KÉT ÚJABB ELJÁRÁS HIPERBOLIKUS PROGRAMOZÁSI FELADATOK MEGOLDÁSÁRA

ŠTAHL JÁNOS[1]

MARTOS BÉLA [1] dolgozatában a következő, általa hiperbolikus programozási feladatnak[2] nevezett probléma megoldásával foglalkozik

$$\left.\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}}{\mathbf{d}'\mathbf{x}} \rightarrow \max . \tag{1}$$

(A $m \times n$-es matrix, $\mathbf{c}'$, $\mathbf{d}'$ n-dimenziós sor, $\mathbf{b}$ m-dimenziós, $\mathbf{x}$ n-dimenziós oszlopvektor.)

Az általa javasolt algoritmus igen egyszerű, a lineáris programozás szimplex-módszerének alkalmas módosítása. Elektronikus számológépre történő programozása sem jelent ilymódon különösebb problémát: az általánosan rendelkezésre álló, lineáris programozási feladatok megoldására szolgáló szimplex módszerrel dolgozó könyvtári programok kevés változtatás után alkalmasak hiperbolikus programozási feladat megoldására is.

A következőkben ismertetendő, hasonló célból kidolgozott eljárások közül az első egy véges eljárás, alapgondolata a lineáris programozásban szokásos ún. indulóprogramkeresés, míg a másik egy közelítő eljárás, alapötletét a probléma egy lehetséges geometriai interpretációja szolgáltatta.

Az első algoritmus előnye, hogy alkalmazásakor nem szükséges indulóprogramkeresési eljárás, másrészt viszont számológépi szempontból valószínűleg nagyon memóriaigényes (meg kell jegyeznünk, hogy a módszerekkel kapcsolatban konkrét számológépi tapasztalataink még nincsenek. Az első módszer alapötletét felhasználva manuális úton viszont megoldottunk egy olyan kisméretű problémát, amelyben két hányados közös értékét kellett maximalizálnunk).

A második módszer bár közelítő eljárás, de szigorúan monoton és tetszőleges lehetséges programmal indítható (aminek akkor lehet jelentősége, ha pl. egy praktikus feladat során rendelkezésünkre áll egy lehetséges program, ami nem bázis megoldás, de a célfüggvény szempontjából „jónak" tekinthető) és

---

[1] KGM Ipargazdasági Intézet.

[2] [1]-ben a célfüggvény számlálójában és nevezőjében még egy-egy további konstans is szerepel. Ennek figyelembevétele a következő módszereknél sem jelentene különösebb problémát.

az eljárás csak „majdnem azonos" közönséges lineáris programozási feladatok egymásutáni megoldását igényli.

Általában az eljárások számológépi programozhatóságáról hasonlót állíthatunk, mint az [1]-beli módszerről.

I. A véges módszer

Tekintsük a következő feladatot:

Meghatározandó azon λ értékek λ^* felső határa, amelyek mellett az

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (\mathbf{c}' - \lambda\mathbf{d}')\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2}$$

rendszer megoldható. Ez annyit jelent, hogy azon λ értékek λ^* felső határát keressük, amelyek mellett az

$$\left.\begin{aligned} A\mathbf{x} + I\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ (\mathbf{c}' - \lambda\mathbf{d}')\mathbf{x} + y_{mn} &= 0 \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \geqq \mathbf{0} \quad y_{mn} &\geqq 0 \end{aligned}\right\} \mathbf{1}' \cdot \mathbf{y} + y_{mn} \rightarrow \min \tag{3}$$

lineáris programozási feladatban (ahol I és $\mathbf{1}'$ megfelelő méretű egységmátrix, ill. olyan vektor, amelynek valamennyi komponense 1), optimum értéke zérus.

Kiindulás: Tegyük fel, hogy $\lambda > \lambda_i$ mellett a (2) rendszernek nincs megoldása és rendelkezésünkre áll (3) egy szimplex táblázata, melyben a bázis tartalmaz még y-változót. A táblázat elemei λ lineáris törtfüggvényei vagy lineáris függvényei (és konstansok). Továbbá $\lambda = \lambda_i$ mellett a megoldást szolgáltató vektor komponenseinek kifejezései nem-negatívok, illetve ha $\lambda = \lambda_i$ mellett ezen kifejezések valamelyikének nincs értelme, akkor λ_i-nél vett baloldali határértéke $+\infty$ és ez fennáll $\lambda \geqq \max(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{iJ})$ esetén,ahol a λ_{ij}-k már meghatározott, egymástól különböző számok.

