AZ ANALÓG SZÁMOLÓGÉPEK PROGRAMOZÁSÁRÓL

TÓTH KÁROLY

Bevezetés

A tudományos kutatással, műszaki tervezéssel foglalkozók számára az elektronikus számológépek használata egyre elkerülhetetlenebb lesz. Mint ismeretes, a számológépek két alapcsoportba sorolhatók, a digitális és analóg számológépek csoportjába. Amíg azonban a digitális gépek és felhasználási területük szélesebb körben ismert, addig az analóg gépek csak egyes szakterületek számára ismertek. Ennek oka részben abban rejlik, hogy az analóg gépek kevésbé univerzálisak, mint a digitálisok. Az analóg számológép ugyanis főleg közönséges differenciálegyenletek különböző kezdeti- és peremfeltételek melletti megoldására, valamint szabályozástechnikai rendszerek vizsgálatára alkalmas, ami természetesen nem zárja ki annak lehetőségét, hogy más matematikai feladatok megoldására is alkalmazzuk. Lényegében minden olyan feladat, amely közönséges differenciálegyenletekre visszavezethető, megoldható az analóg gépen. A differenciálegyenletek lehetnek lineárisak, vagy nemlineárisak. Különösen az utóbbiak megoldására előnyös az analóg számológép alkalmazása, mivel ezeket ritkán tudjuk zárt alakban integrálni.

Az analóg gépek alkalmazási területének bővítése, a pontosság növelése az utóbbi években nagy lendületet vett. A világszerte épülő analóg számológépek között egyre több hibrid (digitális—analóg kombináció) és iteratív működésű gép található. Az ilyen irányú fejlesztés oka az, hogy az analóg számológép gyors és szemléletes módon oldja meg a közönséges differenciálegyenleteket, a pontossága azonban viszonylag kicsi. A hibrid berendezéssel az analóg elemekkel végzett integrálás pontosságát növelik, ugyanakkor a digitális programozást egyszerűsítik, az iteratív működésű gépek pedig az analóg gép alkalmazási területét bővítik ki digitális elemek (vezérlésben) felhasználásával. Ez a világszerte tapasztalt nagymérvű fejlesztés azonban nem jelenti azt, hogy kisebb analóg gépeket többé nem gyártanak. A kis és közepes méretű gépek a jövőben is egyre fokozottabb elterjedésre számíthatnak olcsóságuk és gyorsaságuk miatt. Szükségesnek látszik tehát az analóg gépek működését és alkalmazását minél szélesebb körökben ismertetni.

Az alábbiakban összefoglaljuk az analóg gép legfontosabb műveleti elemeinek fizikai alapelveit, valamint a gép programozásához szükséges alapvető ismereteket.

A programozás megértéséhez a műveleti elemek fizikai felépítésének ismerete nem feltétlenül szükséges. Tárgyalásunkat ezért két részre bontottuk. Az I. rész a fizikai alapelvekkel foglalkozik, míg a tulajdonképpeni programozást a II. részben ismertetjük. Az I. rész végén foglaltuk össze a műveleti elemek szimbolikus jelöléseit és az általuk elvégezhető műveleteket. Ennek áttekintése a programozás megértéséhez nem nélkülözhető.

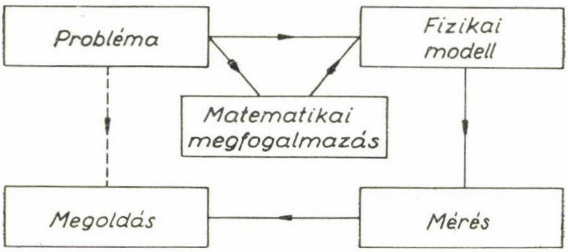
I.

Az elektronikus analóg számológép műveleti elemei

Ha a megoldandó feladathoz található olyan fizikai folyamat, amelyre formálisan ugyanazok a törvényszerűségek érvényesek, mint a megoldandó feladatra, akkor a megoldást az analóg modellen is kereshetjük. Ilyenkor a megoldást úgy kapjuk, hogy a feladat változóit a megfelelő fizikai változókra transzformáljuk, és a keresett értékeket a modellen a fizikai változók mérésével határozzuk meg. Az ilyen fizikai modell a lehetőségekhez képest sokoldalú kell legyen, hogy minél több problémakört lehessen vele megoldani.

A matematikai változók az analóg gépben fizikai mennyiségekkel vannak ábrázolva. Mechanikus analóg számológépeknél elmozdulás, forgásszög stb. elektronikus gépeknél feszültség, vagy áram a változó, továbbá az idő — mint fizikai mennyiség — reprezentálja a független változót.

Az analóg rendszerű számológépek alapelvét vázlatosan az 1. ábrán láthatjuk.



1. ábra

Mint az ábrából kitűnik, a probléma matematikai megfogalmazása gyakran nem szükséges, mert a feladat közvetlenül is modellezhető. Az ilyen típusú feladat analóg géppel történő megoldását szimulációnak nevezzük. Tekintve, hogy az ilyen feladatok a szabályozástechnikában fordulnak elő, és magyar nyelvű irodalom is rendelkezésre áll ([1]), tárgyalásunkban csak olyan elektronikus analóg számológépekről lesz szó, amelyek matematikai megfogalmazást tesznek szükségessé.

Az univerzális alkalmazhatóság céljából az elektronikus analóg számológépet *műveleti (operációs) elemekből* építik fel. Az adott matematikai feladatnak megfelelően ezekből az elemekből egy analóg rendszert kapcsolhatunk össze. A legáltalánosabb analóg műveleti elemek fizikai alapelvét csak röviden ismertetjük.

Integráló elem

Ismeretes, hogy egy C kapacitás sarkain levő U feszültség és a rajta levő Q töltés között a

$$Q = CU$$

összefüggés áll fenn. Tehát a kondenzátor töltésének időbeli változását — ha a C-t időtől függetlennek tekinthetjük — az

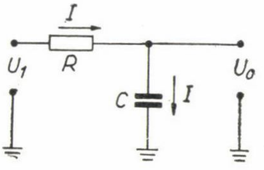
$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dU}{dt}$$

differenciálegyenlet írja le. Az egyenletet idő szerint integrálva láthatjuk, hogy

$$U = \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt\,,$$

tehát a kondenzátoron levő feszültség a töltőáram idő szerinti integráljával arányos.

Mivel a bemeneti jel nem állítható elő könnyen szabályozható áram formájában, a C kondenzátort egy R ellenálláson keresztül töltjük fel egy könnyebben előállítható U_1 feszültségforrásból. A megfelelő kapcsolást a 2. ábra mutatja.



