

ELMOZDULÁS ÉS SZÖGELFORDULÁS SZABÁLYOZÁSA A RUGALMAS TARTÓ-MEREV LEMEZ ALKOTTA MECHANIKAI SZERKEZETNÉL

Páczelt István 

professor emeritus, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet
3515 Miskolc-Egyetemváros, e-mail: istvan.paczelt@uni-miskolc.hu

Absztrakt

Jelen munka a rugalmas prizmatikus tartóhoz csatlakozó merev síklapra ható erők hatását fogja vizsgálni azzal a céllal, hogy tisztázza a laphoz csatlakozó merev csap vége és az alatta lévő síkfelületű test között kialakuló érintkezésnél milyen elmozdulások és erők léphetnek fel. A két ismert nagyságú terhelőerő különböző vándorlási pályája, hogyan hat a csapvég mozgására, pályájára, a csap és az alsó test között fellépő súrlódóerő nagyságára, ennek pedig mekkora a zavaró hatása a csapvégi pályája végső formájára. Számos terhelési variációt vizsgálunk, többek között olyan erőmozgási pályát is meghatározunk, ami a csap végének körpályán történő mozgását fogja biztosítani.

Kulcsszavak: rugalmasságtan, elmozdulás és szögelfordulás szabályozása, súrlódás, változó terhelés, érintkezési kölcsönhatás

Abstract

The present work will examine the effect of forces acting on a rigid flat plate connected to a flexible prismatic beam with the aim of clarifying what displacements and forces may occur during the contact between the end of the rigid pin connected to the plate and the body with a flat surface underneath. How do the different movement trajectories of the two known loading forces affect the movement and trajectory of the pin end, the magnitude of the frictional force between the pin and the lower body, and how much of a disturbing effect does this have on the final shape of the pin end trajectory. We examine several load variations, among others, we also determine a force movement path that will ensure the movement of the end of the pin in a circular path.

Keywords: theory of elasticity, control of the displacement and slope, friction, variable load, contact problems

1. Bevezetés

Gépészmérnöki gyakorlatban sokszor találkozunk olyan technológiai feladattal, amikor egy adott helyre, adott erővel, adott mértékű elmozdulást kell biztosítani a szerelési feladatoknál. Ez a probléma egy új típusú optimalizációs feladatot jelöl ki. Ezzel kapcsolatosan két munkánk jelent meg (Páczelt és Mróz, 2019; Páczelt és Mróz, 2020). A rugalmas szerkezet egy tartó, amihez egy merev csap csatlakozik. Ennek a végén kívánjuk elérni az adott elmozdulást, ill. a szögelfordulást. Az erők időbeli változtatásával periodikus mozgás érhető el. A kívánt elmozdulás és szögelfordulás a tartóra ható két erő helyzetét egyértelműen meghatározza. Az érintkezési erőt a két erő eredője szolgáltatja.

Most egy módosított szerkezetet fogunk vizsgálni. Egy rugalmas tartóhoz egy merev lap csatlakozik, amiből kiálló merev csap vége fog kölcsönhatásba kerülni a síkfelületű testtel. Vizsgálni fogjuk a merev lapra ható fix helyen lévő, ill. a mozgó erők hatását.

2. A vizsgált szerkezet

Vizsgáljuk az 1. ábrán vázolt rugalmas tartó-merev lemez alkotta rendszert, aminél az A helyen csúsza van, az x_0^-, y_0^- és x_0^+, y_0^+ helyen pedig $F_0^- = F_Q^-$ és $F_0^+ = F_Q^+$ koncentrált függőleges irányú erők hatnak. (Az erő és a lemez közötti súrlódástól eltekintünk.) A lemezhez mereven csatolt QG csap merev. A G pont x irányú koordinátája x_Q , az itt fellépő függőleges erő az egyensúlyból következőleg $F_Q = F_Q^- + F_Q^+$, mivel a megtámasztásnál a támasztóerő függőleges erdője zérus, $F_b = 0$, azaz a csúsza hüvelybe le és fel szabadon mozoghat. Jelölje a terhelések relatív pozícióit $\xi_0^- = x_0^- / x_Q$ és $\xi_0^+ = x_0^+ / x_Q$, míg a terhelések faktorait $f_0^- = F_0^- / F_Q$, $f_0^+ = F_0^+ / F_Q$. A csap vége a G pontban érintkezésben van egy síkfelületű testtel. A normális irányú erő $F_Q = F_Q^- + F_Q^+$, míg a súrlódóerő a Coulomb-törvény szerint számítható. Mivel a szerkezet lemez része merev, a tartó rugalmas, az erőket a B keresztmetszetbe fogjuk redukálni.

Súrlódásmentes esetben a B -be redukált erők és nyomatékok az alábbiak

$$F_{zB} = F_Q - (F_0^- + F_0^+), \quad F_Q = F_0^- + F_0^+ = F_Q^- + F_Q^+ \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M_{xB} &= (F_0^- y_0^- - F_0^+ y_0^+), \quad y_0^- \geq 0, \quad y_0^+ \geq 0, \\ M_{yB} &= (x_0^+ - L)F_0^+ + (x_0^- - L)F_0^- - (x_Q - L)F_Q = x_0^+ F_0^+ + x_0^- F_0^- - x_Q F_Q, \\ M_{zB} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Ha a B -ben fellépő elmozdulás $\mathbf{u}_B = u_{xB}\mathbf{e}_x + u_{yB}\mathbf{e}_y + u_{zB}\mathbf{e}_z$ és szögelfordulás $\boldsymbol{\theta}_B = \theta_{xB}\mathbf{e}_x + \theta_{yB}\mathbf{e}_y + \theta_{zB}\mathbf{e}_z$ értékű, akkor a G pontbeli merevtestszerű elmozdulás

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_G &= u_{xG}\mathbf{e}_x + u_{yG}\mathbf{e}_y + u_{zG}\mathbf{e}_z = \mathbf{u}_B + \boldsymbol{\theta}_B \times \Delta\mathbf{r}_{BG}, \quad \text{ahol } \Delta\mathbf{r}_{BG} = \mathbf{r}_G - \mathbf{r}_B = \Delta x_{BG}\mathbf{e}_x + \Delta y_{BG}\mathbf{e}_y + \Delta z_{BG}\mathbf{e}_z \\ \Delta x_{BG} &= x_Q - L, \quad \Delta y_{BG} = 0, \quad \Delta z_{BG} = -s \\ \mathbf{u}_G &= \begin{bmatrix} u_{xG} \\ u_{yG} \\ u_{zG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{xB} \\ u_{yB} \\ u_{zB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -s & 0 \\ s & 0 & \Delta x_{BG} \\ 0 & -\Delta x_{BG} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Természetesen a sebességre áll

$$\dot{\mathbf{u}}_G = \dot{u}_{xG}\mathbf{e}_x + \dot{u}_{yG}\mathbf{e}_y + \dot{u}_{zG}\mathbf{e}_z = \dot{\mathbf{u}}_B + \dot{\boldsymbol{\theta}}_B \times \Delta\mathbf{r}_{BG}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_G = \begin{bmatrix} \dot{u}_{xG} \\ \dot{u}_{yG} \\ \dot{u}_{zG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{xyG} \\ \dot{u}_{zG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_{xB} \\ \dot{u}_{yB} \\ \dot{u}_{zB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -s & 0 \\ s & 0 & \Delta x_{BG} \\ 0 & -\Delta x_{BG} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{u}}_B + \mathbf{R}_{BG} \dot{\boldsymbol{\theta}}_B \quad (4)$$

Izotróp súrlódásnál a G -ben lévő súrlódóerő az ismert összefüggéssel számolható

$$\mathbf{S}_G = S_{xG} \mathbf{e}_x + S_{yG} \mathbf{e}_y = -\mu \frac{\dot{\mathbf{u}}_{xyG}}{|\dot{\mathbf{u}}_{xyG}|} F_Q \quad (5)$$

ahol μ a súrlódási tényező. Ekkor a B pontbeli redukált erők és nyomatékok

$$F_{zB} = F_Q - (F_0^- + F_0^+), \quad F_Q = F_0^- + F_0^+ = F_Q^- + F_Q^+, \quad F_{xB} = S_{xG}, \quad F_{yB} = S_{yG} \quad (6)$$

$$M_{xB} = (F_0^- y_0^- - F_0^+ y_0^+) + s S_{yG},$$

$$M_{yB} = x_0^+ F_0^+ + x_0^- F_0^- - x_Q F_0 - s S_{xG} \quad (7)$$

$$M_{zB} = (x_Q - L) S_{yG}$$

Ha a deformált állapotot is figyelembe vesszük, akkor a távolság más, ezért

$$\mathbf{r}_{B\tilde{G}} = \mathbf{r}_{\tilde{G}} - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_G + u_{xG} \mathbf{e}_x + u_{yG} \mathbf{e}_y - \mathbf{r}_B,$$

$$u_{xG} = u_{xB} - s\theta_y, \quad u_{yG} = u_{yB} + s\theta_x + \Delta x_{BG} \theta_z, \quad u_{zG} = u_{zB} + \Delta x_{BG} \theta_y \quad (8)$$

és így

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{B\tilde{G}} \times \mathbf{F}_{\tilde{G}} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & x_Q - L - s\theta_y & F_{xG} \\ \mathbf{e}_y & s\theta_x + \Delta x_{BG} \theta_z & F_{yG} \\ \mathbf{e}_z & -s - \Delta x_{BG} \theta_y & F_{zG} \end{vmatrix} s\theta_x + \Delta x_{BG} \theta_z \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_{B,L} + \mathbf{M}_{B,NL}, \quad F_{xG} = S_{xG}, \quad F_{yG} = S_{yG}, \quad F_{zG} = F_Q \quad (10)$$