Két eset lehetséges

1) $\lambda = \lambda_i$ mellett a szimplex táblázat utolsó sora tartalmaz negatív elemet (illetve a baloldali határérték $-\infty$).

Ekkor az ezen oszlopnak megfelelő változó bevonásával elvégzünk egy szimplex transzformációt és meghatározzuk azon $\lambda_{ij}(< \lambda_i)$ értéket (λ_{ij} esetleg $-\infty$), mely értékig a végzett bázistranszformáció egy szabályos szimplex-lépés. A közönséges szimplex módszerre emlékeztetve azon λ_{ij} értékeket kell itt figyelembe vennünk, amelyig bezárólag az utolsó sor kérdéses eleme negatív, a generátor elem meghatározásánál a minimum még ugyanazon sorban éretik el, mint az aktuális λ_i értéknél. Ha λ_{ij} nem esik egybe az eddig meghatározott $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{iJ}$ egyikével sem, akkor legyen $\lambda_{i,J+1} = \lambda_{ij}$. Ha a bázisban szerepel még y változó, folytassuk a kiindulástól eljárásunkat.

2) $\lambda = \lambda_i$ mellett a táblázat utolsó sorában minden elem nemnegatív (illetve a baloldali határérték $+\infty$). Ekkor meghatározzuk azon λ_i-nél nemnagyobb legnagyobb olyan λ értéket, amelynél tetszőleges kisebb λ-ra az

utolsó sorban van negatív elem. Legyen ez λ_{i0} (ha ilyen érték nincs $\lambda_{i0} = -\infty$). Legyen most $\lambda_{i+1} = \max(\lambda_{i0}, \lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots) = \lambda_{ij}$ és

$$\{\lambda_{i+1,1}, \lambda_{i+1,2}, \ldots\} = \{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{i,j-1}, \lambda_{i,j+1}, \ldots\}.$$

Különböztessünk meg két alesetet.

2a) $\lambda_{i+1} = \lambda_\omega > \lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots$ Ekkor a kérdéses oszlopnak megfelelő változót bevonva a bázisba $\lambda = \lambda_{i+1}$-gyel és az adódó táblázattal folytassuk kiindulástól eljárásunkat, ha az adódó bázisban szerepel még y változó.

2b) $\lambda_{i0} \leqq \lambda_{i+1}$ esetén a kiindulástól való folytatáshoz szükséges szimplex táblázat azon $\lambda = \lambda_k$ $(k \leqq i)$ mellett végzett lépéshez tartozó táblázatból nyerhető, amikor a λ_{i+1}-t adó λ_{ij}-t meghatároztuk.

Igaz a következő

Tétel. $\lambda_1 = +\infty$*-nel és az* $m + 1$ *számú* y *változó, mint bázisváltozókhoz tartozó táblázattal kezdve eljárásunkat véges számú lépés után olyan* λ_i *értékhez és táblázathoz jutunk, hogy igaz az alábbi két eset valamelyike:*

a) *a bázis nem tartalmaz* y *változót. Ebben az esetben az aktuális* λ_i *a keresett* λ^* *felső határ.*

b) $\lambda_{i+1} = -\infty$, *amely esetben vagy nincs lehetséges program, vagy* $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ *állandó előjelű,* $\mathbf{d}'\mathbf{x} \equiv 0$ *a lehetséges programok* K *halmazán.*

Az egyetlen, ami az itt elmondottakból bizonyításra szorul, az az eljárás végessége. Ez viszont adódik abból, hogy egyrészt azon λ-értékek száma melyek sorozatbeli λ_i-értékként szóbajöhetnek véges, hiszen ezek véges sok lehetséges táblázatban fellépő lineáris függvény, lineáris törtfüggvény, illetve ezek különbségének zérushelyei közül kerülnek ki, másrészt egy fix λ_i érték mellett a szimplex eljárás végessége folytán végesszámú lépés után vagy már nem szerepel y-változó a bázisban vagy egy kisebb λ-értékkel kell folytatnunk az eljárást.

Mielőtt azzal foglalkoznánk, hogy mindebből milyen következtetéseket vonhatunk le az (1) feladattal kapcsolatban, tekintsük a probléma alábbi geometriai interpretációját, amire a II. alatti eljárás is épül.