2. *ábra*

Az R ellenálláson átfolyó I áram szigorúan véve nem arányos az U_1 feszültséggel, ugyanis a kondenzátor kapcsain levő U_0 feszültség az arányosságot zavarja. Az I áram tehát Ohm törvényét alkalmazva felírható

$$I = \frac{U_1 - U_0}{R}$$

alakban. Másrészt a már fentebb mondottak értelmében

$$I = C\frac{dU_0}{dt}.$$

E két összefüggésből tehát az

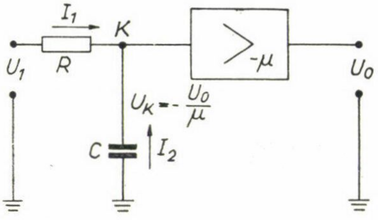
$$\frac{U_1 - U_0}{R} = C\frac{dU_0}{dt}$$

differenciálegyenletre jutunk, amely idő szerint integrálva és U_0-ra kifejezve az

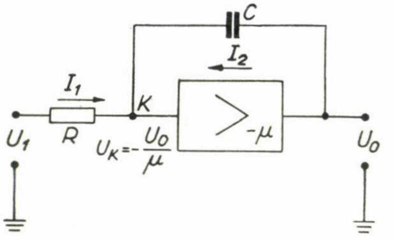
$$U_0 = -\frac{1}{RC}\int_0^t U_1 dt + \frac{1}{RC}\int_0^t U_0 dt$$

megoldást adja. Eszerint U_0 az U_1 bemenő feszültség integráljával arányos, de hibafeszültség is fellép, amelynek értékét a jobb oldal második tagja adja. Utóbbi értéke csak igen rövid időintervallumra és nagy időállandóra (RC)

lenne elhanyagolható. Az U_0 feszültségnek a bemenetre (a K csomópontra) gyakorolt hatását csökkenthetjük, ha a csomópont után egy egyenfeszültségű erősítőt kapcsolunk, amelynek erősítési tényezője $\mu \gg 1$. Igy elérhetjük, hogy a C kondenzátor sarkain fellépő U_k feszültség (lásd 3. ábrát) az erősítő kimenetén mérhető U_0 feszültségnek csak μ-edrésze lesz.



3. ábra



4. ábra

U_0 pillanatnyi értéke tehát kevésbé befolyásolja az I áram és az U_1 feszültség közötti arányosságot. Az egyenfeszültségű erősítő stabilitási okokból páratlanszámú fázisfordító fokozatból áll, így $\mu < 0$. Megjegyezzük még, hogy az erősítő bemenete úgy van kialakítva, hogy az erősítőn keresztül áram nem folyik. Eszerint az I áram megegyezik a C kapacitás töltőáramával, de ennek kapcsain most U_k feszültség van. Ohm törvényét és a kapacitás töltőáramának összefüggését alkalmazva az

$$\frac{U_1 - U_k}{R} = C \frac{dU_k}{dt}$$

differenciálegyenletet írhatjuk fel. Az $U_k = -\frac{U_0}{|\mu|}$ behelyettesítést elvégezve és idő szerint integrálva a differenciálegyenletet az U_0 értékére a következő összefüggést nyerjük:

$$U_0 = -\frac{|\mu|}{RC} \int_0^t U_1 dt - \frac{1}{RC} \int_0^t U_0 dt .$$

Az összefüggés azt mondja ki, hogyha μ elég nagy, valamint az RC időállandó a μ nagyságrendjébe esik, a második tag gyakorlati szempontból elhanyagolható, így a 3. ábra szerinti kapcsolás a $\frac{\mu}{RC}$ arányossági tényezőtől és előjeltől eltekintve elegendő kis hibával szolgáltatja a bemenő feszültség integrálját. Látható azonban, hogy az arányossági tényezőben μ értéke is szerepel, tehát az erősítési tényező ingadozásai befolyásolják az eredményt. Ennek kiküszöbölésére alkalmazzák az ún. Miller-integrátort (4. ábra), amely az előbbi kapcsolással ekvivalens, azonban a visszacsatoló körben elhelyezett kapacitás értéke az előbbi kapcsolásban alkalmazottnak $1 - \mu$-ed része.

Az U_1 irányából a K csomópont irányába folyó áram Ohm törvénye értelmében:

$$I_1 = \frac{U_1 - U_k}{R}.$$

Az U_0-tól a csomópont felé irányuló áram értéke pedig:

$$I_2 = C\frac{d(U_0 - U_k)}{dt}.$$

Ha a K csomópontra Kirchoff 1. törvényét felírjuk, az

$$I_1 + I_2 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelybe behelyettesítve az áramok értékét az

$$\frac{U_1 - U_k}{R} + C\frac{d(U_0 - U_k)}{dt} = 0$$

differenciálegyenletet nyerjük. Az $U_k = -\frac{U_0}{|\mu|}$ behelyettesítés útján nyert

$$\frac{U_1 + \frac{U_0}{|\mu|}}{R} + C\frac{d\left(U_0 + \frac{U_0}{|\mu|}\right)}{dt} = 0$$

differenciálegyenletre a $|\mu| \to \infty$ határátmenetet elvégezve és idő szerint integrálva az

$$U_0 = -\frac{1}{RC}\int_0^t U_1 dt$$

összefüggést kapjuk. RC-t az integrálás *időállandó*jának nevezzük. Meg kell jegyeznünk, hogy a C kapacitás frekvenciafüggő elem lévén fellép a kapcsolásban egy frekvenciától függő hiba is. Ezért az analóg számológépeken a jelfeszültségek frekvenciáját korlátozzák.

Összeadó elem

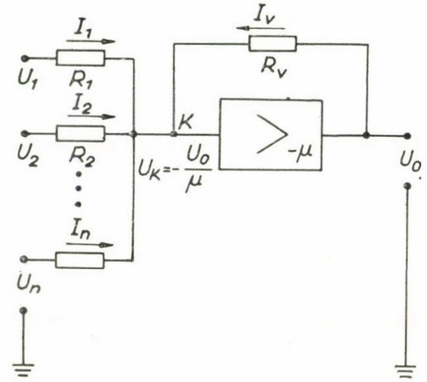
Helyettesítsünk a 4. ábra C visszacsatoló kondenzátorának helyébe R_v ellenállást, az erősítő bemenetét pedig alakítsuk ki úgy, hogy az $U_1, U_2, \ldots, U_n$ feszültségeket rendre $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ellenállásokon keresztül kapcsoljuk a K csomópontra (5. ábra).

Kirchoff 1. törvényét és az Ohm törvényt a csomópontra alkalmazva nyerjük a következő összefüggést:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i - U_k}{R_i} + \frac{U_0 - U_k}{R_v} = 0.$$

Az $U_k = -\dfrac{U_0}{|\mu|}$ értékét behelyettesítve és U_0-ra kifejezve az

$$U_0 = \frac{-R_v \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{U_i}{R_i}}{1 + \dfrac{1}{|\mu|}\left(1 + R_v \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{R_i}\right)} \tag{1}$$



5. *ábra*

egyenletet kapjuk, amelyből $|\mu| \to \infty$ esetén következik, hogy

$$U_0 = -R_v \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{R_i}.$$

Az $R_1, R_2, \ldots, R_n$, valamint R_v értékeit 1-nek választva egyszerű összeadó elemet kapunk, az $R_1, R_2, \ldots, R_n$ megválasztásától függően pedig tetszőleges állandó szorzótényezőket is beállíthatunk. Az előjelfordító elem az összeadó elem speciális esete, amikor $R_v = R_1$ és $U_2 = U_3 = \ldots = U_n = 0$. Ez esetben az elem tehát az

$$U_0 = -U_1$$

összefüggést valósítja meg.

Az (1) összefüggésből látható, hogy véges μ esetén a bemenetek száma és a bemenő ellenállások értéke nem lehet tetszőleges. μ értékét olyan nagyra szokták választani, hogy az (1) nevezőjében szereplő hibatag a gyakorlatban előforduló esetekben elhanyagolható legyen.