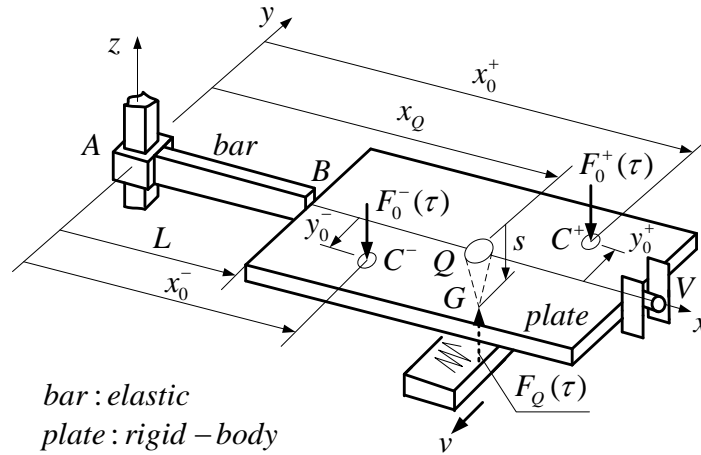
$$\mathbf{M}_{B,L} = \mathbf{e}_x s F_{yG} - \mathbf{e}_y [(x_Q - L) F_{zG} + s F_{xG}] + \mathbf{e}_z (x_Q - L) F_{yG} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{B,NL} = & \mathbf{e}_x \left\{ (s\theta_x + \Delta x_{BG} \theta_z) F_{zG} + \Delta x_{BG} \theta_y F_{yG} \right\} - \mathbf{e}_y \left[s\theta_y F_{zG} + \Delta x_{BG} \theta_y F_{xG} \right] \\ & + \mathbf{e}_z \left\{ s\theta_y F_{yG} + (s\theta_x + \Delta x_{BG} \theta_z) F_{xG} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

A hatásfüggvények segítségével a rugalmas tartó végén a B pontban az általánosított elmozdulás (eltolódás és szögelfordulás) (Szabó és Roller, 1971; Páczelt, 1999)

$$\mathbf{q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \boldsymbol{\theta}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{xB} \\ u_{yB} \\ u_{zB} \\ \theta_{xB} \\ \theta_{yB} \\ \theta_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{AE} & & & & & \\ & \frac{L^3}{3EI_z} & & & & \\ & & \frac{L^3}{3EI_y} & & & \\ & & & -\frac{L^2}{2EI_y} & & \\ & & & & \frac{L}{GI_T} & \\ & & & & & -\frac{L^2}{2EI_y} \\ & & & & & \frac{L}{EI_y} \\ & & & & & & \frac{L^2}{2EI_z} \\ & & & & & & & \frac{L}{EI_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xB} \\ F_{yB} \\ F_{zB} \\ M_{xB} \\ M_{yB} \\ M_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{M}_B \end{bmatrix} \quad (13)$$

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a rendszerre a $y_0 = y_0^+ = -y_0^-$ pontban az $F_0^-(\tau)$ erő hat, illetve az $F_0^+(\tau)$ erő periodikusan mozog a C_r^+ és C_l^+ pontok között (lásd a 2. ábra). A mozgás periodikus ideje T_* . Az erők is időben periodikusan változhatnak. A nyilak melletti 1 és 2 számok az első, ill. a második félperiódushoz tartozóan mutatják az erő mozgásának az irányát. Ezen jelölést a többi ábrán is megtaláljuk. Lényeges a V helyen lévő megtámasztás, ami az y irányú eltolódást és a merevlemez z körüli elfordulását megakadályozza.



$$\frac{du_y(V)}{dx} = \frac{d\theta_z(V)}{dx} = 0 \quad \begin{matrix} u_{yB} = u_{yV} = 0 \\ \theta_{zB} = \theta_{zV} = 0 \end{matrix}$$

1. ábra. Rugalmas tartó-merev lemez alkotta rendszernél a G pontban fellépő elmozdulást és szögelfordulást fogjuk szabályozni (vezérelni)

Mivel az $F_Q = F_0^-(\tau) + F_0^+(\tau) = const$ időben állandó, az x körüli szögelfordulás

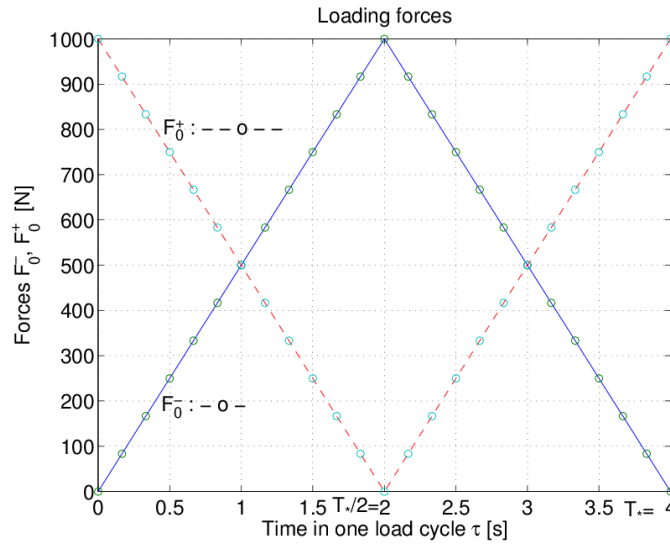
A kezdeti időpillanatban ($\tau = 0$), az $F_0^+(\tau)$ erő a C_r^+ pontban hat, míg az $F_0^-(\tau)$ erő a C_l^- pontban. Az $F_0^+(\tau)$ erő helyzetét az alábbi összefüggés adja meg

$$x_0^+(\tau) = x_0^+ f_\xi^+(\tau), \quad \frac{x_0^+(\tau)}{x_Q} = \xi^+ = \frac{x_0^+}{x_Q} f_\xi^+(\tau) = \xi_0^+ f_\xi^+(\tau) \quad (18)$$

ahol $\tilde{\xi} = \xi_0^- / \xi_0^+ = x_0^- / x_0^+$, $f_\xi^+(\tau) = 1 - \frac{2}{T_*} (1 - \tilde{\xi})\tau$ if $0 \leq \tau \leq T_*/2$, és

$$f_\xi^+(\tau) = -1 + 2\tilde{\xi} + \frac{2}{T_*} (1 - \tilde{\xi})\tau \quad \text{if } T_*/2 \leq \tau \leq T_* \quad (19)$$

Az erők időbeli lefutását a 3. ábrán láthatjuk.



3. ábra. $F_0^-(\tau), F_0^+(\tau)$ erők és eredőjük $F_0(\tau) = F_0^-(\tau) + F_0^+(\tau) = F_0 = \text{áll}$ változása az időben

3. Terhelési lehetőségek

3.1. Az erők nem mozognak

3.1.1. $F_0^-(\tau), F_0^+(\tau)$ erők az $(x, y) = (x_Q, -y_0)$ és $(x, y) = (x_Q, y_0)$ pontokban, míg az $F_0(\tau) = F_0^-(\tau) + F_0^+(\tau)$ erő a G pontban hat $(x, y) = (x_Q, 0)$.

Az y körüli szögelfordulás $\theta_y = \theta_y(\tau) = 0$

A $0 \leq \tau \leq T_*/2$ időintervallumban

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{[F_0^-(\tau) - F_0^+(\tau)]y_0L}{GI_T} = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} x_Q \eta \left[\frac{4\tau}{T_*} - 1 \right] \quad (20a)$$

Amennyiben a G pont szögelfordulásából származó új helyzetét is figyelembe vesszük, azaz az $F_Q(\tau) = F_0^-(\tau) + F_0^+(\tau)$ erőnek az x tengelyre kifejtett nyomatékát, akkor a (20a) kibővül

$$L \frac{F_Q h_z \theta_x(\tau)}{GI_T} = \frac{LF_{0,\max} h_z}{GI_T} \theta_x(\tau) \text{ taggal, mivel az } F_Q(\tau) \text{ erő a } h_z \theta_x \text{ karon ad csavarónyomatékot}$$

az x tengelyre. Emiatt a szögelfordulásra vonatkozó összefüggés

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} x_Q \eta \left[\frac{4\tau}{T_*} - 1 \right] \left[1 - L \frac{F_{0,\max} h_z}{GI_T} \right]^{-1} \text{ módosul.}$$

$$\text{Jelöljük a módosítandó tagot } B_x = \left[1 - L \frac{F_{0,\max} h_z}{GI_T} \right]^{-1} \text{-el.}$$

Végezetül egy egyszerű összefüggésre jutunk

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} x_Q \eta \left[\frac{4\tau}{T_*} - 1 \right] B_x \quad (20b)$$

$$\text{Továbbá } \tau = 0 \text{-nél, } \theta_x^{+*} = \theta_x(0) = -\frac{F_{0,\max}}{GI_T} y_0 L B_x,$$

[A + indexet azért használjuk, mert ekkor a terhelőerő $F_0^+(\tau) = F_{0,\max}$, $F_0^-(\tau) = 0$]

$$\tau = T_*/4 \text{-nél, } \theta_x(T_*/4) = 0$$

$$\tau = T_*/2 \text{-nél, } \theta_x^{-*} = \theta_x(T_*/2) = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} y_0 L B_x$$

[A – indexet azért használjuk, mert ekkor a terhelőerő $F_0^-(\tau) = F_{0,\max}$, $F_0^+(\tau) = 0$]

A $T_*/2 \leq \tau \leq T_*$ időszakason

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{[F_0^-(\tau) - F_0^+(\tau)]y_0L}{GI_T} + L \frac{F_Q h_z \theta_x(\tau)}{GI_T} = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} x_Q \eta \left[3 - \frac{4\tau}{T_*} \right] L + L \frac{F_Q h_z \theta_x(\tau)}{GI_T} \quad (21a)$$

Formálisan a (20)-nál elmondottakat felhasználva

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} x_Q \eta \left[3 - \frac{4\tau}{T_*} \right] L B_x \quad (21b)$$

3.1.2. $F_Q^-(\tau), F_Q^+(\tau)$ erők az $(x, y) = (x_0^-, 0)$ és $(x, y) = (x_0^+, 0)$ helyen hatnak

Ekkor $\theta_x = \theta_x(\tau) = 0$

$$\theta_y = \theta_y(\tau) = \frac{[-F_0^-(\tau)(x_Q - x_0^-) + F_0^+(\tau)(x_0^+ - x_Q)]L}{EI_y} = \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left[f^-(\tau)(\xi_0^- - 1) + f^+(\tau)(\xi_0^+ - 1) \right] \quad (22a)$$