Tegyük fel, hogy létezik lehetséges program, azaz a $K = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$ konvex poliéder nem üres és tekintsük ennek a

$$z_1 = \mathbf{d}'\mathbf{x} \qquad z_2 = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

egyenletek alapján történő leképezését a (z_1, z_2) koordináta síkra. Az S képhalmaz nyilván a sík egy konvex polihedrikus részhalmaza.

Különböztessünk meg három esetet aszerint, hogy az origó külső (1*a*, *b* és *c* ábrák), határ (2*a* és *b* ábrák), ill. belső pontja (3. ábra) S-nek (A további szétválasztás annak alapján történt, hogy van-e más közös pontja S-nek és a z_2-tengelynek vagy nincs). Tegyük fel, hogy az algoritmus az a) esetnél ért véget. Különböztessünk meg két esetet.

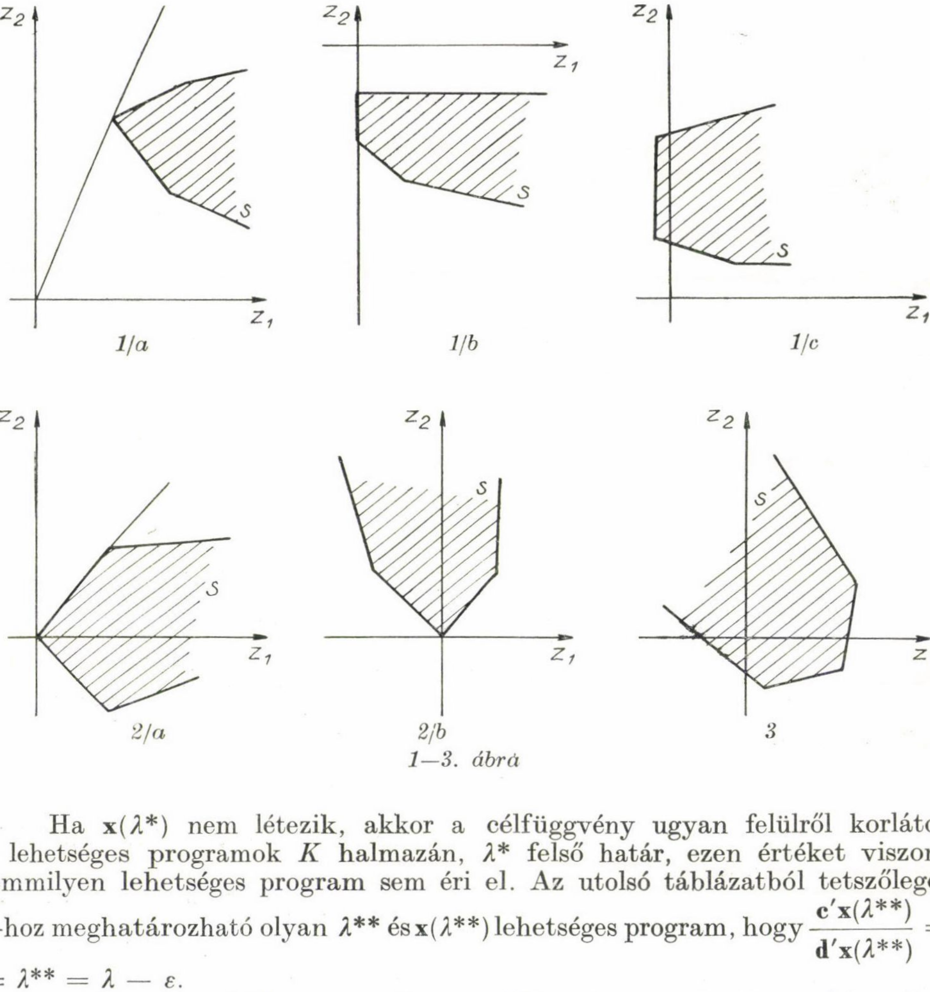
1) λ^* véges. Ha λ^* mellett a táblázatból adódó $\mathbf{x}(\lambda^*)$ létezik, akkor $\mathbf{x}(\lambda^*)$ az (1) feladat optimális megoldása, az optimum értéke λ^* (1a és 2*a* ábrák.) Ha $\mathbf{d}'\mathbf{x}(\lambda^*) = 0$, akkor az

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{c}' - \lambda^*\mathbf{d}')\,\mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

feltételeket kielégítő olyan programot meghatározva, melyre $\mathbf{d}'\mathbf{x} \neq 0$, adódik (1)-nek olyan optimális megoldása, melyre $\frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}}{\mathbf{d}'\mathbf{x}} = \lambda^*$. (Ilyen program meghatározása az algoritmus során adódott utolsó táblázatból kiindulva már egyszerűen végrehajtható.)