Az előbbiekhez hasonlóan beláthatjuk, hogy ha egy integráló elem bemenetét az összeadó elemnél ismertetett módon alakítjuk ki, tehát $U_1, U_2, \ldots, U_n$ feszültségeket rendre $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ellenállásokon át kapcsoljuk a K csomópontra, az így kapott elem az

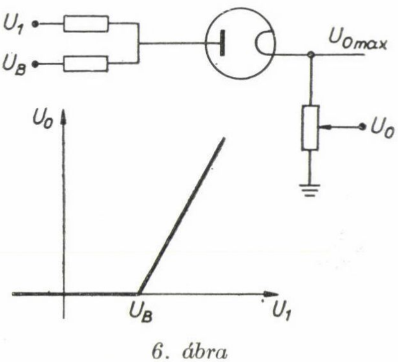
$$U_0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i C} \int_0^t U_i dt$$

matematikai műveletet valósítja meg. $C = 1$ esetén különböző állandó szorzótényezőkkel szorzott feszültségjelek integráljainak összegét képezhetjük ilyen módon.

Függvénygenerátor

Az $x = f(t)$ vagy $y = F[x(t)]$ alakú függvények előállítására különböző elektronikus megoldású függvénygenerátorokat szokás alkalmazni. Ezek alapelveinek ismertetése meghaladja jelen cikk kereteit, így csak a leggyakrabban előforduló típus lényegét vázoljuk.

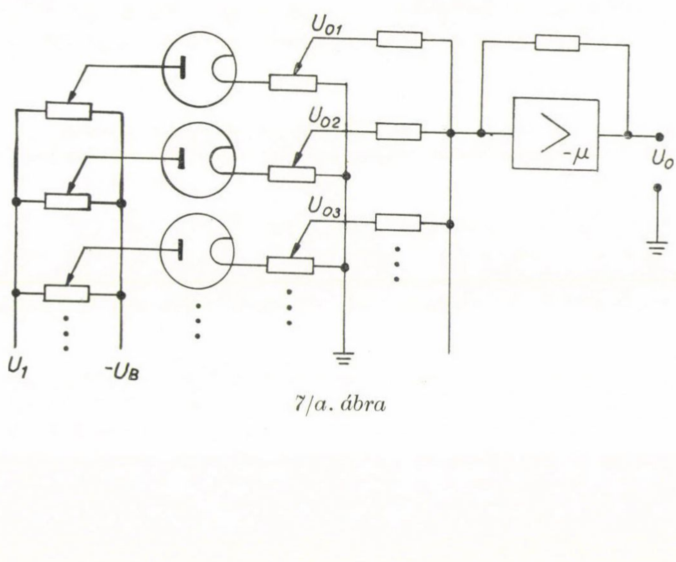
A *diódás függvénygenerátor* segítségével az $x = f(t)$ függvényt egyenes szakaszokkal approximáljuk, amely egyenes szakaszok előállítására diódákat alkalmazunk.



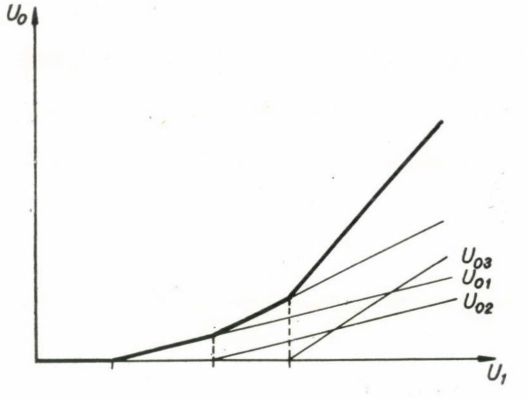
6. ábra

A 6. ábrán feltüntettünk egy egyszerű diódakapcsolást, valamint a hozzá tartozó feszültségkarakterisztikát. A karakterisztika meredekségét a $0 \leq U_0 \leq U_{0\,max}$ tartományban állíthatjuk be az alkalmazott potenciométer segítségével. Az U_1, U_B, ill. mindkettő előjelének megváltoztatásával vagy a dióda megfordításával valamennyi szükséges karakterisztikát előállíthatjuk. Megfelelő diódakörök párhuzamos kapcsolásával állítjuk elő a függvényt approximáló törtvonalat.

A 7. ábrán egy ilyen kapcsolást és a hozzá tartozó karakterisztikát mutatjuk be.



7/a. ábra



7/b. ábra

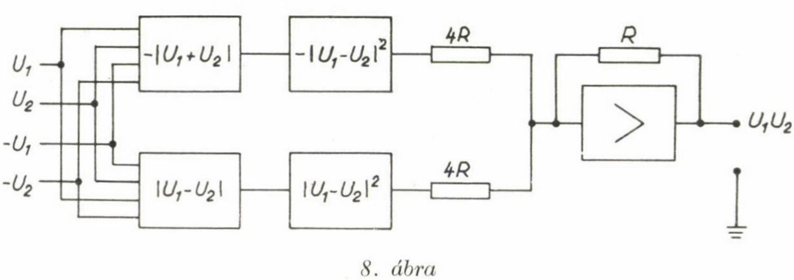
Szorzóegység

Két függő változó szorzására igen sokféle elektronikus kapcsolást lehet készíteni. Itt csak a kis és közepes gépeknél leginkább alkalmazott negyednégyzetes elven alapuló szorzóberendezés elvét vázoljuk. E szorzóegység két mennyiség szorzását az

$$U_1 U_2 = \frac{1}{4} [(U_1 + U_2)^2 - (U_1 - U_2)^2]$$

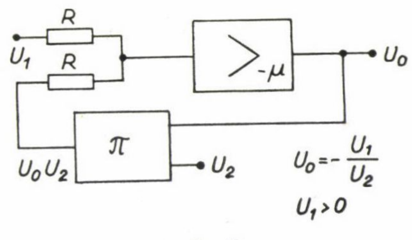
összefüggés alapján végzi el.

A szorzótényezők összeadása és kivonása, valamint az egyszerűbb kapcsolás érdekében alkalmazott abszolútérték képzése diódák segítségével történik, a négyzetreemelést pedig a függvénygenerátornál említett diódás approximációval előállított parabolaágakon képezzük. A kapott abszolútérték négyzeteket összegező erősítővel összegezzük. Egy ilyen szorzóegység blokksémáját a 8. ábrán láthatjuk.

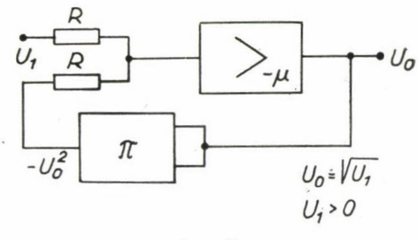


8. ábra

A szorzóegység felhasználásával végezhetjük el az *osztást* és a *gyökvonást* az ún. implicit függvénytechnika segítségével. Tekintsük pl. az alábbi kapcsolást (9. ábra):



9. ábra



10. ábra

Itt a π-vel jelölt blokk szorzóegységet jelent. Irjuk fel a K csomópontra a Kirchoff-törvényt, és alkalmazzuk az Ohm-törvényt:

$$\frac{U_1 - U_k}{R} + \frac{U_0U_2 - U_k}{R} = 0 .$$

Oldjuk meg az egyenletet U_k-ra,

$$U_k = -\frac{U_0}{|\mu|} = \frac{1}{2}(U_1 + U_0U_2) ,$$

ahonnan az $\frac{U_0}{|\mu|} \approx 0$ miatt következik, hogy

$$U_0 \approx -\frac{U_1}{U_2} .$$

Az implicit függvénytechnika alkalmazásánál állandóan ügyelnünk kell a stabilitási feltételekre. Igy a 9. ábra szerinti osztóberendezés csak $U_2 > 0$ esetén szolgáltat stabil megoldást (negatív visszacsatolás).

