn}\,| + \tag{4.2}$$

$$+ l_{jn}^4\, |\, x - x_{jn}\,| + l_{j+1,n}^4\, |\, x - x_{j+1,n}\,|,$$

wo $\sum^*$ bezeichnet die Summe, wo die Glieder $r = j$ und $r = j + 1$ unterdrückt wurden. Nach den Relationen (3.7), (2.3), (3.6), ferner aus der linken Seite von (3.4)

$$\sum^* l_{kn}^4(x)\, |\, x - x_{kn}\,| \leqq \sum^* \lambda_{kn}^4 \frac{K^8}{|\, x - x_{kn}\,|^3} = O\left(\frac{1}{n^4}\right) \sum^* \frac{1}{|\, x - x_{kn}\,|^3} =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^4}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\frac{\nu^3}{n^3}} = O\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^3} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

folgt.

Wir wenden jetzt die Ungleichung der rechten Seite von (3.4) und die [sich aus (3.2), (3.6) und (2.3) ergebene Relation] $l_{kn}^4(x) = O(1)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ an; dann können wir das zweite resp. das dritte Glied von (4.2) folgenderweise abschätzen:

$$l_{sn}^4(x)\, |\, x - x_{sn}\,| = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (s = j,\ j+1),$$

woraus die Behauptung von (4.1) schon folgt.

Ähnlicherweise kann die Abschätzung

$$(4.3)\qquad \sum_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x)\,|\,x - x_{kn}\,|^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad (-1 + h < x < 1 - h)$$

bewiesen werden.

Hilfssatz 2. *Es sei* $-1 + h < x < 1 - h$, *dann ist die Relation*

$$(4.4)\qquad \sum_{k=1}^{n} |\,l_{kn}^3(x)\,|\,|\,l'_{kn}(x)\,|\,|\,x - x_{kn}\,| = O(1)$$

gültig.

Beweis. Mit Rücksicht darauf, dass $l_{kn}(x)$ in dem Intervall $[-1, +1]$ ein Polynom höchstens $(n-1)$-ter Grades ist, ergibt sich nach dem Satze von BERNSTEIN (s. z. B. [5], Seite 5.) die folgende Abschätzung:

$$|\,l'_{kn}(x)\,| \leqq \frac{O(n)}{\sqrt{1 - x^2}},$$

woraus wir für $-1 + h < x < 1 - h$ die Ungleichung

$$(4.5)\qquad |\,l'_{kn}(x)\,| \leqq O(n)$$

erhalten.

Der weitere Beweis ist dem Hilfssatze 1 ähnlich. Es sei $x_j \leqq x \leqq x_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$; wir zerlegen den linken Seite von (4.4) folgenderweise:

$$\sum_{k=1}^{n} |\,l_{kn}^3(x)\,|\,|\,l'_{kn}(x)\,|\,|\,x - x_{kn}\,| = \sum_{\substack{k \neq j \\ k \neq j+1}}^{*} |\,l_{kn}^3(x)\,|\,|\,l'_{kn}(x)\,|\,|\,x - x_{kn}\,| +$$
$$+ |\,l_{jn}^3\,|\,|\,l'_{jn}\,|\,|\,x - x_{jn}\,| + |\,l_{j+1,n}^3\,|\,|\,l'_{j+1,n}\,|\,|\,x - x_{j+1,n}\,|.$$

Nach den Beziehungen (3.7), (2.3) und (4.5) gilt die Abschätzung

$$(4.6)\qquad \sum{}^{*} |\,l_{kn}^3(x)\,|\,|\,l'_{kn}(x)\,|\,|\,x - x_{kn}\,| \leqq O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\frac{\nu^2}{n^2}} = O(1),$$

weiter folgt aus $|\,x_{j+1} - x_j\,| \leqq O\left(\frac{1}{n}\right)$ die Relation

$$|\,l_{sn}^3(x)\,|\,|\,l'_{sn}(x)\,|\,|\,x - x_{sn}\,| = O(1) \qquad (s = j, j+1).$$

Hieraus und infolge (4.6) erhalten wir die Behauptung von (4.4).

Ähnlicherweise können wir die Abschätzung

$$(4.7)\qquad \sum_{k=1}^{n} |\,l_{kn}^3(x)\,|\,|\,l'_{kn}(x)\,|\,|\,x - x_{kn}\,|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

beweisen.