1—3. ábra

Ha $\mathbf{x}(\lambda^*)$ nem létezik, akkor a célfüggvény ugyan felülről korlátos a lehetséges programok K halmazán, λ^* felső határ, ezen értéket viszont semmilyen lehetséges program sem éri el. Az utolsó táblázatból tetszőleges ε-hoz meghatározható olyan λ^{**} és $\mathbf{x}(\lambda^{**})$ lehetséges program, hogy $\frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}(\lambda^{**})}{\mathbf{d}'\mathbf{x}(\lambda^{**})} = \lambda^{**} = \lambda - \varepsilon$.

2) $\lambda^* = +\infty$. Ebben az esetben a célfüggvény nem korlátos a lehetséges programok K halmazán. A táblázatban a bázisbeli $\mathbf{x}$-komponensek kifejezésében elvégezve a $\lambda \to +\infty$ határátmenetet (amennyiben ez szükséges), adódik egy olyan $\mathbf{x}$ program, melyre $\mathbf{d}'\mathbf{x} = 0$. (Ha $\mathbf{c}'\mathbf{x} = 0$ (lásd *2b*) ábra), akkor az utolsó táblázatból kiindulva meghatározhatunk egy, az

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{d}'\mathbf{x} = 0$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

feltételeket kielégítő olyan programot, amelyre $\mathbf{c}'\mathbf{x} > 0$. Ugyanezen feltételrendszert vizsgálva dönthetjük el, hogy amennyiben algoritmusunk a b) esetnél ér véget, melyik alesettel van dolgunk.)

Tekintsük a következő — kisméretű — számpéldát, amelynek kizárólag illusztrálás a célja:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0 \end{aligned}\right\} \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} \to \max$$

Az előzőek alapján a vizsgálandó lineáris programozási feladat:

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 - x_3 + y_1 &= 2 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 + y_2 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + y_3 &= 4 \\ -\lambda x_1 + x_2 - \lambda x_3 + x_4 + y_4 &= 0 \end{array}\right\} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \min$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 \geqq 0$$

Az y-változókból, mint bázisváltozókból kiindulva, az adódó táblázat (*1. táblázat*) alapján $\lambda_1 = +\infty$-nél $\lambda_{11} = 0$-t nyerjük. x_2-t y_4 helyett bevonva a bázisba kapjuk a *2. táblázatot*. Az x_1-hez tartozó oszlopban keresve most a

		x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	2	1	2	-1	0
y_2	6	4	0	1	1
y_3	4	-1	3	2	0
y_4	0	$-\lambda$	1	$-\lambda$	1
	-12	$\lambda - 4$	-6	$\lambda - 2$	-2

1. táblázat

		x_1	x_3	x_4
y_1	2	$2\lambda + 1$	$2\lambda - 1$	-2
y_2	6	4	1	1
y_3	4	$3\lambda - 1$	$3\lambda + 2$	-3
x_2	0	$-\lambda$	$-\lambda$	1
	-12	$-5\lambda-4$	$-5\lambda-2$	4

2. táblázat

generáló elemet, ez a $2\lambda + 1$ lesz, mert

$$\min\left[\frac{2}{2\lambda + 1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3\lambda - 1}\right] = \frac{2}{2\lambda + 1},$$

ha $\frac{1}{6} \leqq \lambda < +\infty$ $\left(\lambda \leqq \frac{1}{3}\right.$ esetén a zárójelben szereplő harmadik tagot nem kell figyelembe vennünk$\Big)$, adódik a *3. táblázat* és $\lambda_{12} = \frac{1}{6}$

		x_3	x_4
x_1	$\frac{2}{2\lambda+1}$	$\frac{2\lambda-1}{2\lambda+1}$	$\frac{-2}{2\lambda+1}$
y_2	$\frac{12\lambda-2}{2\lambda+1}$	$\frac{-6\lambda+5}{2\lambda+1}$	$\frac{2\lambda+9}{2\lambda+1}$
y_3	$\frac{2\lambda+6}{2\lambda+1}$	$\frac{12\lambda+1}{2\lambda+1}$	$\frac{-5}{2\lambda+1}$
x_2	$\frac{2\lambda}{2\lambda+1}$	$\frac{-2\lambda}{2\lambda+1}$	$\frac{1}{2\lambda+1}$
	$-\frac{14\lambda+4}{2\lambda+1}$	$-\frac{6\lambda+6}{2\lambda+1}$	$-\frac{2\lambda+4}{2\lambda+1}$