Igen egyszerűen származtathatjuk a 9. ábra szerinti kapcsolásból a négyzetgyökvonó elemet. Képezzük a 9. ábra szerinti kapcsolásban U_0U_2 helyett $-U_0^2$-et. Az osztóegységnél alkalmazott gondolatmenet szerint bizonyítható, hogy a kapcsolás (10. ábra) az

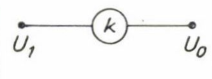
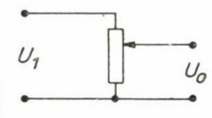
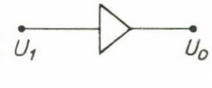
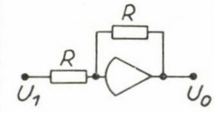
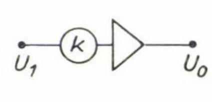
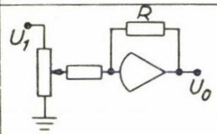
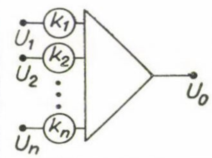
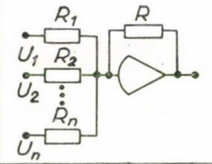
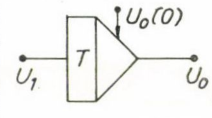
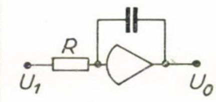
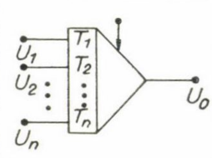
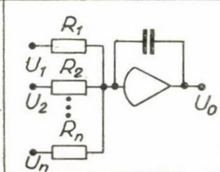
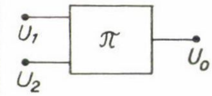
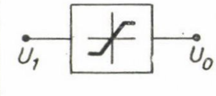
$$U_0 \approx \sqrt{U_1}$$

műveletet valósítja meg.

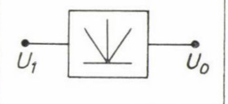
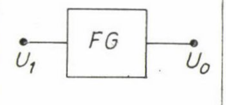
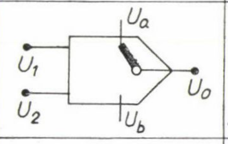
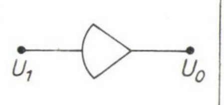
A kapcsolás csak $U_1 > 0$ esetén stabil. A legáltalánosabb analóg műveleti elemeket a 11. ábrán foglaltuk össze.

Az egyes műveleti elemeket az irodalomban szokásos szimbólumokkal jelöltük. A lineáris műveleti elemeknél az elektromos kapcsolást is feltüntettük. A nem-lineáris műveleti elemeknél, amelyek különböző elektronikus megoldásúak lehetnek, az elektromos kapcsolást mellőztük. A táblázat végül tartalmazza a műveleti elemnek megfelelő matematikai operációt.

Az egyes műveleti elemek pontossága a műszaki kivitelezéstől függ. A jóminőségű elektronikus műveleti elem hibája nem haladja meg az 1%-ot.

Műveleti elem megnevezése	Szimbólum	Elektromos kapcsolás	Matematikai művelet
Együttható potenció-méter			$U_0 = kU_1$ $0 \le k \le 1$
Előjelfordító			$U_0 = -U_1$
Állandó szorzótényező			$U_0 = -kU_1$
Összeadó			$U_0 = -\sum_{i=1}^{n} k_i U_i$ $k_i = \frac{R}{R_i}$
Integráló			$U_0 = -\frac{1}{T}\int_0^t U_1(\tau)d\tau + U_0(0)$ $(T = RC)$
Összeadó integráló			$U_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{T_i}\int U_i d\tau + U_0(0)$ $(T_i = R_i C)$
Szorzó		Különböző elektronikus megoldású ld. pl. 8. ábra	$U_0 = \frac{U_1 U_2}{E}$ $(E$ = gépi egység$)$
Határoló		Különböző elektronikus megoldású	A nemlinearitás szimbolikusan jelölve (itt: határoló)

11. ábra

Abszolut-érték képző		Különböző elektronikus megoldású	$U_0 = \lvert U_1 \rvert$
Függvény-generátor		Különböző elektronikus megoldású	$U_0 = f(U_1)$
Összehasonlító (komparátor)		Különböző elektronikus megoldású	$U_0 = U_a$, ha $U_1 - U_2 \geqq 0$ $U_0 = U_b$, ha $U_1 - U_2 < 0$
Egyen-feszültségű erősítő		Különböző elektronikus megoldású	$U_0 = -\mu U_1$ $\left(\mu \gg 1 \text{ erősítési tényező}\right)$

11. ábra

II.

1. Az elektronikus analóg számológép gépi változói

Mint a 11. ábrából láthatjuk, az analóg számológép független változója a *gépidő*, amit a továbbiakban τ-val jelölünk. A függő változók a gépben *egyenfeszültség* alakjában szerepelnek (U_i). Mind a független, mind a függő változók korlátosak, amely korlátok a gép műszaki felépítésétől függenek. Igy a gépidőre nézve általánosságban a

$$0 \leqq \tau \leqq \tau_{\max} \tag{2}$$

feltétel érvényes, a feszültség alakjában szereplő változókra pedig a

$$-E \leqq U_i \leqq +E \tag{3}$$

korlátok érvényesek. E az ún. *gépi egység*, amely pl. csöves berendezéseknél többnyire 100 V. Ugyancsak korlátosak a 11. ábrán látható együtthatók értékei is. Igy a T_i *időállandók* és a k_i *konstans együtthatók* kielégítik az alábbi feltételeket:

$$T_{\min} \leqq T_i \leqq T_{\max} \qquad (T_i > 0)\,, \tag{4}$$

$$k_{\min} \leqq k_i \leqq k_{\max} \qquad (k_i > 0)\,. \tag{5}$$

Az itt szereplő $T_i = R_i C_i$ az integrátoron, ill. összegező integrátoron beállítható *időállandó*.

A (2) feltétel tehát azt jelenti, hogy a függő változók csak egy megadott értelmezési tartományban ábrázolhatók a gépen, így minden megoldandó matematikai feladatot erre a tartományra kell transzformálnunk. $\tau_{\max}$ értékétől függően két alaptípust különböztetünk meg az analóg gépek között. Ha $\tau_{max} < 1$, akkor ismétlő rendszerű a gép, azaz az értelmezési tartományban a megoldást gyors egymásutánban állandóan ismétli. Ez a géptípus igen alkalmas peremértékfeladatok vizsgálatára. E gépnél a $[0, \tau_{max}]$ tartományra kell transzformálnunk a független változót. Ha τ_{max} értéke nagy (pl. 100 sec nagyságrendű), az ismétlési frekvencia olyan kicsi, hogy az ismétlő üzemmód gyakorlati szempontból már érdektelen. Az ilyen gépeknél τ_{max} több szakaszban folytonosan állítható.