Ismételten, ha a G szögelfordulás miatt kilép eredeti helyzetéből, akkor az

$$L \frac{F_Q h_z \theta_y(\tau)}{EI_y} = \frac{LF_{0,\max} h_z}{EI_y} \theta_y(\tau) \text{ tag miatt, egy újabb módosító tag jelenik meg,}$$

$$B_y = \left[1 - L \frac{F_{0,\max} h_z}{EI_y} \right]^{-1}, \text{ vagyis}$$

$$\theta_y = \theta_y(\tau) = \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left[f^-(\tau)(\xi_0^- - 1) + f^+(\tau)(\xi_0^+ - 1) \right] B_y, \quad (22b)$$

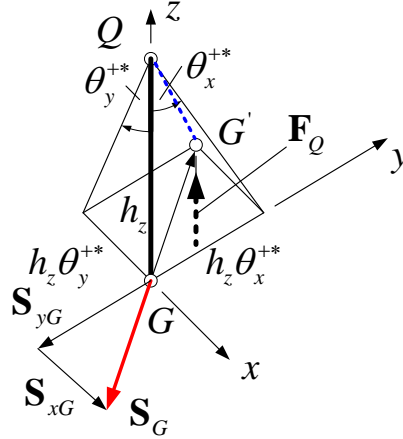
A (16) alatti $f^-(\tau)$ és $f^+(\tau)$ felhasználásával a szögelfordulás

$$// f^+(\tau) = 1 - \frac{2}{T_*} \tau, \text{ if } 0 \leq \tau \leq T_*/2, \quad f^-(\tau) = \frac{2}{T_*} \tau, \text{ if } 0 \leq \tau \leq T_*/2 //$$

$$\tau = 0 \text{ -nál, } \theta_y^{+*} = \theta_y(0) = \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L (\xi_0^+ - 1) B_y,$$

$$\tau = T_*/4 \text{ -nál, } \theta_y(T_*/4) = 0$$

$$\tau = T_*/2 \text{ -nél, } \theta_y^* = \theta_y(T_*/2) = \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L^2 (\xi_0^- - 1) B_y, \quad (23)$$



4. ábra. A QG merev csap elfordulásából származó x és y irányú elmozdulások

3.1.3. Az erő $a C_l^-(x, y) = (x_0^-, -y_0^-)$ és $a C_r^+(x, y) = (x_0^+, y_0^+)$ pontokban hatnak. Időbeli lefutásuk a (15), (16) egyenletek szerintiek.

Ekkor a $0 \leq \tau \leq T_*/2$ időintervallumban

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{[F_0^-(\tau) - F_0^+(\tau)] y_0 L}{GI_T} = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} x_Q \eta L \left[\frac{4\tau}{T_*} - 1 \right] \quad (24a)$$

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} x_Q \eta L \left[\frac{4\tau}{T_*} - 1 \right] B_x \quad (24b)$$

$$\theta_y = \theta_y(\tau) = \frac{[-F_0^-(\tau)(x_Q - x_0^-) + F_0^+(\tau)(x_0^+ - x_Q)]L}{EI_y} = \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left[\frac{2}{T_*} \tau(\xi_0^- - 1) + \left(1 - \frac{2}{T_*} \tau\right)(\xi_0^+ - 1) \right] \quad (25a)$$

$$\theta_y = \theta_y(\tau) = \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left[\frac{2}{T_*} \tau(\xi_0^- - 1) + \left(1 - \frac{2}{T_*} \tau\right)(\xi_0^+ - 1) \right] B_y \quad (25b)$$

A QG csap végén a θ_x és θ_y szögelfordulásokból y és x irányában $s\theta_x$, $-s\theta_y$ elmozdulások keletkeznek (lásd 4. ábra). Feltételezzük, hogy a G pont lineáris egyenes mentén mozog az $(-s\theta_y^{**}, s\theta_x^{**})$ pozícióból a $(-s\theta_y^*, s\theta_x^*)$ pozícióba. ($\tau = 0$ időponttól a félperiódus végéig $\tau = T_*/2$), illetve fordítva a $\tau = T_*/2$ helyzettől a periódus végéig a $\tau = T_*$ ideig. Mivel ezen pozíciókat előzetesen ki tudjuk számolni, a pontok közötti irány könnyen meghatározható és ezzel a súrlódóerő első iterációs lépéséhez tartozó értéke is ismert lesz:

$$\mathbf{S}_G = S_{xG} \mathbf{e}_x + S_{yG} \mathbf{e}_y = -\mu \frac{\dot{\mathbf{u}}_{xyG}}{|\dot{\mathbf{u}}_{xyG}|} F_Q = -\mu F_Q \frac{(-s\theta_y^{**} + s\theta_y^*) \mathbf{e}_x + (s\theta_x^{**} - s\theta_x^*) \mathbf{e}_y}{\sqrt{(-s\theta_y^{**} + s\theta_y^*)^2 + (s\theta_x^{**} - s\theta_x^*)^2}} \quad (26)$$

A második és a további iterációs lépésbeli súrlódóerőt a korábbi iterációban kapott értéket felhasználva tudjuk meghatározni a B_x , B_y módosító tagokat felhasználva

$$\theta_x^{**} = \theta_x(0) = -\frac{F_{0,\max}}{GI_T} y_0 L B_x + \frac{sS_{yG}}{GI_T} L, \quad \theta_y^{**} = \theta_y(0) = \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L (\xi_0^+ - 1) B_y - \frac{sS_{xG}}{EI_y} \quad (27a)$$

Az első $\tau = T_*/2$ félperiódus végén az új érték

$$\theta_x^* = \theta_x(T_*/2) = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} y_0 L B_x - \frac{sS_{yG}}{GI_T} L, \quad \theta_y^* = \theta_y(T_*/2) = \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L (\xi_0^- - 1) B_y + \frac{sS_{xG}}{EI_y} \quad (27b)$$

Majd a második $T_*/2 \leq \tau \leq T_*$ félperiódusban

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} x_Q \eta L \left[3 - \frac{4\tau}{T_*} \right] B_x - \frac{sS_{yG}}{GI_T} L \quad (28a)$$

$$\theta_y = \theta_y(\tau) = \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left[\left(2 - \frac{2}{T_*} \tau\right)(\xi_0^- - 1) - \left(1 - \frac{2}{T_*} \tau\right)(\xi_0^+ - 1) \right] B_y + \frac{sS_{xG}}{EI_y} \quad (28b)$$

3.2. Csak az $F_0^+(\tau)$ terhelés mozog az x mentén súrlódásnélküli esetben vizsgáljuk a szögelfordulást

A $\tau=0$ időben az $F_0^-(\tau), F_0^+(\tau)$ erők az $(x, y) = (x_0^-, -y_0)$ és $(x, y) = (x_0^+, y_0)$ pontokban hatnak. Az $F_0^+(\tau)$ erő az C_r^+ -ből a C_l^+ pont felé mozog az x mentén (lásd 5. ábra). Az erő helyzetét a (18), (19) alattiak adják meg: $\xi^+ = \xi_0^+ f_\xi^+(\tau)$.

Ismételten felhasználva a módosító tagokat, írhatjuk, hogy a $0 \leq \tau \leq T_*/2$ időintervallumban

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{[F_0^-(\tau) - F_0^+(\tau)]y_0L}{GI_T} + \frac{LF_Q h_z \theta_x}{GI_T} = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} x_Q \eta L \left[\frac{4\tau}{T_*} - 1 \right] B_x = {}^1a_{\theta_x} + {}^1b_{\theta_x} \tau \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \theta_y = \theta_y(\tau) &= \frac{[-F_0^-(\tau)(x_Q - x_0^-) + F_0^+(\tau)(x_0^+(\tau) - x_Q)]L}{EI_y} + \frac{LF_Q h_z \theta_y}{EI_y} \\ &= \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left[f^-(\tau)(\xi_0^- - 1) + f^+(\tau)(\xi_0^+ f_\xi^+(\tau) - 1) \right] B_y \\ &= \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left\{ \frac{2}{T_*} \tau (\xi_0^- - 1) + \left(1 - \frac{2}{T_*} \tau\right) \left[\xi_0^+ \left(1 - \frac{2\tau}{T_*} (1 - \tilde{\xi})\right) - 1 \right] \right\} B_y \\ &= {}^1a_{\theta_y} + {}^1b_{\theta_y} \tau + {}^1c_{\theta_y} \tau^2 \end{aligned} \quad (29b)$$

A $T_*/2 \leq \tau \leq T_*$ időszakaszon

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{[F_0^-(\tau) - F_0^+(\tau)]y_0L}{GI_T} + \frac{LF_Q h_z \theta_x}{GI_T} = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} x_Q \eta L \left[3 - \frac{4\tau}{T_*} \right] B_x = {}^2a_{\theta_x} + {}^2b_{\theta_x} \tau \quad (29c)$$

$$\begin{aligned} \theta_y = \theta_y(\tau) &= \frac{[-F_0^-(\tau)(x_Q - x_0^-) + F_0^+(\tau)(x_0^+(\tau) - x_Q)]L}{EI_y} + \frac{LF_Q h_z \theta_y}{EI_y} \\ &= \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left[f^-(\tau)(\xi_0^- - 1) + f^+(\tau)(\xi_0^+ f_\xi^+(\tau) - 1) \right] B_y \\ &= \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left\{ \left(2 - \frac{2}{T_*} \tau\right) (\xi_0^- - 1) - \left(1 - \frac{2}{T_*} \tau\right) \left[\xi_0^+ (2\tilde{\xi} - 1) + \frac{2\tau}{T_*} (1 - \tilde{\xi}) \right] - 1 \right\} B_y \\ &= {}^2a_{\theta_y} + {}^2b_{\theta_y} \tau + {}^2c_{\theta_y} \tau^2 \end{aligned} \quad (29d)$$

A G pont pályája az $(-s\theta_y(0), s\theta_x(0))$ pontból indul és a $(-s\theta_y(T_*/2), s\theta_x(T_*/2))$ pontba érkezik, a $(-s\theta_y(\tau) = -s({}^1a_{\theta_y} + {}^1b_{\theta_y} \tau + {}^1c_{\theta_y} \tau^2), s\theta_x(\tau) = s({}^1a_{\theta_x} + {}^1b_{\theta_x} \tau))$ egyenlettel jellemezve. A második félperiódusban a pályagörbe egyenlete

$$(-s\theta_y(\tau) = -s({}^2a_{\theta_y} + {}^2b_{\theta_y} \tau + {}^2c_{\theta_y} \tau^2), s\theta_x(\tau) = s({}^2a_{\theta_x} + {}^2b_{\theta_x} \tau)). \quad (30)$$