3. táblázat

		x_1	x_4
x_3	$\frac{2}{2\lambda-1}$	$\frac{2\lambda+1}{2\lambda-1}$	$\frac{-2}{2\lambda-1}$
y_2	$\frac{12\lambda-8}{2\lambda-1}$	$\frac{6\lambda-5}{2\lambda-1}$	$\frac{2\lambda+1}{2\lambda-1}$
y_3	$\frac{2\lambda-8}{2\lambda-1}$	$\frac{-8\lambda-3}{2\lambda-1}$	$\frac{7}{2\lambda-1}$
x_2	$\frac{2\lambda}{2\lambda-1}$	$\frac{2\lambda}{2\lambda-1}$	$\frac{-1}{2\lambda-1}$
	$-\frac{14\lambda-16}{2\lambda-1}$	$\frac{2\lambda+8}{2\lambda-1}$	$-\frac{2\lambda+8}{2\lambda-1}$

4. táblázat

$$\lim_{\lambda\to+\infty} -\frac{6\lambda+6}{2\lambda+1} = -3 < \lim_{\lambda\to+\infty} -\frac{2\lambda+4}{2\lambda+1} = -1$$

alapján most x_3 bevonásával próbálkozva, minthogy

$$\min\left[\frac{2}{2\lambda-1}, \frac{2\lambda+6}{12\lambda+1}\right] = \frac{2}{2\lambda-1},$$

ha $4 \leqq \lambda < +\infty$, $\lambda_{13} = 4$, és a következő vizsgálandó táblázat a 4. táblázat lesz.

Itt az x_4-hez tartozó oszlopban a legalsó pozícióban szereplő kifejezés $\lambda = +\infty$-nél vett határértéke $-1(< 0)$, a generáló elem, a

$$\min\left[\frac{12\lambda-8}{2\lambda+1}, \frac{2\lambda-8}{7}\right] = \frac{12\lambda-8}{2\lambda+1}$$

ha $24 \leqq \lambda < +\infty$ összefüggés alapján, $\frac{2\lambda+1}{2\lambda-1}$ lesz és $\lambda_{14} = 24$, a transzformációt elvégezve kapjuk az 5. *táblázatot*.

		x_1
x_3	$\frac{14}{2\lambda+1}$	$\frac{2\lambda+9}{2\lambda+1}$
x_4	$\frac{12\lambda-8}{2\lambda+1}$	$\frac{6\lambda-5}{2\lambda+1}$
y_3	$\frac{2\lambda-48}{2\lambda+1}$	$-\frac{12\lambda+34}{2\lambda+1}$
x_2	$\frac{2\lambda+8}{2\lambda+1}$	$\frac{2\lambda+5}{2\lambda+1}$
	$-\frac{2\lambda-48}{2\lambda+1}$	$\frac{12\lambda+34}{2\lambda+1}$

5. táblázat

		x_1
x_3	$\frac{2}{7}$	$-\frac{5}{7}$
y_2	$\frac{48-2\lambda}{7}$	$\frac{12\lambda+34}{7}$
x_4	$\frac{2\lambda-8}{7}$	$-\frac{12\lambda+1}{7}$
x_2	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{7}$
	$-\frac{48-2\lambda}{7}$	$-\frac{12\lambda+34}{7}$

6. táblázat

Ezen táblázatból, az utolsó oszlop alapján a $\lambda_{10} = -\frac{34}{12}$ érték adódik.

Ilymódon

$$\lambda_2 = \max\left(-\frac{34}{12}, 0, \frac{1}{6}, 4, 24\right)$$

és

$$\{\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}\} = \left\{0, \frac{1}{6}, 4\right\}$$

lesz.

Visszatérve a 4. táblázathoz $\frac{7}{2\lambda-1}$-et választva a generáló elemnek, a szimplex transzformáció után adódik a 6. táblázat, és egy további lépés után az

$$x_1 = \frac{-2\lambda+48}{7}, \quad x_2 = \frac{98\lambda+224}{84\lambda+238}, \quad x_3 = \frac{14\lambda+308}{84\lambda+238}, \quad x_4 = \frac{546\lambda-224}{84\lambda+238}$$

értékek, tehát az optimális megoldás

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = \frac{8}{7}, \quad x_3 = \frac{2}{7}, \quad x_4 = \frac{40}{7}$$

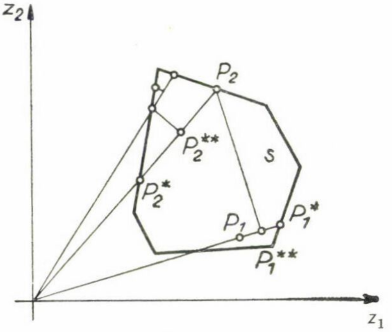
és az optimum értéke 24.