A függő változók értékkészlete a (3) feltétel szerint korlátozott. Ha ismerjük a megoldás lehetséges maximális értékét a szükséges transzformációt a programozással egyidejüleg elvégezhetjük. Ellenkező esetben a program végrehajtása során kell szükségképpen megváltoztatnunk a transzformációt.

A T_i időállandók kisebb berendezéseknél többnyire csak R_i taggal változtathatók, nagyobb berendezések szakaszosan változtatható C_i tagokat is tartalmaznak. Igy már közepes nagyságú berendezésekben is találunk 0,1; 1; 10 értékeknek megfelelő C_i tagokat. A k_i állandó szorzótényezők általában 3—4 nagyságrendet fognak át.

2. Léptéktranszformáció

Mielőtt az adott feladatot analóg gép segítségével megoldhatnánk, egy sor előkészítő munkára van szükség. A továbbiakban csak olyan feladatokat tekintünk, amelyek közönséges differenciálegyenletre vagy ezek rendszerére visszavezethetők.

Az előző pontban már láttuk, hogy a műveleti elemek a matematikai operációkat csak meghatározott tartományban hajtják végre. Igy a differenciálegyenletben vagy rendszerben szereplő valamennyi változót az ún. *gépi változó*kra kell átírnunk. Az adott differenciálegyenletből ilyen úton származtatott egyenletet *gépi egyenlet*nek nevezzük. Tárgyalásunk során a problémaváltozókat kisbetűvel, a gépi változókat nagybetűvel jelöljük. A differenciálhányadosokat operátoros alakban fogjuk felírni, és megkülönböztetésül a gépi változó szerinti differenciáloperátort ismét nagybetűvel jelöljük. Igy a továbbiakban jelentse p^n a $\frac{d^n}{dt^n}$, P^n a $\frac{d^n}{d\tau^n}$ operátort.

A függő változók transzformálását a (3) feltételnek megfelelően az

$$X = M_x x\,, \quad Y = M_y y\,, \ldots \tag{6}$$

összefüggésekkel írhatjuk le, ahol

$$M_x = \frac{Maximális\ üzemfeszültség}{|\,x\,|_{max}} \frac{[V]}{[Dim]}\,,$$

ill.

$$M_x = \frac{Gépi\ egység}{|\,x\,|_{max}} \frac{[E]}{[Dim]}$$

aszerint, hogy feszültségekben vagy gépi egységekben számolunk. Mindkét programozási mód gyakorlatilag egyenértékű, ügyelnünk kell azonban arra, hogy a szorzóegységeknél más az átviteli egyenlet, ha feszültségben számolunk:

$$X_0 = \frac{1}{100} X_1 X_2 [V] ,$$

ill. egységben:

$$X_0 = X_1 X_2 [E] .$$

Hasonlóképpen transzformálhatók a függő változók differenciálhányadosai is, ha ezek maximális értéke ismert. Igy általában az n-edik deriváltra a

$$p^n X = M_{p^n x} x \tag{7}$$

összefüggés érvényes, ahol

$$M_{p^n x} = \frac{Gépi\ egység}{|\, p^n x\,|_{\max}} \frac{[E]}{[\mathrm{Dim}]}$$

gépi egységben kifejezve.

3. Időtranszformáció

A független változót is általában transzformáljuk, mégpedig a gépidőbe. E transzformációt a

$$\tau = M_t t \tag{8}$$

összefüggés alapján hajtjuk végre, ahol

$$M_t = \frac{\tau_{\max}}{t_{\max}}$$

az időtranszformáció léptéke.

Hasonlóképpen transzformálnunk kell a differenciálhányadosokat is, így az n-edik deriváltra általában a

$$p^n = M_t^n P^n \tag{9}$$

összefüggés érvényes.

Ügyelnünk kell arra, hogy a függő változók differenciálhányadosai alá vannak rendelve a léptéktranszformációnak is. Így pl. az n-edik derivált (7) és (9) alapján a következőképpen írható át gépi változókra:

$$P^n X = \frac{M_{p^n x}}{M_t^n} p^n x . \tag{10}$$

A léptéktranszformációk összefüggéseit a 12. ábrán táblázatosan is összefoglaltuk.

4. Programvázlatok

Amint már az I. részben említettük, az analóg gépen a műveleti elemek segítségével az adott matematikai feladathoz egy analóg rendszert kell összeállítanunk. A programozás lényege tehát az, hogy az adott differenciálegyenletet gépi egyenletre transzformáljuk, s utóbbira kapcsolási vagy programvázlatot állítunk össze. Az adott feladatra alapvetően különböző programvázlatok készíthetők. Többnyire nehéz előre eldönteni, hogy melyik programvázlat szolgáltatja majd nagyobb pontossággal az eredményt. Célszerű először csak elvi kapcsolási vázlatot felépíteni, számadatok nélkül. Ez gyors tájékoztatást nyújt arra nézve, hogy hozzávetőlegesen milyen műveleti elemekre lesz szükség a feladat megoldásához. Az elvi programvázlatot gyakran a lépték-

A feladat változója	Lépték	Gépi változó	Visszatranszformálás
y	M_y	$Y = M_y \cdot y$	$y = \frac{1}{M_y} \cdot Y$
py	$M_{p^n y}$	$p^n Y = M_{p^n y} \cdot p^n y$	$p^n y = \frac{1}{M_{p^n y}} \cdot p^n Y$
t	M_t	$\tau = M_t t$	$t = \frac{1}{M_t} \cdot \tau$
p		$P = \frac{1}{M_t} \cdot p$	$p = M_t \cdot P$
p^n		$P^n = \frac{1}{M_t^n} p^n$	$p^n = M_t^n \cdot P^n$

12. ábra

transzformációk elvégzése előtt el szoktuk készíteni. Mivel az integráló elemek sokkal kisebb hibával működnek, mint a differenciálók, a programvázlat elkészítéséhez rendszerint előbbieket szoktuk alkalmazni. Így a vázlat elkészítését az ún. visszavezetés elvén valósítjuk meg. Feltételezzük, hogy a legmagasabbrendű differenciálhányados értéke ismert. Ebből kiindulva integráló egységek segítségével előállíthatjukaz alacsonyabbrendű deriváltakat. Ha a legmagasabbrendű deriváltat kifejezzük a programozandó egyenletből, láthatjuk, hogy előállíthatjuk az alacsonyabbrendű deriváltak megfelelő együtthatókkal való szorzása és összegezése útján. Inhomogén egyenlet esetén a szükséges zavaró függvényt, rendszer esetén pedig a megfelelő függő változókat is összegeznünk kell. A programvázlatot a fentiek alapján a 11. ábra szerinti szimbólumokkal készítjük el.

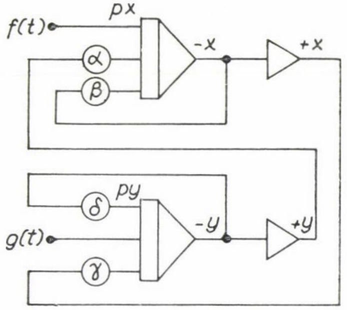
A mondottakat egy példán is megvilágítjuk. Készítsünk programvázlatot

$$\begin{aligned} px &= 2y - 5x + e^t \\ py &= x - 6y + e^{-2t} \end{aligned} \tag{11}$$

differenciálegyenletrendszerre. Az elvi vázlatot numerikus számadatok nélkül, tehát a

$$\begin{aligned} px &= \alpha y - \beta x + f(t) \\ py &= \gamma x - \delta y + g(t) \end{aligned} \tag{12}$$

alakú egyenletrendszerre készítjük el. px értékét megkapjuk, ha a (12) első egyenletének jobboldalán álló függvényeket összegezzük, és teljesen hasonlóan nyerhetjük a második egyenletből py értékét. Így tehát, ha az összegezendő függvényeket egy-egy összegező integráló egység bemeneteire vezetjük, $-x$ ill. $-y$ értékét kapjuk az erősítők kimenetein. A szükséges előjelfordító egységek és az állandó szorzótényezők segítségével a kapott értékeket a bemenetekre visszavezethetjük. A vázlatot a 13. ábrán láthatjuk.