Súrlódás hatása

A csap G pontjának xy síkba eső elmozdulása a szögelfordulásokból adódóan $-s\theta_y, s\theta_x$ az x, y irányokban. A sebességet

$$\mathbf{v}_G = \dot{\mathbf{u}}_{xyG} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{-s(\theta_y(\tau + \Delta\tau) - \theta_y(\tau))}{\Delta\tau} \mathbf{e}_x + \frac{s(\theta_x(\tau + \Delta\tau) - \theta_x(\tau))}{\Delta\tau} \mathbf{e}_y \right\} \quad (31)$$

összefüggéssel számolhatjuk. A Coulomb súrlódási törvény értelmében a súrlódó erővektor

$$\mathbf{S}_G = S_{xG} \mathbf{e}_x + S_{yG} \mathbf{e}_y = -\mu \frac{\dot{\mathbf{u}}_{xyG}}{|\dot{\mathbf{u}}_{xyG}|} F_Q, \text{ ami a sebesség figyelembevételével} \quad (32a)$$

$$\mathbf{S}_G = -\mu F_Q \frac{(-s\theta_y^{\tau+\Delta\tau} + s\theta_y^\tau) \mathbf{e}_x + (s\theta_x^{\tau+\Delta\tau} - s\theta_x^\tau) \mathbf{e}_y}{\sqrt{(-s\theta_y^{\tau+\Delta\tau} + s\theta_y^\tau)^2 + (s\theta_x^{\tau+\Delta\tau} - s\theta_x^\tau)^2}}.$$

Ha az alsó lemez, amivel a G pont érintkezik, $\mathbf{v}_0 = -v_0 \mathbf{e}_y$ sebességgel mozog, akkor a súrlódóerő számításához szükséges sebesség módosulni fog

$$\mathbf{v}_G \Rightarrow \mathbf{v}_G + v_0 \mathbf{e}_y. \quad (32b)$$

A súrlódóerő tagjai

$$\theta_x (\text{súrlódás}) = \frac{sS_{yG}}{GI_\tau} L, \quad \theta_y (\text{súrlódás}) = -\frac{sS_{xG}}{EI_y} \quad (33)$$

szögelfordulási módosítást okoznak a $0 < \tau \leq T_*/2$ időintervallumban, a következő félperiódusban ellentétes hatást kifejtve.

A többi terhelési esetről is hasonlóan járhatunk el.

A testek közötti érintkezési kopási feladatokkal a végeselem-módszer felhasználásával, inhomogén testeknél a Páczelt et al. (2020) alatti munka foglalkozik részletesen változó terhelés esetén.

3.3. Tételezzük fel, hogy az $F_0^+(\tau)$ erőn kívül az $F_0^-(\tau)$ szintén mozog a C_l^- -től, a C_r^- pontig (lásd 5. ábra). Az erő pozíciója a következő egyenlettel jellemzett

$$\xi^- = \xi^-(\tau) = \xi_0^- f_\xi^-(\tau), \quad (34)$$

ahol $\tilde{\xi} = \xi_0^+ / \xi_0^- = x_0^+ / x_0^-$, $\tilde{\xi} = \xi_0^- / \xi_0^+ = x_0^- / x_0^+$

$$f_\xi^-(\tau) = 1 - \frac{2}{T_*} (1 - \tilde{\xi}) \tau \quad \text{if } 0 \leq \tau \leq T_*/2, \text{ és}$$

A $T_*/2 \leq \tau \leq T_*$ intervallumban pedig

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{[F_0^-(\tau) - F_0^+(\tau)]y_0L}{GI_T} + \frac{LF_Q h_z \theta_x}{GI_T} = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} x_Q \eta L \left[3 - \frac{4\tau}{T_*} \right] B_x = {}^2a_{\theta_x} + {}^2b_{\theta_x} \tau \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \theta_y = \theta_y(\tau) &= \frac{[-F_0^-(\tau)(x_Q - x_0^-(\tau)) + F_0^+(\tau)(x_0^+(\tau) - x_Q)]L}{EI_y} + \frac{LF_Q h_z \theta_y}{EI_y} \\ &= \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left[f^-(\tau)(\xi_0^- f_\xi^-(\tau) - 1) + f^+(\tau)(\xi_0^+ f_\xi^+(\tau) - 1) \right] B_y \\ &= \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left\{ \left(2 - \frac{2}{T_*} \tau \right) \left[\xi_0^- (-1 + 2\tilde{\xi} + \frac{2}{T_*} (1 - \tilde{\xi}) \tau) - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{2}{T_*} \tau \right) \left[\xi_0^+ (2\tilde{\xi} - 1 + \frac{2\tau}{T_*} (1 - \tilde{\xi})) - 1 \right] \right\} B_y \\ &= {}^{2s}a_{\theta_y} + {}^{2s}b_{\theta_y} \tau + {}^{2s}c_{\theta_y} \tau^2 \end{aligned} \quad (39)$$

3.4. Az $F_0^-(\tau)$ és az $F_0^+(\tau)$ az y tengellyel párhuzamos irányban mozognak, lásd a 6. ábrát

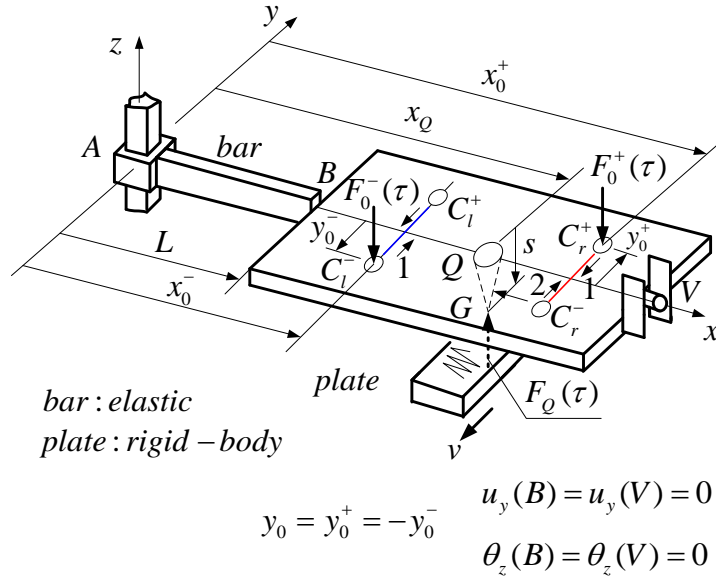
Ekkor a szögelfordulások

$$\begin{aligned} \theta_x = \theta_x(\tau) &= \frac{[F_0^-(\tau)y_0(\tau) - F_0^+(\tau)y_0(\tau)]L}{GI_T} + \frac{LF_Q h_z \theta_x}{GI_T} \\ &= \frac{F_{0,\max}}{GI_T} y_0 \{ f^-(\tau)f_\eta^-(\tau) - f^+(\tau)f_\eta^+(\tau) \} LB_x \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \theta_y = \theta_y(\tau) &= \frac{[-F_0^-(\tau)(x_Q - x_0^-(\tau)) + F_0^+(\tau)(x_0^+(\tau) - x_Q)]L}{EI_y} + \frac{LF_Q h_z \theta_y}{EI_y} \\ &= \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left[f^-(\tau)(\xi_0^- - 1) + f^+(\tau)(\xi_0^+ - 1) \right] B_y \end{aligned} \quad (41)$$

ahol

$$\begin{aligned} f_\eta(\tau) = f_\eta^-(\tau) = f_\eta^+(\tau) &= \left(1 - \frac{4}{T_*} \tau \right), \quad f^-(\tau) = \frac{2}{T_*} \tau, \quad f^+(\tau) = 1 - \frac{2}{T_*} \tau, \quad \text{if } 0 \leq \tau \leq T_*/2 \\ f_\eta(\tau) = f_\eta^-(\tau) = f_\eta^+(\tau) &= \left(-3 + \frac{4}{T_*} \tau \right), \quad f^-(\tau) = 2 - \frac{2}{T_*} \tau, \quad f^+(\tau) = -1 + \frac{2}{T_*} \tau, \quad \text{if } T_*/2 \leq \tau \leq T_* \end{aligned} \quad (42)$$



6. ábra. A rugalmas tartó-merev lemez alkotta rendszerrel a G pontban fellépő elmozdulást és szögelfordulást fogjuk szabályozni, ha az $F_0^-(\tau)$ a kék vonal mentén, míg az $F_0^+(\tau)$ a vörös vonal mentén mozog az y tengellyel párhuzamosan

A csap G pontjának mozgási görbéjét (nyomát) az alsó lemezen, ami v_0 sebességgel mozog $-y$ irányban, könnyű meghatározni. Ismerve a $-s\theta_y(\tau)$, $s\theta_x(\tau)$ koordinátákat, a mozgási görbe koordinátái:

$$-s\theta_y(\tau), s\theta_x(\tau) + v_0\tau. \quad (43)$$

4. Példák

Az alábbi geometriai adatokat felvéve (a tartóhenger, átmérője d)

$$d = 12, L = 200, x_0^- = 380, x_Q = 400, x_0^+ = 420, y_0 = 20, s = 25 \text{ mm}$$

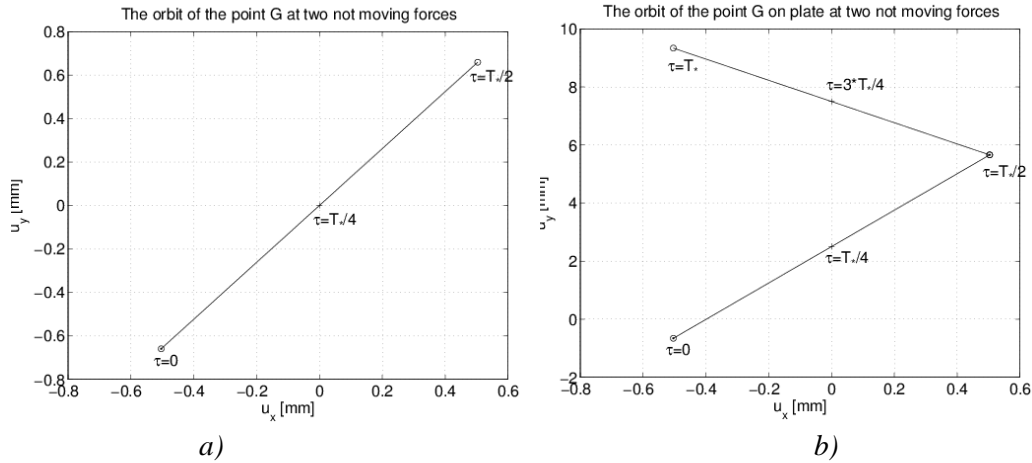
Az anyagállandók legyenek: Young-modul $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, Poisson-állandó $\nu = 0,3$, súrlódási tényező $\mu = 0,4$, a terhelés maximuma $F_{0,\max} = 1 \text{ kN}$. A terhelés és az erő mozgásának periódusideje $T_* = 2 \text{ s}$.