(Vegyük észre, hogy ezen megoldás már az 5. táblázatból is leolvasható. Azonban a különféle lehetséges esetek egységes kezelése az algoritmusnak a tárgyalt formában való leírását követelte meg és számpéldánk is ezen formának felelt meg.)

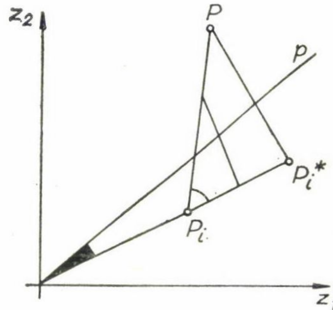
II. A közelítő eljárás

Ezt a módszert csak azon praktikus szempontból leginkább szóbajövő esetre írjuk le, amikor K korlátos és K-n $\mathbf{d}'\mathbf{x} > 0$, amely esetben nyilván véges az optimum értéke, létezik optimális program. Az I-ben definiált leképezésnél adódó S képhalmazról, mely ekkor egy konvex sokszög, feltesszük még, hogy nem egyenesszakasz. A további esetekre a kiterjesztés elvi problémát az alábbiakban leírtak alapján nem okoz, pusztán egy hosszabb esetszétválasztásra vezetne.

Definiáljuk S-beli pontok egy sorozatát a következőképpen (4. ábra).



4. ábra



5. ábra

Legyen P_1 S-nek egy tetszőleges pontja. Ha P_i-t már definiáltuk, legyen P_i^* S határának és az OP_i félegyenesnek P_i-től különböző pontja, ha ilyen létezik, egyébként pedig P_i. Legyen továbbá P_i^{**} a $P_i^* P_i$ szakasz felezőpontja. Akkor P_{i+1} legyen S határának és az OP_i^{**}-ra merőleges egyenes azon közös pontja, melynek z_2-koordinátája nagyobb, mint P_i^* z_2-koordinátája, ha ilyen létezik, egyébként pedig P_i^*.

Tétel. *Az ilymódon definiált pontsorozat S egy olyan pontjához konvergál, mely képe egy optimális programnak.*

Ugyanis az OP_i félegyenesek iránytangensei egy monoton növő korlátos, tehát konvergens sorozatot alkotnak. Az állítás igazolásaként elegendő annyit belátni, hogy az origón átmenő, ezen határértékkel megegyező iránytangensű p egyenes felett nincs S-beli pont.

Ennek ellenkezőjét feltéve, legyen P S-nek egy p feletti pontja (5. ábra). Legyen továbbá $(OP_i, p) \sphericalangle = \alpha_i$, $\min\,[P_i^* P_i P \sphericalangle, PP_i^* P_i \sphericalangle] = \beta_i$, $OP_i = d_i$, $P_i P_i^* = 2a_i$. (Ha P_i^* van O és P_i között, P_i és P_i^* szerepet cserél.)

Minthogy a $\{P_i\}$ sorozat minden tagja p alatt van, azért

$$a_i \operatorname{tg} \beta_i \leq (a_i + d_i) \operatorname{tg} \alpha_i ,$$

amiből

$$\operatorname{tg} \alpha_i \geqq \frac{a_i}{a_i + d_i} \operatorname{tg} \beta_i.$$

A jobboldalon szereplő kifejezésben viszont egy elég nagy i esetén az indirekt feltevés, valamint annak folytán, hogy S nem egyenesszakasz, $a_i \geqq a > 0$, $\operatorname{tg} \beta_i \geqq \operatorname{tg} \beta > 0$ ami ellentmond az $\alpha_i \to 0$ relációnak.

A fenti tétel alapján az 1. feladat megoldására a következő eljárás adódik.

Legyen $\mathbf{x}_1$ tetszőleges lehetséges program, $\frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}_1}{\mathbf{d}'\mathbf{x}_1} = \lambda_1$.