13. ábra

Az $f(t)$ és $g(t)$ függvények előállítására még visszatérünk az 5. pontban.

5. Optimális programozás

A program összeállítása során arra is törekednünk kell, hogy a megoldást a lehető legkisebb hibával kapjuk meg. Ennek érdekében célszerű a kapcsolásban szereplő összes műveleti elemet teljesen kivezérelni. Ezalatt azt értjük, hogy a műveleti elemek kimenetein jelentkező változók a vizsgált időszakaszban a (3) feltételben megadott határokat legalább egyszer elérjék, de egyszer se lépjék túl. Amennyiben a változók maximális értékeiről semmilyen becslés nem áll rendelkezésünkre, megkíséreljük egy kiinduló programmal értéküket meghatározni. A kiinduló program akkor alkalmas erre, ha a kapcsolásban szereplő műveleti elemek egyike sem vezérlődik túl a vizsgált időszakaszban. A kezdeti feltételek léptékének, és adott esetben a zavarófüggvény léptékének alkalmas megválasztásával ezt elérhetjük.

Az általánosság csorbítása nélkül tekintsük tehát a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^i y = 0 \qquad (a_n = 1,\ a_i > 0) \tag{13}$$

állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet a

$$p^j y(0) = p^j y_0 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{14}$$

kezdeti feltételekkel. Legyenek adva továbbá a megoldásfüggvény és deriváltjai abszolútértékeinek maximumaira a következő becslések:

$$\varrho_j = | p^j y |_{\max} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \,.$$

Ezekkel (6), ill. (7) alapján képezhetjük a gépi változókat, tehát a j-edik derivált gépi változókban

(15) $$p^j Y = \frac{p^j y}{\varrho_j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

lesz. Ekkor valamennyi j-re érvényes, hogy

$$| p^j Y | \leq 1 .$$

Ha most (13) és (14)-be a gépi változókat bevezetjük, a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \varrho_i \left[\frac{p^i y}{\varrho_i}\right] = \sum_{i=0}^{n} a_i \varrho_i p^i Y = 0 \qquad (\varrho_n = 1)$$

gépi egyenletet kapjuk a

$$p^j Y_0 = \frac{p^j y_0}{\varrho_j}$$

kezdeti feltételekkel.

Figyelembevéve, hogy (7) és (9) miatt

(16) $$p^n X = M_{p^n x} p^n x = M_{p^n x} \int p^{n+1} x \, dt = \frac{1}{M_t} \frac{M_{p^n x}}{M_{p^{n+1} x}} \int p^{n+1} X \, d\tau$$

és (15) szerint $M_{p^j x} = \frac{1}{\varrho_j}$, tehát az $n - i$-edik integrálóegység bemenete az M_t időléptéktől eltekintve $\frac{\varrho_{i+1}}{\varrho_i}$-vel szorzódik, így az $n - 1$-edik integrálóegység bemenete $\frac{1}{\varrho_{n-1}}$-el, lévén $\varrho_n = 1$.

Az előző pontban említett példát oldjuk meg most optimális programozással. Megoldandó tehát a (11) differenciálegyenletrendszer az

$$x(0) = 0{,}375 \quad \text{és} \quad y(0) = 0{,}325$$

kezdeti feltételek mellett. A megoldást a $0 \leq t \leq 3$ intervallumban keressük. Ismeretesek az $| x |_{\max} = 3{,}5$ és $| y |_{\max} = 0{,}5$ becslések. A gépidő, amelyre a független változót transzformálhatjuk legyen 15 sec. Először foglalkozzunk az elvi programvázlattal. Láthatjuk, hogy a (11) egyenletrendszer zavaró függvényei maguk is közönséges differenciálegyenletek megoldásai, így ezeket célszerű differenciálegyenletükkel generálni. Vázlatot készítünk tehát a

(17) $$pz - z = 0 \quad \text{és} \quad pw + 2w = 0$$

differenciálegyenletekre a $z(0) = 1$ és $w(0) = 1$ kezdeti feltételekkel. Ezután elkészítjük a (11) differenciálegyenletrendszer elvi vázlatát is. Ez lényegében megegyezik a 13. ábrán bemutatott vázlattal, amelyhez kiegészítésül az $f(t) = z$ és $g(t) = w$ függvényeknek a (17) egyenletek alapján elkészített programvázlatát csatoljuk (14. ábra). Mindeddig számadatokat nem használtunk fel. Ezek az ideiglenes vázlatok azonban megmutatják, hogy négy integráló és három előjelfordító egységre lesz szükségünk a feladat megoldásához. Következő feladat a léptéktranszformációk végrehajtása és a gépi egyenletek felállítása. Az $|x|_{\max}$ és $|y|_{\max}$-ra adott becslések alapján (6) szerint $M_x = \frac{1}{3,5}$ és $M_y = \frac{1}{0,5}$, ill. (8) alapján $M_t = 5$. Mivel $e^t < 20$ és $e^{-2t} < 1$ a $0 \leq t \leq 3$ intervallumban, így $M_z = \frac{1}{20}$ és $M_w = 1$ lesz. A px, py, pz, pw differenciálhányadosokat (10) alapján átszámítva és (16)-ot figyelembevéve (11)-et a következő gépi egyenletekre írhatjuk át;

$$3{,}5\cdot 5\left[P\frac{x}{3{,}5}\right] = 2\cdot 0{,}5\left[\frac{y}{0{,}5}\right] - 5\cdot 3{,}5\left[\frac{x}{3{,}5}\right] + 20\left[\frac{e^t}{20}\right], \quad 20\cdot 5\left[P\frac{z}{20}\right] = 20\left[\frac{z}{20}\right],$$

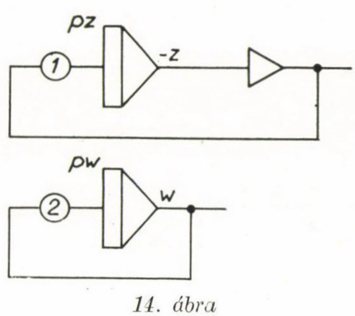
$$0{,}5\cdot 5\left[P\frac{y}{0{,}5}\right] = 3{,}5\left[\frac{x}{3{,}5}\right] - 6\cdot 0{,}5\left[\frac{y}{0{,}5}\right] + [e^{-2t}], \quad 5\cdot[Pw] = -2[w],$$

ahol szögletes zárójelbe foglaltuk a gépi változókat. Az egyszerűsítések elvégzése után végül a

$$PX = 0{,}057Y - X + 1{,}14e^{\tau}, \quad PZ = 0{,}2Z,$$

$$PY = 1{,}4X - 1{,}2Y + 0{,}4e^{-2\tau} \quad PW = -0{,}4W$$

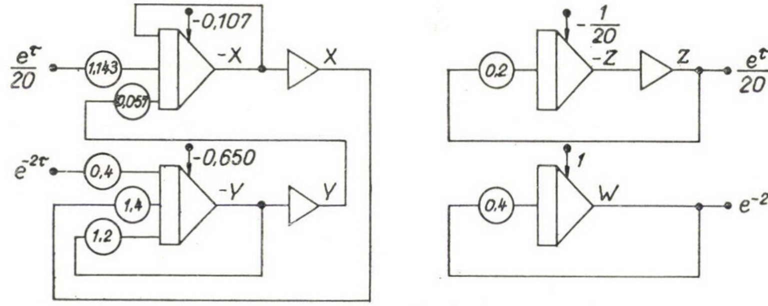
gépi egyenleteket nyerjük. A 14. ábrán látható programvázlatból a gépi egyenletek együtthatóinak beírásával elkészíthetjük a végleges vázlatot.