4.1. Terhelési variáns 3.1.3.

Ebben az esetben a G elmozdulása egy lineáris függvény (lásd 7. ábra). Az első iterációs lépésben a súrlódóerő: $\mathbf{S}_G = S_{xG} \mathbf{e}_x + S_{yG} \mathbf{e}_y = 399,91 \mathbf{e}_x - 8,31 \mathbf{e}_y$

$$(27)\text{-ben a módosulandó (aláhúzott tagok) } \theta_x^{+*} = \theta_x(0) = -\frac{F_{0,\max}}{GI_T} y_0 LB_x + \frac{sS_{yG}}{GI_T} L,$$

$$\theta_y^{+*} = \theta_y(0) = \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L (\xi_0^+ - 1) B_y - \frac{sS_{xG}}{EI_y} \text{ igen kicsinyek, azaz elhanyagolhatók.}$$

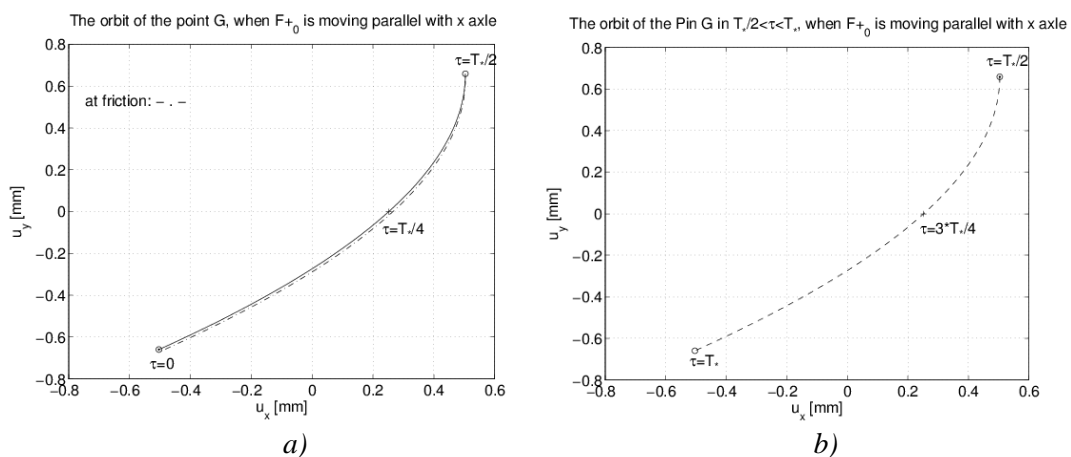


7. ábra. A G pont elmozdulása az x,y síkban két nem mozgó terhelésnél,
a) az alsó síklemez áll, b) az alsó síklemez mozog

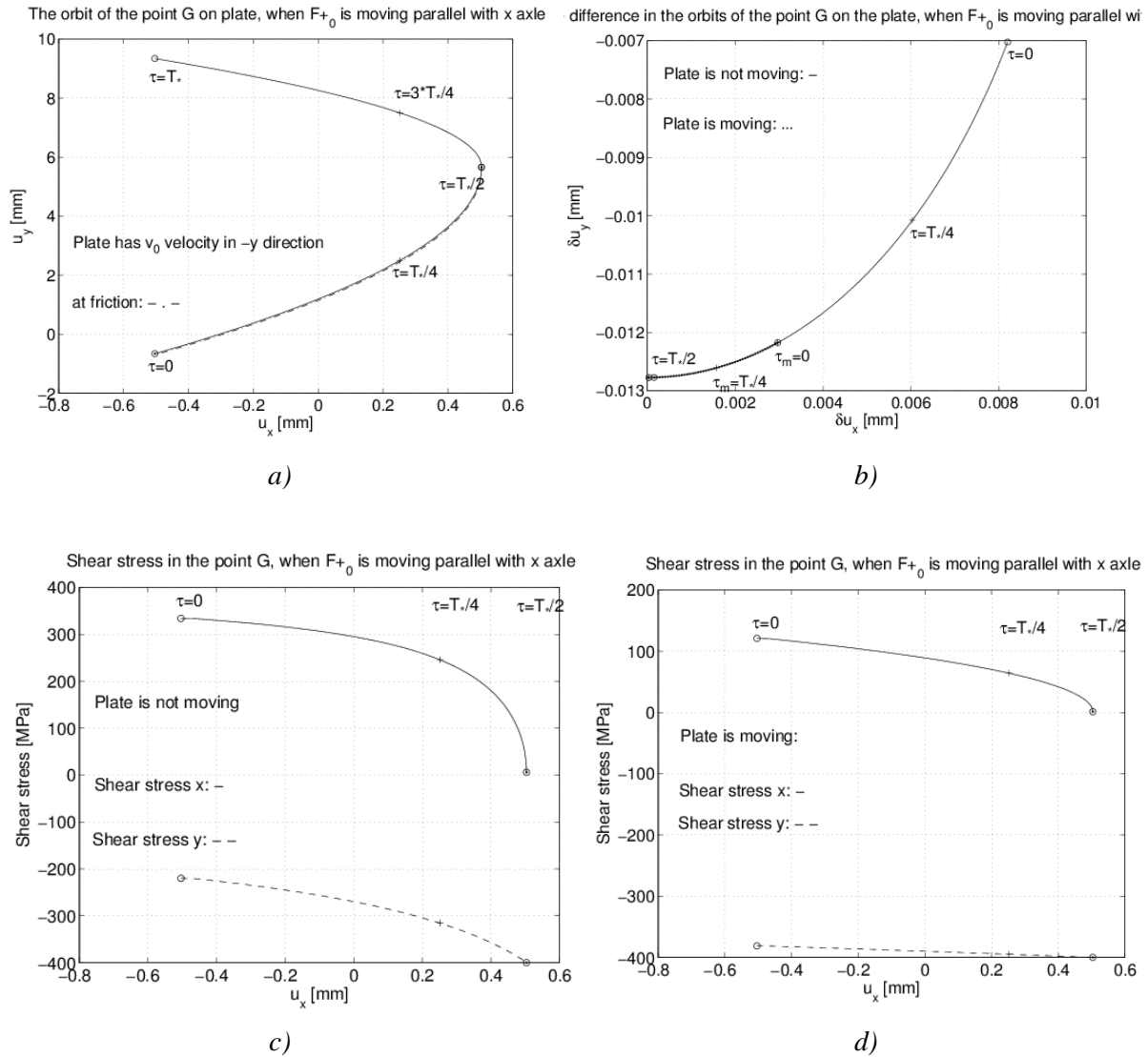
4.2. Terhelési variáns 3.2

Csak az $F_0^+(\tau)$ erő mozog az x -al párhuzamosan. A G pályája egy parabola (lásd 8. ábra). Természetesen a görbe azonos mindkét félperiódusban ($C_r^+ \rightarrow C_l^+$), ($C_l^+ \rightarrow C_r^+$)

Az alsó test $-y$ irányú mozgata jelentősen befolyásolja a súrlódóerők értékét, és ezzel a kialakuló G pályagörbéjét. Ezt jól mutatják a súrlódóerők 9c), d) ábrái. Látható, hogy a mozgó alsó testnél az $S_y \approx \mu F_Q = 400 \text{ MPa}$. Külön figyelmet szenteltünk a pályagörbe alakjának meghatározására súrlódás nélküli és súrlódásos esetben, feltételezve, hogy az alsó test nem mozog. A 8a) és 9a) ábrákon a szaggatott görbe a súrlódás hatását mutatja. Látható a súrlódás nélküli és a súrlódásos eset görbéi nagyon közel vannak egymáshoz. Azt is megvizsgáltuk, mi van akkor, ha az alsó test is mozog. Ekkor az elmozdulásokban maximum 10 mikron alatti eltéréseket tapasztalunk (9b) ábra).



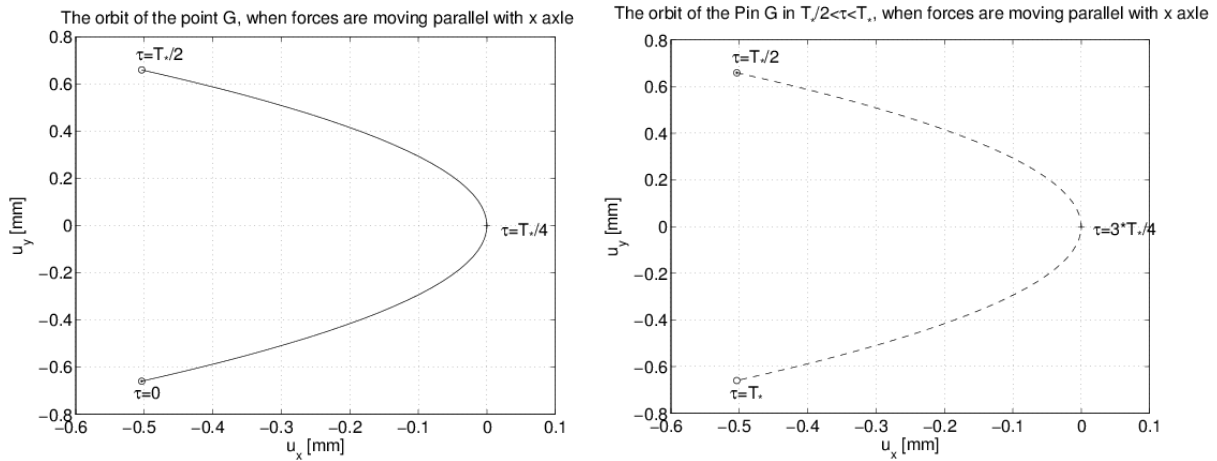
8. ábra. A G pályája az x,y síkban az x -szel párhuzamosan mozgó $F_0^+(\tau)$ erő esetén