Ha már meghatároztunk egy $\mathbf{x}_i$ programot, legyen $\frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}_i}{\mathbf{d}'\mathbf{x}_i} = \lambda_i$, és tekintsük a következő lineáris programozási feladatokat:

$$\left.\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (\mathbf{c}' - \lambda_i \mathbf{d}')\mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \mathbf{d}'\mathbf{x} \to \max, \tag{4a}$$

ill.

$$\left.\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (\mathbf{c}' - \lambda_i \mathbf{d}')\mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \mathbf{d}'\mathbf{x} \to \min. \tag{4b}$$

Jelöljük $\mathbf{x}_i^*$-gal (4a)-nak vagy (4b)-nek egy olyan optimális megoldását, melyre $\mathbf{d}'\mathbf{x}_i^* \neq \mathbf{d}'\mathbf{x}_i$. Legyen $\mathbf{x}_i^{**} = \frac{\mathbf{x}_i^* + \mathbf{x}_i}{2}$. Akkor $\mathbf{x}_{i+1}$ az

$$\left.\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (\lambda_i \mathbf{c}' + \mathbf{d}')\mathbf{x} &= (\lambda_i \mathbf{c}' + \mathbf{d}')\mathbf{x}_i^{**} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \mathbf{c}'\mathbf{x} \to \max \tag{5}$$

lineáris programozási feladat megoldása.

A nyert λ_i értékek monoton növően konvergálnak az (1) feladat optimumához.

Minthogy $\mathbf{x}_{i+1}$ mindig optimális megoldása (4a)-nak vagy (4b)-nek, azért (4a) és (4b) közül minden lépés során csak az egyik feladatot kell megoldanunk. (Ha egy program mindkét feladatnak optimális megoldása, akkor az nyilván optimális megoldása (1)-nek.) Továbbá az is látható, hogy nem szükséges minden lépésben újra kezdeni (4), illetve (5) alatti feladatok megoldását; mindig fel tudjuk használni az előző lépések során nyert táblázatokat, valamint az is, hogy $\mathbf{x}_1$ ismerete nem szükséges, hanem csak egy alkalmas λ_1-érték.

Ha az eljárás során valamely lépésnél $\lambda_{i+1} = \lambda_i$, akkor $\mathbf{x}_i$ optimális, vagy — amely lehetőséget II. elején kizártunk — az S képhalmaz egyenesszakasz. A két eset az

$$\left.\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \mathbf{c}'\mathbf{x} \to \max,$$

ill.

$$\left.\begin{array}{r} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \end{array}\right\} \mathbf{d}'\mathbf{x} \to \max$$

lineáris programozási feladatok vizsgálatával — melyek ismét az előzőleg nyert táblázatok alapján végrehajthatók — szétválasztható, ill. — a második alternatíva teljesülése esetén — az optimális program(ok) meghatározható(k).

Befejezésül — ismét csak illusztrációképpen — tekintsük a következő egyszerű számpélda első lépéseit. A feladat:

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0 \end{array}\right\} \frac{3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4}{x_1 + 2x_2 + x_4} \to \max .$$

(A feladat optimális megoldása az $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{7}{3}$, $x_4 = 0$ program, az optimum értéke $\frac{26}{4} = 6{,}5$.) Induljunk ki az $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1, 1)'$ programból. $\lambda_1 = \frac{8}{4} = 2$. Az első megoldandó lineáris programozási feladat:

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0 \end{array}\right\} x_1 + 2x_2 + x_4 \to \max .$$

Innen $\mathbf{x}_1^* = \left(\frac{33}{14}, \frac{11}{14}, 0, \frac{29}{14}\right)'$ és $\mathbf{x}_1^{**} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^*}{2} = \left(\frac{47}{28}, \frac{25}{28}, \frac{14}{28}, \frac{43}{28}\right)'$. $\mathbf{x}_2$-t a

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 7x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 25 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0 \end{array}\right\} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \max$$

lineáris programozási feladat megoldása adja: $\mathbf{x}_2 = \left(\frac{51}{24}, 0, \frac{37}{24}, \frac{19}{24}\right)'$ és $\lambda_2 = \frac{53}{14} = 3{,}78$.

A következő megoldandó feladat

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ -11x_1 - 92x_2 + 28x_3 - 25x_4 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0 \end{array}\right\} x_1 + 2x_2 + x_4 \to \max$$

lesz. (Ugyanis $\mathbf{x}_2$ ugyanezen feltételrendszerű és minimalizálást előíró célfüggvényű feladat megoldása.) Ebből $\mathbf{x}_2^* = \left(\frac{144}{260}, \frac{152}{260}, \frac{556}{260}, 0\right)$, $\mathbf{x}_2^{**} = \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^*}{2} = \left(\frac{4179}{3120}, \frac{912}{3120}, \frac{5741}{3120}, \frac{1235}{3120}\right)$.