14. ábra

A kezdeti feltételek értékeit ugyancsak a (6) léptéktranszformációval állapítjuk meg. A végleges vázlat a 15. ábrán látható.

Már korábban említettük, hogy a végleges programvázlat elkészítése meglehetősen sok szabadságot enged meg a programozónak. A rendelkezésre álló analóg gép adottságai és a programozó gyakorlatban kialakított módszere döntik el, milyen sorrendben és hány lépésben alakul ki a végleges programvázlat, amely végül a gépen megvalósításra kerül. Esetenként maguk a megoldandó feladatok is szükségessé tehetik a már begyakorlott módszer megváltoztatását. A programozás iránt behatóbban érdeklődők számára ajánlhatjuk



15. ábra

H. ADLER kézikönyvét [4], valamint R. SCHÖNEFELD dolgozatát [3]. A szabályozástechnikával kapcsolatos programozási módszerek tanulmányozására B. JA. KOGAN [1] és A. SYDOW [2] munkái ajánlhatók.

Példa

Egy hidraulikus rendszer méretezésével kapcsolatosan merült fel a következő probléma.

Keresettek a

$$p^2x + apx + bx + ct + d + e \int_0^t \sqrt{p^2x + fpx + d}\, dt = 0 \tag{18}$$

állandó együtthatós integro-differenciálegyenlet megoldása első és második deriváltjainak maximális értékei az a, b, c, d, e, f együtthatókban összefoglalt meghatározott műszaki paraméterek függvényében. A (18) egyenletben szereplő együtthatók c kivételével pozitívok.

A (18) differenciálegyenletből az integrált t-szerinti differenciálással kiküszöbölve a

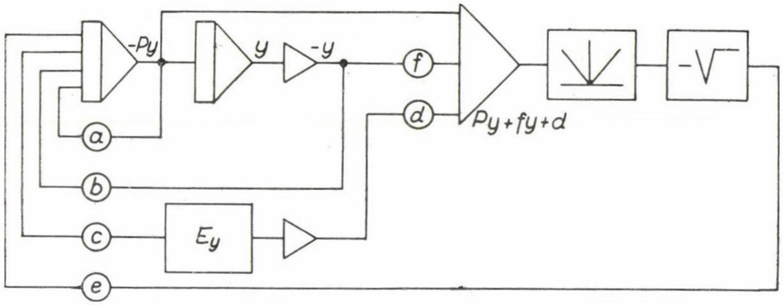
$$p^3x + ap^2x + bpx + c + e\sqrt{p^2x + fpx + d} = 0$$

differenciálegyenletre jutunk, amelyből az $y = px$ helyettesítéssel a

$$p^2y + apy + by + c + e\sqrt{py + fy + d} = 0 \tag{19}$$

állandó együtthatós nemlineáris differenciálegyenletet kapjuk. A továbbiakban tehát a (19) differenciálegyenlet megoldásának és az első deriváltjának a maximális értékeit keressük az $y(0) = 0$ és $py(0) = 0$ kezdeti feltételek mellett. Az analóg gép alkalmazása ez esetben mindenképpen indokolt, mert egyrészt a (19) differenciálegyenletet zárt alakban integrálni nem tudjuk, másrészt a megoldásokat az együtthatók paramétereinek függvényében keressük, ami a numerikus számítást tenné hosszadalmassá.

Mivel y és py maximális értékeiről nincs becslésünk, a programozási munkát egy elvi vázlat elkészítésével kezdhetjük. Figyelembevéve, hogy az együtthatók c kivételével pozitívok, az elvi vázlatot az 5. pont alatt mondottak alapján elkészíthetjük. A 16. ábrán látható elvi vázlatban néhány műveleti elemet blokk alakjában tüntettünk fel. Így a gyökvonást egyelőre blokkal jelöltük. A gyök alatti mennyiségről nem tudjuk, hogy a vizsgálandó tartományban jelet vált-e, célszerű tehát a gyökvonó egység elé egy abszolútértékképző elemet is beiktatni, amit ugyancsak blokkal jelöltünk a vázlaton. A harmadik blokk, amit E_y-nal jelöltünk, az egységnyi feszültséget adja. Ennek változtatására szükségünk lesz, amíg az $| y |_{\max}$ és $| py |_{\max}$ értékét meg nem becsültük.



16. ábra

A (19) egyenlet együtthatóinak határai ill. numerikus értékei az alábbiak:

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
2{,}11 &\leq a \leq 18{,}7\,, & c &= -945\\
476 &\leq b \leq 511\,, & d &= 41{,}5\\
0 &\leq f \leq 16{,}6\,, & e &= 15{,}3
\end{aligned}
$$

A megoldást MN-7 típusú analóg gépen keressük, amelynek a gépi változókra megadott korlátai az alábbiak:

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
1 &\leq \tau_{\max} \leq 250 \text{ sec}\,,\\
-100\text{V} &\leq U_i \leq +100\text{V}\,,\\
0 &\leq T_i \leq 10\,,\\
0 &\leq k_i \leq 10\,.
\end{aligned}
$$

A (19) egyenlet változóit ennek megfelelően transzformálnunk kell. Ha c és e értékét zérusnak választjuk, egy másodrendű homogén differenciálegyenletet kapunk, amelynek a megoldása harmonikus rezgés 3—4 közötti másodpercenkénti rezgésszámmal. A (21) alatti adatokból láthatóan $\tau_{\max}$ legkisebb értéke 1 másodperc, így a maximális amplitúdó kimérése nehézkes. Célszerűnek látszik tehát a

$$\tau = 10\,t$$

időtranszformáció bevezetése, amellyel a (19) egyenlet

$$100P^2y + 10aPy + by + c + e\sqrt{10\,Py + fy + d} = 0$$

alakba megy át. 100-zal osztva és $\sqrt{10}$-et kiemelve a

$$(22)\qquad P^2y + a'Py + b'y + c' + e'\sqrt{Py + f'y + d'} = 0$$

egyenletre jutunk, ahol most már az

$$(23)\qquad a' = \frac{a}{10},\ b' = \frac{b}{100},\ c' = \frac{c}{100},\ e' = \frac{e\sqrt{10}}{100},\ f' = \frac{f}{10},\ d' = \frac{d}{10}$$

együtthatók — mint ez a (20) alatt megadott numerikus adatok behelyettesítéséből kiderül — a gépen beállítható tartományba esnek. A (22) egyenlet elvi programvázlata egyezik a (19) egyenlet 16. ábrán látható vázlatával.