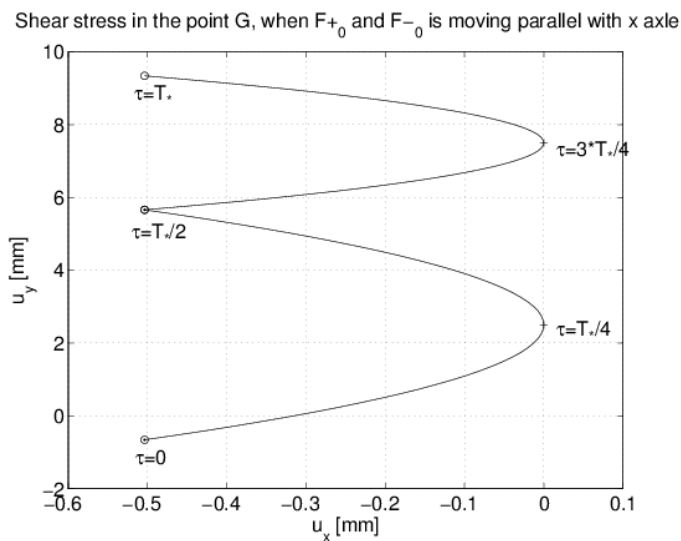
9. ábra. A G pályagörbéje és a súrlódóerők az x-szel párhuzamosan mozgó F_0^+ (τ) erő hatásaként, a) pályagörbe mozgó alsó síklemez esetén, b) a pályagörbék különbsége súrlódás nélküli ill. a súrlódás figyelembevételkor, c) a súrlódóerők álló alsó lemeznél, d) mozgó alsó lemeznél

4.3. Terhelési variáns 3.3.

Az $F_0^-(\tau)$ és $F_0^+(\tau)$ erők az x-el párhuzamosan mozognak az 5. ábra szerint. Az $F_0^-(\tau)$ erő a C_1^- pontból a C_r^- pontba mozog, míg a $F_0^+(\tau)$ a C_r^+ -ből a C_1^+ -be mozdul el a $0 \leq \tau \leq T_*/2$ időintervallum során. A második félperiódusban a terhelőerők visszatérnek az eredeti kiindulási helyükre, azaz a C_1^- és C_r^+ pontokba. A G pont pályája szimmetrikus parabola, lásd 10. ábra. Mozgó alsó testnél a 11. ábra mutatja a G pont pályáját.



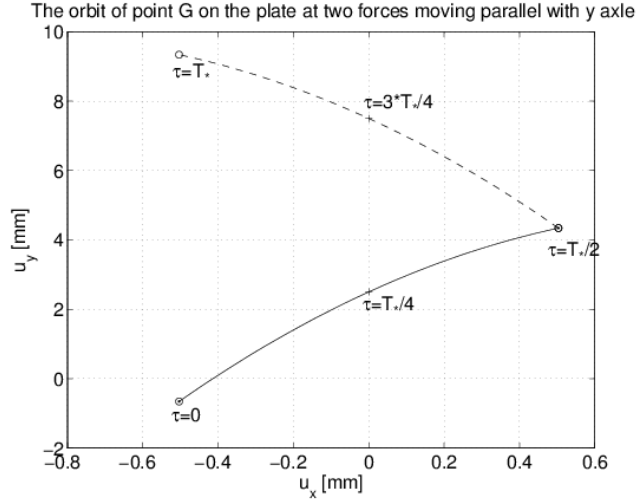
10. ábra. A G pont pályája az x, y síkban a mozgó $F_0^+(\tau)$ és $F_0^-(\tau)$ x tengellyel párhuzamosan mozgó terhelő erők hatására



11. ábra. A G pályája a mozgó alsó síklemezen a 6. ábra szerint az x tengellyel párhuzamosan mozgó $F_0^-(\tau)$ és $F_0^+(\tau)$ terhelések hatására

4.4. Terhelési variáns 3.4.

A terhelőerők az y tengellyel párhuzamosan mozognak (lásd 6. ábra). Az $F_0^-(\tau)$ erő a C_i^- -ből indul el C_i^+ pontba, míg az $F_0^+(\tau)$ erő a C_r^- -ből a C_i^+ -be mozdul el. A mozgó alsó síkon a pályagörbét a 12. ábra mutatja.



12. ábra. A G pályája a mozgó alsó síklemezen az $F_0^-(\tau)$ és $F_0^+(\tau)$ y tengellyel párhuzamosan mozgó terhelések (lásd 6. ábra) hatására

4.5. Megjegyzések

A fenti tárgyalást más típusú erő és mozgási időfüggvények esetére is kiterjeszthetjük. Például

$$F_0^- = F_0^-(\tau) = F_{0,\max} \left[\sin\left(\frac{\pi}{T_*} \tau\right) \right]^2 = F_{0,\max} f^-(\tau), \quad F_0^+ = F_0^+(\tau) = F_{0,\max} \left[\cos\left(\frac{\pi}{T_*} \tau\right) \right]^2 = F_{0,\max} f^+(\tau) \quad (44)$$

Az x irányú mozgásnál az alábbi trigonometrikus függvényt használjuk

$$\xi^- = \xi^-(\tau) = 1 - 0.5(\xi_0^+ - \xi_0^-) \cos\left(k \frac{2\pi}{T_*} \tau\right), \quad \xi^+ = \xi^+(\tau) = 1 + 0.5(\xi_0^+ - \xi_0^-) \cos\left(k \frac{2\pi}{T_*} \tau\right) \quad (45)$$

vagy y irányú mozgásnál

$$y_0(\tau) = y_0^+ \cos\left(k \frac{2\pi}{T_*} \tau\right), \quad k=1,2,\dots \quad (46)$$

Abban az esetben, ha a terhelés csak x irányban mozog, akkor a módosító tagokkal

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{[F_0^-(\tau) - F_0^+(\tau)] y_0^+ L}{GI_T} + \frac{LF_Q h_z \theta_x}{GI_T} = \frac{F_{0,\max}}{GI_T} y_0^+ L \left\{ \left(\sin \frac{\pi}{T_*} \tau \right)^2 - \left(\cos \frac{\pi}{T_*} \tau \right)^2 \right\} B_x \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \theta_y = \theta_y(\tau) &= \frac{[-F_0^-(\tau)(x_Q - x_0^-(\tau)) + F_0^+(\tau)(x_0^+(\tau) - x_Q)] L}{EI_y} + \frac{LF_Q h_z \theta_y}{EI_y} \\ &= \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left[f^-(\tau)(\xi^-(\tau) - 1) + f^+(\tau)(\xi^+(\tau) - 1) \right] B_y \end{aligned} \quad (48)$$

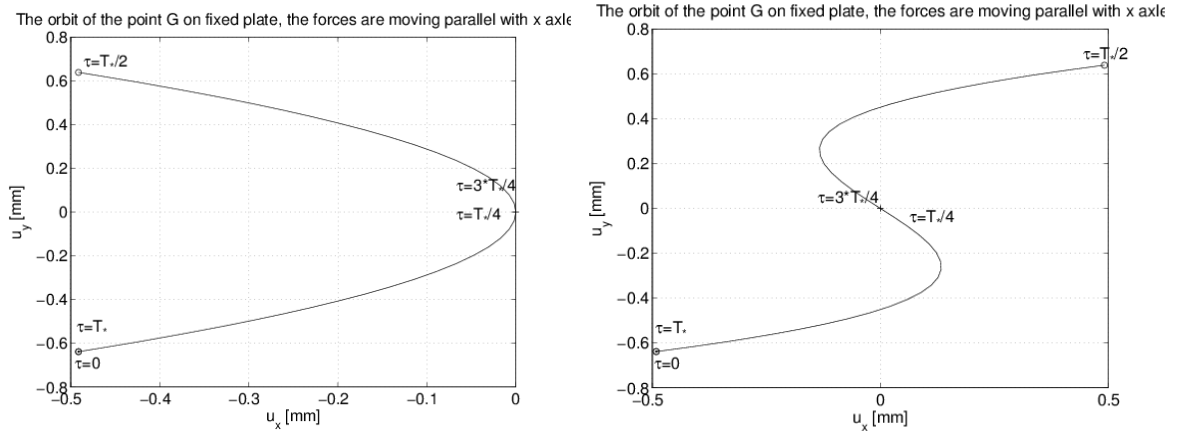
Ha a terhelés y irányú mozgással is rendelkezik, akkor a szögelfordulások

$$\begin{aligned}\theta_x = \theta_x(\tau) &= \frac{\left[F_0^-(\tau)y_0(\tau) - F_0^+(\tau)y_0(\tau) \right] L}{GI_T} + \frac{LF_Q h_z \theta_x}{GI_T} \\ &= \frac{F_{0,\max}}{GI_T} y_0^+ L \left\{ f^-(\tau) - f^+(\tau) \right\} B_x \cos k \frac{2\pi}{T_*} \tau\end{aligned}\quad (49)$$

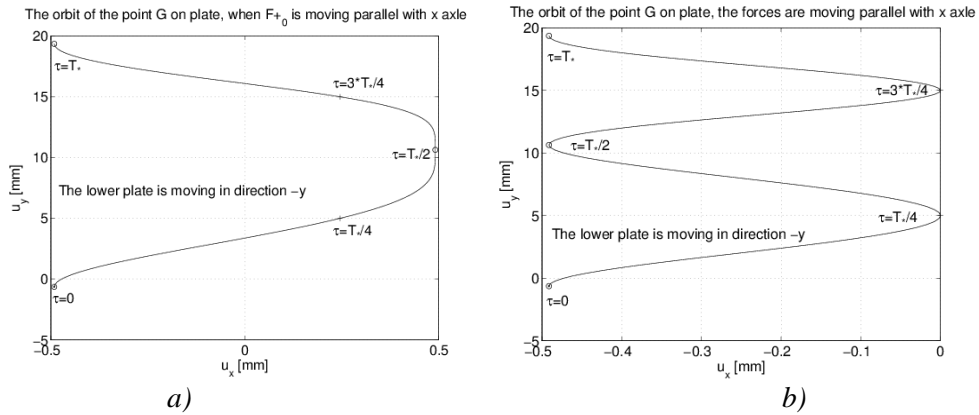
$$\begin{aligned}\theta_y = \theta_y(\tau) &= \frac{\left[-F_0^-(\tau)(x_Q - x_0^-(\tau)) + F_0^+(\tau)(x_0^+(\tau) - x_Q) \right] L}{EI_y} + \frac{LF_Q h_z \theta_y}{EI_y} \\ &= \frac{F_{0,\max}}{EI_y} x_Q L \left[f^-(\tau)(\xi_0^- - 1) + f^+(\tau)(\xi_0^+ - 1) \right] B_y\end{aligned}\quad (50)$$

Ha a súrlódást is figyelembe vesszük (a súrlódóerő fő iránya az y -nal párhuzamos), akkor a (47), (49)-ben a $-\frac{F_{0,\max}}{GI_T} \mu s L$ tagot kell hozzáadni. A súrlódás hatása kicsiny, ha azt összevetjük az eredeti $\mu s / y_0^+$ taggal. A számításainkban $T_* = 4 s$, a többi adat azonos a korábbiakkal (lásd 13. ábra).