Hilfssatz 3. *Es sei* $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$; *dann besteht unter den Bedingungen des Satzes* 1

$$(4.8)\qquad \left|\frac{\lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2}\right| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Beweis. Der Beweisgang geht nach einer Idee von Herrn G. FREUD, welche für den Beweis des Hilfssatzes X in [3] angewendt wurde.

Es sei z.B. $-1+h<\xi_1\leqq\xi_2<1-h$, und es bezeichne $\varphi(x)$ die lineare Funktion, für welche $\varphi(\xi_1)=\xi_2$ und $\varphi(1)=1$ ist. Ferner es sei η der kleinste Wert von $\varphi(x)$ in $[-1,+1]$. Dann ergibt sich

$$\varphi(x)=1+\frac{1-\xi_2}{1-\xi_1}(x-1)\,,$$

$$\eta=-1+\frac{2(\xi_2-\xi_1)}{1-\xi_1}\,,$$

und es ist weiter

$$0<\varphi(x)-x\leqq\frac{2}{1-\xi_1}(\xi_2-\xi_1)\,.$$

Mit Rücksicht auf $l_n(\xi_2,\xi_2)=1$ ergibt sich aus der Minimumeigenschaft von $\lambda_n(\xi)$ die Ungleichung

$$\lambda_n(\xi_1)\leqq\int_{-1}^{1}l_n^2(\varphi(t),\xi_2)\,w(t)\,dt\,. \tag{4.9}$$

Die inverse Funktion von $\varphi(x)$ sei

$$\Phi(x)=1+\frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}(x-1)\,. \tag{4.10}$$

Mit der Substitution $t=\Phi(x)$ erhalten wir aus (4.9)

$$\lambda_n(\xi_1)\leqq\frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}\int_{-1}^{1}l_n^2(x,\xi_2)\,w(\Phi(x))\,dx\,.$$

Nach der Relation

$$0\leqq x-\Phi(x)\leqq\frac{2}{1-\xi_1}(\xi_2-\xi_1)\qquad(\eta\leqq x\leqq 1)$$

folgt, dass

$$\lambda_n(\xi_1)-\lambda_n(\xi_2)\leqq\int_{\eta}^{1}l_n^2(x,\xi_2)\,[w[\Phi(x)]-w(x)]\,dx+$$
$$+\frac{\xi_2-\xi_1}{1-\xi_2}\int_{\eta}^{1}l_n^2(x,\xi)\,w(\Phi(x))\,dx$$

ist. Ähnlicherweise kann man die Ungleichung

$$\lambda_n(\xi_1)-\lambda_n(\xi_2)\geqq-\int_{\eta}^{1}l_n^2(x,\xi_2)\,[w(\Phi^*(x))-w(x)]\,dx-$$
$$-\frac{\xi_2-\xi_1}{1+\xi_1}\int_{1}^{\eta}l_n^2(x,\xi)\,w(\Phi^*(x))\,dx$$

beweisen, wo die Funktion $\Phi^*(x)$ die inverse Funktion von

$$\varphi^*(x) = 1 - \frac{2(\xi_2 - \xi_1)}{1 + \xi_2}(x - \xi_1) \tag{4.11}$$

ist, und ist es ferner

$$0 \leqq \Phi^*(x) - x \leqq \frac{2}{1 + \xi_2}(\xi_2 - \xi_1).$$

Nach der Bedingung (2.2) und infolge (4.10) und (4.11) erhalten wir

$$| w[\Phi(x)] - w(x) | = O(| \xi_2 - \xi_1 |),$$

$$| \lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2) | \leqq O(| \xi_2 - \xi_1 |) \int_{-1}^{1} l_n^2(x, \xi_2)\, dx +$$

$$+ \frac{\text{konst.} \, | \xi_2 - \xi_1 |}{h} \int_{-1}^{1} l_n^2(x, \xi_2)\, dx.$$

Aus $w(x) \geqq m$ und nach (3.6) ergibt sich

$$\int_{-1}^{1} l_n^2(x, \xi_2)\, dx \leqq \frac{1}{m} \int_{-1}^{1} l_n^2(x, \xi_2)\, w(x)\, dx = \frac{1}{m} \lambda_n(\xi_2) \leqq \frac{\text{konst.}}{n},$$

also es folgt

$$| \lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2) | \leqq O(| \xi_2 - \xi_1 |)\, O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Offenbar folgt aus dieser Abschätzung, dass für $\xi_2 \to \xi_1$, $\xi_1 = x_{kn}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$| \lambda_n'(x_{kn}) | = \left| \lim_{\xi \to x_{kn}} \frac{\lambda_n(\xi) - \lambda_n(x_{kn})}{\xi - x_{kn}} \right| \leqq O(1) \tag{4.12}$$

besteht.