A (23) együtthatókat a vázlatba beírjuk, és a vázlat szerint a programot a gépen is beállítjuk, hogy a függő változók maximális értékeit megbecsülhessük. Példaképpen ragadjuk ki az együtthatók alsó határainak megfelelő értékeket. Programozzuk tehát a

$$(24)\qquad P^2y + 0{,}211\,Py + 4{,}76\,y - 9{,}45 + 0{,}484\sqrt{Py + 4{,}15} = 0$$

egyenletet, és válasszuk az E_y blokkban állítandó egységet eleinte kicsire. Megindítva az integrálást, ellenőrizzük, hogy az egyes műveleti elemek nem vezérlődnek-e túl, amit a gépen elhelyezett jelzőberendezések jeleznek. Ha az $E_y = 0{,}143\,E$ értéket elértük, a gyök alatti mennyiség éppen eléri a gépi egységet (100 V). A maximumokat most kimérjük, és eszerint a következő becslések állnak rendelkezésre az optimális programozáshoz:

$$|Py + f'y + d'|_{\max} = E = 100\mathrm{V}\,,\quad |y|_{\max} = 0{,}333E,\quad |Py|_{\max} = 0{,}397E\,.$$

Megfigyelhettük továbbá, hogy a gyök alatti mennyiség a vizsgált szakaszban végig pozitív, s így az abszolútérték képző elemet elhagyhatjuk. Az 5. pontban említettek alapján (24)-ből a

$$(25)\qquad \begin{aligned}&\left[\frac{1}{0{,}397}P^2y\right] + 0{,}211\frac{0{,}397}{0{,}397}\left[\frac{Py}{0{,}397}\right] + 4{,}76\frac{0{,}333}{0{,}397}\left[\frac{y}{0{,}333}\right] - \frac{9{,}45}{0{,}397} + \\ &\qquad + \frac{0{,}484}{0{,}397}\sqrt{0{,}397\left[\frac{Py}{0{,}397}\right] + 4{,}15} = 0\end{aligned}$$

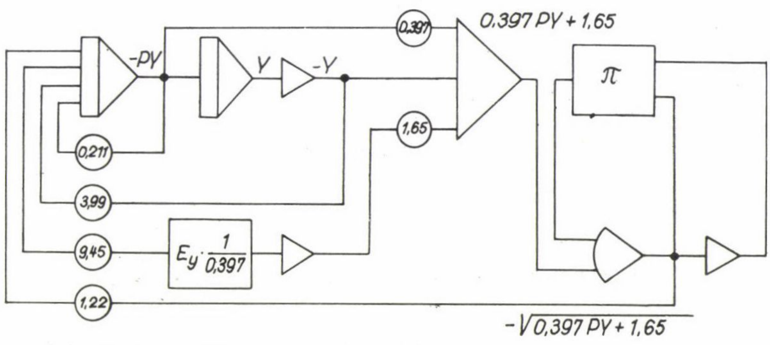
gépi egyenletet nyerjük, ahol az optimálisan programozott gépi változókat szögletes zárójellel zártuk be. A szükséges egyszerűsítéseket (25)-ben elvégezve végül is a

$$(26)\qquad P^2Y + 0{,}211\,PY + 3{,}99\,Y - 23{,}8 + 1{,}22\sqrt{0{,}397PY + 4{,}15} = 0$$

gépi egyenletre jutunk, amelynek gépi változói most már optimálisan programozottak. A (26) egyenletből kitűnik, hogy az állandó tag értéke ismét meghaladja a (21) alatt megadott felső korlátot. Ezen segíthetünk E_y értékének megváltoztatásával. Ha E_y értékét pl. $\frac{1}{0{,}397}$-szeresére választjuk, 23,8 értéke $\frac{1}{0{,}397}$-ed részére, tehát éppen 9,45-re csökken, ami beállítható a gépen. A 15. ábrából azonban kitűnik, ha E_y értékét $\frac{1}{0{,}397}$-szeresre választjuk, ezzel 4,15 értékét is $\frac{1}{0{,}397}$ -szeresre növeljük. 4,15 értékét tehát még 0,397-el szoroznunk kell. Így végül is a

$$P^2Y + 0{,}211\, PY + 3{,}99\, Y - 9{,}45 + 1{,}22\, \sqrt{0{,}397PY + 1{,}65} = 0$$

gépi egyenletet állítjuk be a gépen. A programvázlatot a gyökvonó egységgel együtt a 17. ábrán láthatjuk. Mint az imént megállapítottuk, E_y értéke $\frac{0{,}143}{0{,}397}$ gépi egységben kifejezve. A szükséges méréseket elvégezve E_y értékének ismeretében a transzformációs összefüggések felhasználásával a változókat eredeti léptékükre transzformálhatjuk vissza.



17. ábra

Megjegyezzük, hogy a feladat a paraméterváltoztatások miatt egy sorozat differenciálegyenlet megoldását írja elő, tehát az optimális programozás meglassítja a munkát. Ha az együtthatók felső határaival képezett differenciálegyenletet megvizsgáljuk, a (24) differenciálegyenlet megoldásához nagyságrendben közelálló értéket kapunk, tehát a gyök alatti mennyiség maximuma itt is mintegy ötszöröse $|y|$ maximumának. Ez indokolttá teszi, hogy a gyök alatti mennyiség képzésére használt a 17. ábrán 2. sz.-mal jelölt erősítő bemenő jeleit 5-tel leosszuk, majd a gyökvonó egység után $\sqrt{5}$-tel szorozva kompenzáljunk.

Ezután az E_y értékének növelésével hozzuk a gépi változókat közel optimális értékre. Tehát a (22) egyenlet helyett a

$$P^2y + a'Py + b'y + c' + e'\sqrt{5}\sqrt{\frac{Py}{5} + \frac{f'y}{5} + \frac{d'}{5}} = 0$$

egyenletet használjuk valamennyi esetben, s E_y értékét szükség szerint változtatjuk.

(Beérkezett: 1965. március 8.)

IRODALOM

[1] KOGAN, B. Ja.: *Analóg számológépek és alkalmazásuk önműködő szabályozások vizsgálatára.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.
[2] SYDOW, A.: „Analoge Programierungstechnik mittels Übertragungsfaktoren.'' *Zeitschrift für Messen, Seuern, Regeln.* **6** (1961) S. 245.
[3] SCHÖNEFELD, R.: „Beitrag zur Programierung elektronischer Analogrechner''. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Elektrotechnik.* Ilmenau. **9** (1963) 2. S. 113.
[4] ADLER, H.: *Elektronische Analogrechner.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.

О СОСТАВЛЕНИИ ПРОГРАММЫ ДЛЯ МОДЕЛИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

КАРЛ ТОТ

Резюме

Автор излагает основные физические принципы наиболее важных элементов операций электронных моделирующих устройств и резюмирует основные сведения, знакомство с которыми необходимо для составления программы. Для того, чтобы уяснить их, он приводит пример из технической практики.

ÜBER DIE PROGRAMMIERUNGSTECHNIK VON ANALOGRECHNERN

von

K. TÓTH

Zusammenfassung

Die Arbeit handelt um die physikalischen Grundlagen der wichtigsten Rechnenelementen der Analogrechner, und versucht die Programierungstechnik kurz zusammenfassen, wobei auch die optimale Programierung gezeigt wird. In einem Beispiel wird das Letztere angewandt.