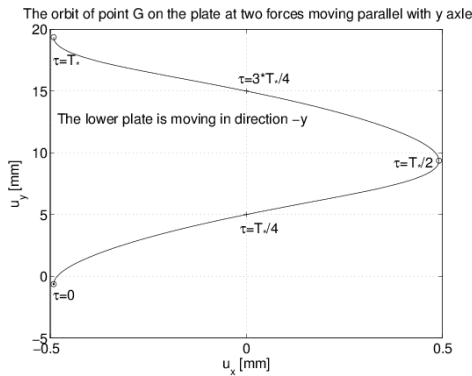
Ha a terhelés és a mozgási időfüggvények különböznek, akkor a pályagörbe egészen más lesz (lásd 14. és 15. ábra). A 14a) ábrán az $F_0^-(\tau)$ erő fix helyen van, az $F_0^+(\tau)$ az x tengellyel párhuzamosan mozog, illetve a 14b) ábrán mindkét erő az x mentén elmozdul, az elmozdulást jellemző trigonometrikus függvényben $k = 1$. A 15. ábrán az erők y -nal mozognak párhuzamosan, $k = 1$, míg a 17. ábra $k = 2$ höz tartozó eredményeket mutatja be. A 16. ábra a 14. ábrától abban különbözik, hogy itt $k = 2$.



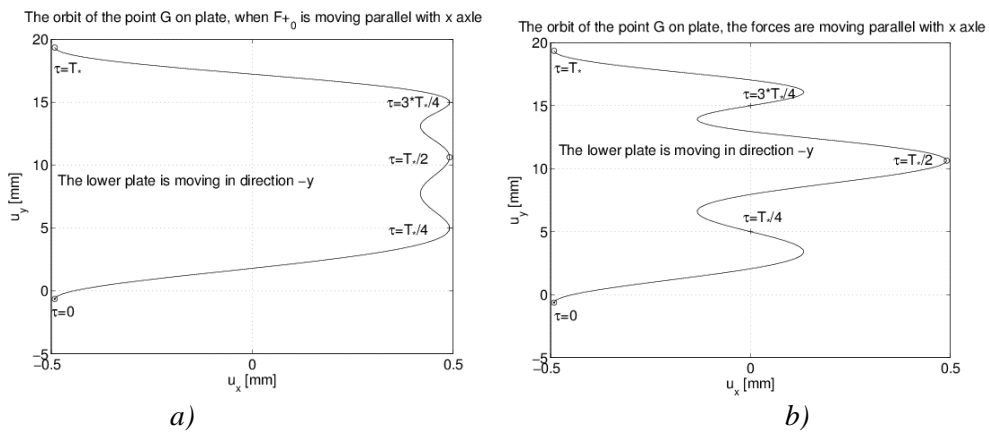
13. ábra. A G pályája a fix alsó síklemezen, ha az $F_0^-(\tau)$ és $F_0^+(\tau)$ az x tengellyel párhuzamosan mozog, a) $k = 1$, b) $k = 2$



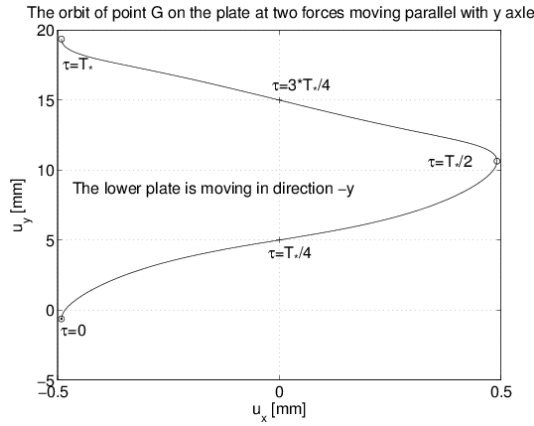
14. ábra. A G pályája a mozgó alsó síklemezen, ha az $F_0^-(\tau)$ és $F_0^+(\tau)$ az x tengellyel párhuzamosan mozog, $k = 1$, a) $\xi^- = \xi^-(\tau) = \xi_0^-$, $\xi^+ = \xi^+(\tau)$, b) $\xi^- = \xi^-(\tau)$, $\xi^+ = \xi^+(\tau)$



15. ábra. A G pályája a mozgó alsó síklemezen, ha az $F_0^-(\tau)$ és $F_0^+(\tau)$ az y tengellyel párhuzamosan mozog, $k = 1$



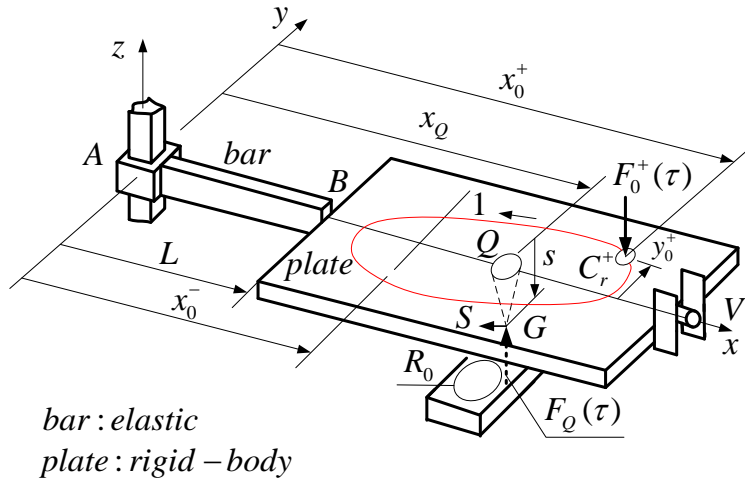
16. ábra. A G pályája a mozgó alsó síklemezen, ha az $F_0^-(\tau)$ és $F_0^+(\tau)$ az x tengellyel párhuzamosan mozog, $k = 2$, a) $\xi^- = \xi^-(\tau) = \xi_0^-$, $\xi^+ = \xi^+(\tau)$, b) $\xi^- = \xi^-(\tau)$, $\xi^+ = \xi^+(\tau)$



17. ábra. A G pályája a mozgó alsó síklemezen, ha az $F_0^-(\tau)$ és $F_0^+(\tau)$ az y tengellyel párhuzamosan mozog, $k = 2$

4.6. Egy újabb probléma

Határozzuk meg az $F_0^+(\tau) = F_{0,max}$ időben állandó erő pozícióit, ahhoz, hogy a G pontunk egy R_0 sugarú kört írjon le, (lásd 18. ábra).



$$y_0 = y_0^+ \quad u_y(B) = u_y(V) = 0$$

$$\theta_z(B) = \theta_z(V) = 0$$

18. ábra. Módosított szerkezet (A V helyen lévő megtámasztás megakadályozza a merev lemez z körüli szögelfordulását, és y irányú eltolódását)

Mivel a G beli eltolódás x,y irányban a szögelfordulásból számolható: $(-s\theta_y(\tau), s\theta_x(\tau))$, ezért a kör sugara

$$(R_0)^2 = s^2(\theta_x^2 + \theta_y^2). \tag{51}$$

4.6.1. Súrlódásmentes eset

Felhasználva a szögelfordulásokra levezetett összefüggéseket (súrlódóerőt elhanyagolva) írhatjuk, hogy

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{-F_0^+(\tau)y_0^+L}{GI_T} + \frac{LF_Qh_z\theta_x}{GI_T} = -\frac{F_{0,\max}}{GI_T}Ly_0(\tau)B_x \quad (52)$$

$$\theta_y = \theta_y(\tau) = \frac{F_{0,\max}^+(x_0^+(\tau) - x_Q)L}{EI_y} + \frac{LF_Qh_z\theta_y}{EI_y} = F_{0,\max}^+ \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau)B_y \quad (53)$$

ami alapján egy ellipszis egyenlete írható fel az $F_0^+(\tau)$ erő támadáspontját illetően

$$\left(\frac{R_0}{sF_{0,\max}} \right)^2 = \tilde{R}_0^2 = Ay_0^{+2}(\tau) + B\tilde{x}^2(\tau) \quad (54)$$

ahol $A = \left(\frac{L}{GI_T} B_x \right)^2$, $B = \left(\frac{L}{EI_y} B_y \right)^2$

Általunk felvett mennyiségek (R_0 , $F_{0,\max}$) és a szerkezet geometriai, anyagállandók esetén

$$y_0^{+2}(\tau) = \left[\tilde{R}_0^2 - B\tilde{x}^2(\tau) \right] / A \quad (55)$$

egyenletből az $\tilde{x}_0(\tau) = x_0^+(\tau) - x_Q$ távolságra való tekintettel az $y_0^+(\tau)$ számolható.

Feltételezve, hogy az $F_0^+(\tau)$ erő az $x_0^+ = 420 \text{ mm}$, $y_0^+ = 20 \text{ mm}$ ponton is hat, akkor $F_0^+(\tau) = 1000 \text{ N}$ erőnél az (55)-ből számolható G pont pályájának sugara $R_0 = 0,83 \text{ mm}$ -re adódik. Változtatva az erő helyzetét az (55)-ből $y_0^+(0) = 0$ mellett a kiindulási x koordináta $x_0^+(0) = 432,96 \text{ mm}$ -re adódik.