Vizsgálnunk kell most a

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ 173x_1 + 81x_2 + 106x_3 + 120x_4 &= 498 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0 \end{aligned}\right| \; 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \max$$

feladatot, ennek megoldásaként kapjuk $\mathbf{x}_3$-at: $\mathbf{x}_3 = \left(\frac{808}{561}, 0, \frac{1249}{561}, \frac{60}{561}\right)$ és $\lambda_3 = \frac{5042}{868} = 5{,}81$ stb.

A módszerrel kapcsolatban nyitott az iteráció befejezésének kérdése: egyszerű olyan példát konstruálni, amelyben a $\lambda_{i+1} - \lambda_i$ különbségek nem monoton csökkenőek.

(Beérkezett: 1964. november 23.)

IRODALOM

[1] Martos B.: „Hiperbolikus programozás". *MTA Matematikai Kutatóintézet Közleményei* **5** (1960), 383—406.

ДВА НОВЫХ ПРИЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

J. STAHL

Резюме

Статья изложит два метода, как решить задачи гиперболического программирования ([1]).

Первый метод дает еполномочия о верхней грани λ^* таких стоимостей λ, где стоимость оптимума равна нулю в задаче линейного программирования (3).

Стоимость λ^* и соответствующего ортималнего $\mathbf{x}^*$ получаются благодаря ограниченному применению симплексного пространства. Элементы возникающих таблиц являются линейны-целыми или линейны-ломачными функциями λ.

Другой метод является приблизительным способом и требует рещение последовательной простой линейных программирований.

Пусть $\mathbf{x}_1$ какой угодно решение задачи (1) и $\lambda_1 = \dfrac{\mathbf{c}'\mathbf{x}_1}{\mathbf{d}'\mathbf{x}_1}$. Если $\mathbf{x}_i$ является известным и $\lambda_i = \dfrac{\mathbf{c}'\mathbf{x}_i}{\mathbf{d}'\mathbf{x}_i}$ тогда смотрим задачи линейного программирования (4a) и (4b).

Пусть $\mathbf{x}_i^*$ такое решение какой-нибудь задачи, где действительно $\mathbf{d}'\mathbf{x}_i^* \neq \mathbf{d}'\mathbf{x}_i$ и пусть $\mathbf{x}_i^{**} = \dfrac{\mathbf{x}_i^* + \mathbf{x}_i}{2}$.

Тогда $\mathbf{x}_{i+1}$ будет решение задачи линейного программирования (5).

Стоимости λ_i которые можно получить с этим методом, в таких случаях, которые можно применять на практике, сходятся к оптималной стоимости задачи (1). В общем случае к этому нужно небольшое изменение.

TWO NEW METHODS FOR SOLUTION OF HYPERBOLIC PROGRAMING

by

J. STAHL

Summary

In our paper we deal with two procedures for solving the problem the s. c. hyperbolic programming problem ([1]).

The first method is to determine the upper bound λ^* of that λ values, for which in the linear programming problem (3) the optimal value is equal to zero.

The value of λ^* and the corresponding optimal $\mathbf{x}^*$ may be obtained by transformations of simplex tableaus in a finite number of steps. The elements of these tableaus are linear or linear quotient functions of λ.

The other method is an approximative one. In the course of it one has to solve a sequence of common linear programming problems.

Let $\mathbf{x}_1$ be an arbitrary feasible solution of (1) and $\lambda_1 = \dfrac{\mathbf{c}'\mathbf{x}_1}{\mathbf{d}'\mathbf{x}_1}$. If $\mathbf{x}_i$ is already known, let $\lambda_i = \dfrac{\mathbf{c}'\mathbf{x}_i}{\mathbf{d}'\mathbf{x}_i}$ be and let us consider the linear programming problems (4a) and (4b).

Let $\mathbf{x}_i^*$ be such a solution of one of these problems, for which $\mathbf{d}'\mathbf{x}_i^* \neq \mathbf{d}'\mathbf{x}_i$ and let us define $\mathbf{x}_i^{**} = \dfrac{\mathbf{x}_i^* + \mathbf{x}_i}{2}$.

Then $\mathbf{x}_{i+1}$ is the solution of the linear programming problem (5).

In the cases of practical interests the obtained λ_i values monoton increasingly converge to the optimal value of problem (1). In the general case a slight modification is necessary.