5.

Herr Dr. G. Freud hat in seiner Arbeit [2] den folgenden Satz bewiesen: *Es seien die Zahlen x_{kn} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in einem Intervall $[a, b]$ so beschaffen, dass die Funktionenfolge $\varphi_{kn}(x)$ die folgenden Bedingungen befriedigt:*

$$\sum_{k=1}^{n} | \varphi_{kn}(x) | = O(1), \tag{5.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} | \varphi_{kn}(x) | \, | x - x_{kn} | = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{5.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x) = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5.3}$$

Dann ist die Relation

$$| I_n(f; x) - f(x) | = O(1)\, \omega \left(f; \frac{1}{n}\right)$$

erfüllt.

Um hieraus unseren Satz zu beweisen, ist es hinreichend zu zeigen, dass für die in (2.4) definierten Funktionen $\varphi_{kn}(x)$ die Bedingungen (5.1)–(5.3) gelten.

Setzen wir in $v_{kn}(x)$ die Relation (3.8) ein. Dann erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[l_{kn}^4(x) \left(1 + \frac{\lambda'_{kn}}{\lambda_{kn}} (x - x_{kn})\right) + 2(x - x_{kn})\, l_{kn}^3(x)\, l'_{kn}(x) \right],$$

also es ist

$$\sum_{k=1}^{n} | \varphi_{kn}(x) | \leqq \sum_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x) + \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\lambda'_{kn}}{\lambda_{kn}} \right| l_{kn}^4(x)\, | x - x_{kn} | +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{n} | l_{kn}^3(x) |\, | l'_{kn}(x) |\, | x - x_{kn} | .$$

Aus der Relation $\sum_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x) = O(1)$, ferner nach (3.6), (4.1), (4.4) resp. (4.12) ergibt sich die Behauptung

$$\sum_{k=1}^{n} | \varphi_{kn}(x) | = O(1).$$

Ähnlicherweise, indem wir die Relationen (3.6), (4.3), (4.7) resp. (4.12) in die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} | \varphi_{kn}(x) |\, | x - x_{kn} | \leqq \sum_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x)\, | x - x_{kn} | +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x) \left| \frac{\lambda'_{kn}}{\lambda_{kn}} \right| | x - x_{kn} |^2 + \sum_{k=1}^{n} | l_{kn}^3(x) |\, | l'_{kn}(x) |\, | x - x_{kn} |^2$$

setzen, bekommen wir die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n} | \varphi_{kn}(x) |\, | x - x_{kn} | = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

d. h. die Bedingung (5.2).

Es ist noch notwendig die Ungleichung (5.3) zu beweisen.

Es sei

$$\Phi(x, \xi) \overset{\text{def}}{=} \left[\lambda_n(\xi) \sum_{r=0}^{n-1} p_r(\xi)\, p_r(x) \right]^2. \tag{5.4}$$

Nach (3.2) folgt, dass die Funktion

$$\Phi(x, x_{kn}) = l_{kn}^2(x_{kn}) = \left[\lambda_{kn} \sum_{r=0}^{n-1} p_r(x_{kn})\, p_r(x) \right]^2$$

im x ein Polynom höchstens $(2n-2)$-ter Grades ist. Setzen wir in die Hermite-Fejérsche Interpolationsformel

$$P_{2n-2}(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\, l_{kn}^2(x)\, P_{2n-2}(x_{kn}) + (x - x_{kn})\, l_{kn}^2(x)\, P'_{2n-2}(x_{kn})$$

$P_{2n-2}(x) = \Phi(x, \xi)$ ein. Dann erhalten wir

$$\Phi(x, \xi) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\, l_{kn}^2(x)\, \lambda_n^2(\xi) \left(\sum_{r=0}^{n-1} p_r(x_{kn})\, p_r(\xi)\right)^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} 2(x - x_{kn}) \left(\sum_{r=0}^{n-1} p_r(x_{kn})\, p_r(\xi)\right) \left(\sum_{r=0}^{n-1} p'_r(x_{kn})\, p_r(\xi)\right),$$

also es ist

$$\Phi(x, \xi) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\, l_{kn}^2(x)\, l_{kn}^2(\xi) \frac{\lambda_n^2(\xi)}{\lambda_{kn}^2} + \tag{5.5}$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{n} (x - x_{kn})\, l_{kn}^2(x)\, l_{kn}(\xi)\, l'_{kn}(\xi) \frac{\lambda_n^2(\xi)}{\lambda_{kn}^2}.$$

Mit der Substitution[1] $\xi = x$ in (5.4) ergibt sich

$$\Phi(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_n^2(x)}{\lambda_{kn}^2} [v_{kn}(x)\, l_{kn}^4(x) + 2(x - x_{kn})\, l_{kn}^3(x)\, l'_{kn}(x)].$$

Anderseits setzen wir die Relation (3.3) in (5.4) ein. Dann bekommen wir

$$\Phi(x, x) \equiv 1,$$

woraus

$$\sum_{k=1}^{n} [v_{kn}(x)\, l_{kn}^4(x) + 2(x - x_{kn})\, l_{kn}^3(x)\, l'_{kn}(x)] \frac{\lambda_n^2(x)}{\lambda_{kn}^2} = \tag{5.6}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x) \frac{\lambda_n^2(x)}{\lambda_{kn}^2}$$

folgt. Schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x) \frac{\lambda_{kn}^2 - \lambda_n^2(x)}{\lambda_{kn}^2}. \tag{5.7}$$

Die Ungleichung (5.3) zu beweisen müssen wir noch zeigen, dass das zweite Glied von (5.7) gleich $O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist.

---

[1] Hier wenden wir die Idee des Beweises des Hilfssatzes 1 in [2] von G. FREUD an; in dem Falle der Tschebischeffschen Polynome ist aber $\lambda_n(\xi)$ gleich $\frac{1}{n}$.

Tatsächlich ist es

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x) \frac{\lambda_{kn}^2 - \lambda_n^2(x)}{\lambda_{kn}^2} \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{kn}(x)| \, |x - x_{kn}| \left| \frac{\lambda_{kn}(x_{kn}) + \lambda_n(x)}{\lambda_{kn}^2} \right| \left| \frac{\lambda_{kn}(x_{kn}) - \lambda_n(x)}{x - x_{kn}} \right| =$$

$$= O(n) \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\lambda_n(x) - \lambda_{kn}(x_{kn})}{x - x_{kn}} \right| |\varphi_{kn}(x)| \, |x - x_{kn}| ,$$

woraus nach (4.12) resp. (5.2) die notwendige Abschätzung folgt.

(Eingegangen: 19. November, 1964.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ERDŐS, P.—TURÁN, P.: „On Interpolation III." *Annals of Math.* **41** (1940) 510—553.

[2] FREUD, G.: „Über ein Jacksonsches Interpolationsverfahren." *Über Approximationstheorie*, JSNM, **5** (Basel—Stuttgart, 1964), 227—232.

[3] FREUD, G.: „Über die Konvergenz des Hermite-Fejérschen Interpolationsverfahrens." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (1954) 109—127.

[4] FREUD, G.: „Über die Lebesgueschen Funktionen der Lagrangeschen Interpolation." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953) 137—142.

[5] SZEGŐ, G.: *Orthogonal polynomials.* Amer. Math. Coll. Publ. XXIII. New York (1959).

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

M. SALLAY

Резюме

Пусть $w(x)$ — функция, определенная для значений переменного x в интервале $[-1, +1]$ и удовлетворяющая условиям (2.1), соотв. (2,2). Обозначим через $\{p_n(x)\}$ ортонормированную систему многочленов, принадлежащую к весовой функции $w(x)$ и пусть будет $f(x)$ функция непрерывная в некотором подинтервале (α, β) интервала $(-1, +1)$, далее

$$I_n(f; x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x) \, [f(x_{kn}) - f(0)] ,$$

где x_{kn} — и являются корнями многочлена $p_n(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

$$\varphi_{kn}(x) = v_{kn}(x) \, l_{kn}^4(x) + 2(x - x_{kn}) \, l_{kn}^3(x) \, l_{kn}'(x)$$

и

$$v_{kn}(x) = 1 - \frac{p_n''(x_{kn})}{p_n'(x_{kn})} (x - x_{kn}) .$$

Теорема. *При вышеприведенных предположениях интерполяционные многочлены $I_n(f; x)$ являются многочленами типа Джексона т. е.:*

$$|f(x) - I_n(f; x)| \leqq C\omega(f; x) ; \qquad x \in (\alpha, \beta) ,$$

где константа C зависит только от функции $w(x)$ и $\omega(f, \delta)$ является модулем непрерывности функции $f(x)$.