Az $F_0^+(\tau) = 1000 \text{ N}$ erő támadáspontja ellipszisen helyezkedik el. Az ellipszis középpontja $(400,0)$ helyen van, nagyobbik féltengelye $R_x = 32,96 \text{ mm}$, a kisebbik féltengelye $R_y = 25,16 \text{ mm}$ értékkel rendelkezik. A továbbiakban y_0^+ helyett y_0 -t fogunk írni.

4.6.2. A súrlódás hatása

A G pont pályája, a csaphoz kötött helyi koordináta-rendszerben az alábbi egyenlettel jellemzett

$$\mathbf{r}_G = x_G \mathbf{e}_x + y_G \mathbf{e}_y, \text{ ahol } x_G = -s\theta_y, y_G = s\theta_x$$

A súrlódóerő $\mathbf{S} = S_x \mathbf{e}_x + S_y \mathbf{e}_y$. Mivel az $F_0^+(\tau)$ erő a pályáján óramutató járásával ellentétes irányban halad, a G pont is hasonlóan ezen irányban végzi R_0 sugarú pályáján mozgását. E miatt

$$S_x = S \sin \beta, S_y = -S \cos \beta, S = \mu F_{0,\max}, \quad \tan \beta = \frac{y_G}{x_G}, \sin \beta = \frac{y_G}{R_0}, \cos \beta = \frac{x_G}{R_0}$$

A fellépő x tengely körüli szögelfordulás

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = -\frac{F_{0,\max}}{GI_T} Ly_0(\tau)B_x + sS_y \frac{L}{GI_T} = -\frac{F_{0,\max}}{GI_T} Ly_0(\tau)B_x - s\mu F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} \cos \beta$$

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = -\frac{F_{0,\max}}{GI_T} Ly_0(\tau)B_x - s\mu F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} \frac{x_G}{R_0} = -\frac{F_{0,\max}}{GI_T} Ly_0(\tau)B_x - s\mu F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} \frac{-s\theta_y}{R_0}$$

továbbá az y körüli szögelfordulás

$$\begin{aligned} \theta_y = \theta_y(\tau) &= \frac{F_{0,\max}(x_0^+(\tau) - x_Q)L}{EI_y} + \frac{LF_Q h_z \theta_y}{EI_y} - \frac{L}{EI_y} sS_x \\ &= F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau)B_y - \frac{L}{EI_y} sS_x = F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau)B_y - \frac{L}{EI_y} s\mu F_{0,\max} \sin \beta \end{aligned}$$

$$\theta_y = \theta_y(\tau) = F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau)B_y - \frac{L}{EI_y} s\mu F_{0,\max} \frac{s\theta_x}{R_0}$$

összefüggésekkel számolható. Mivel a szögelfordulások összefüggései kölcsönhatásban vannak egymással, ezért átalakítások hajthatók végre

$$\begin{aligned} \theta_x = \theta_x(\tau) &= -F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} (y_0(\tau)B_x - \frac{s^2\mu}{R_0} \left\langle F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} (\tilde{x}_0(\tau)B_y - \frac{s^2\mu}{R_0} \theta_x) \right\rangle) \\ &= -F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} \left\{ y_0(\tau)B_x - \frac{s^2\mu}{R_0} F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} (\tilde{x}_0(\tau)B_y - \left(\frac{s^2\mu}{R_0} \right) \theta_x) \right\} \\ &= -F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} \left\{ (y_0(\tau)B_x - \frac{s^2\mu}{R_0} F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau)B_y) + \left\langle F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \left(\frac{s^2\mu}{R_0} \right)^2 \theta_x \right\rangle \right\} \quad (56) \\ &= -F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} (y_0(\tau)B_x - \frac{s^2\mu}{R_0} F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau)B_y) - F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} \left\{ \left\langle F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \left(\frac{s^2\mu}{R_0} \right)^2 \theta_x \right\rangle \right\} \\ &\theta_x \left\{ 1 + \frac{L}{GI_T} F_{0,\max}^2 \frac{L}{EI_y} \left(\frac{s^2\mu}{R_0} \right)^2 \right\} = -F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} (y_0(\tau)B_x - \frac{s^2\mu}{R_0} F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau)B_y) \end{aligned}$$

Hasonlóan eljárva

$$\begin{aligned} \theta_y = \theta_y(\tau) &= \frac{F_{0,\max}(x_0^+(\tau) - x_Q)L}{EI_y} = F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau)B_y - \frac{L}{EI_y} sS_x \\ &= F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau)B_y - \frac{L}{EI_y} s\mu F_{0,\max} \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_y &= \theta_y(\tau) = F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau) B_y - \frac{L}{EI_y} s\mu F_{0,\max} \frac{y_G}{R_0} = F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau) B_y - \frac{L}{EI_y} s\mu F_{0,\max} \frac{s\theta_x}{R_0} \\
\theta_x &= \theta_x(\tau) = -\frac{F_{0,\max}}{GI_T} Ly_0(\tau) B_x - s\mu F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} \frac{x_G}{R_0} = -\frac{F_{0,\max}}{GI_T} Ly_0(\tau) B_x - s\mu F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} \frac{-s\theta_y}{R_0} \\
\theta_y &= \theta_y(\tau) = F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \left(\tilde{x}_0(\tau) B_y - \frac{s^2\mu}{R_0} \left[-\frac{F_{0,\max}}{GI_T} Ly_0(\tau) B_x - s\mu F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} \frac{-s\theta_y}{R_0} \right] \right) \\
&= F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \left(\tilde{x}_0(\tau) B_y + \frac{s^2\mu}{R_0} \frac{F_{0,\max}}{GI_T} Ly_0(\tau) B_x \right) - F_{0,\max}^2 \frac{L}{EI_y} \left(\frac{s^2\mu}{R_0} \right)^2 \frac{L}{GI_T} \theta_y \\
\theta_y &\left\{ 1 + F_{0,\max}^2 \frac{L}{EI_y} \left(\frac{s^2\mu}{R_0} \right)^2 \frac{L}{GI_T} \right\} = F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \left(\tilde{x}_0(\tau) B_y + \frac{s^2\mu}{R_0} \frac{F_{0,\max}}{GI_T} Ly_0(\tau) B_x \right)
\end{aligned} \tag{57}$$

Ezek az egyenletek a G pontban fellépő súrlódás hatását veszik figyelembe. Mivel a súrlódás befolyásolja az elmozdulásokat, ezért a G nyoma az alsó síkon változni fog. Az új pozíciókat az alábbi egyenletek fogják szolgáltatni:

A szögelfordulásra vonatkozók

$$\begin{aligned}
\theta_x &\left\{ 1 + \frac{L}{GI_T} F_{0,\max}^2 \frac{L}{EI_y} \left(\frac{s^2\mu}{R_0} \right)^2 \right\} = -F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} (y_0(\tau) B_x - \frac{s^2\mu}{R_0} F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau) B_y) \\
&= -F_{0,\max} \frac{L}{GI_T} y_0(\tau) B_x + \frac{L}{GI_T} \frac{s^2\mu}{R_0} F_{0,\max}^2 \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau) B_y
\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
\theta_y &\left\{ 1 + F_{0,\max}^2 \frac{L}{EI_y} \left(\frac{s^2\mu}{R_0} \right)^2 \frac{L}{GI_T} \right\} = F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \left(\tilde{x}_0(\tau) B_y + \frac{s^2\mu}{R_0} \frac{F_{0,\max}}{GI_T} Ly_0(\tau) B_x \right) \\
&= F_{0,\max}^2 \frac{L}{EI_y} \frac{s^2\mu}{R_0} \frac{L}{GI_T} y_0(\tau) B_x + F_{0,\max} \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau) B_y
\end{aligned} \tag{59}$$

Bevezetve az alábbi jelölést

$$QQ = \left\{ 1 + \frac{L}{GI_T} F_{0,\max}^2 \frac{L}{EI_y} \left(\frac{s^2\mu}{R_0} \right)^2 \right\} \tag{60}$$

a szögelfordulások tömören

$$\begin{aligned}
s\theta_x &= -F_{0,\max} \frac{s}{QQ} \frac{L}{GI_T} y_0(\tau) B_x + F_{0,\max}^2 \frac{s}{QQ} \frac{s^2\mu}{R_0} \frac{L}{EI_y} \frac{L}{GI_T} \tilde{x}_0(\tau) B_y = A_{11} y_0(\tau) + A_{12} \tilde{x}_0(\tau) \\
s\theta_y &= F_{0,\max}^2 \frac{s}{QQ} \frac{s^2\mu}{R_0} \frac{L}{EI_y} \frac{L}{GI_T} y_0(\tau) B_x + F_{0,\max} \frac{s}{QQ} \frac{L}{EI_y} \tilde{x}_0(\tau) B_y = A_{21} y_0(\tau) + A_{22} \tilde{x}_0(\tau)
\end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned}(s\theta_x)^2 &= [A_{11}y_0(\tau) + A_{12}\tilde{x}_0(\tau)]^2 = A_{11}^2y_0^2(\tau) + 2A_{11}A_{12}y_0(\tau)\tilde{x}_0(\tau) + A_{12}^2\tilde{x}_0^2(\tau) \\ (s\theta_y)^2 &= [A_{21}y_0(\tau) + A_{22}\tilde{x}_0(\tau)]^2 = A_{21}^2y_0^2(\tau) + 2A_{21}A_{22}y_0(\tau)\tilde{x}_0(\tau) + A_{22}^2\tilde{x}_0^2(\tau)\end{aligned}\quad (61)$$

alakokat nyerik.

Ezekből egy másodrendű egyenlet adódik az $F_0^+(\tau)$ erő y irányú támadáspontjának koordinátáját meghatározandó adott R_0 -hoz tartozóan az $\tilde{x}_0(\tau)$ értékét megválasztva.

$$R_0^2 = (s\theta_x)^2 + (s\theta_y)^2 = (A_{11}^2 + A_{21}^2)y_0^2(\tau) + 2(A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22})\tilde{x}_0(\tau)y_0(\tau) + (A_{12}^2 + A_{22}^2)\tilde{x}_0^2(\tau)\quad (62)$$

$$ay_0^2(\tau) + by_0(\tau) + c = 0$$

ahol $a = (A_{11}^2 + A_{21}^2)$, $b = 2(A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22})\tilde{x}_0(\tau)$, $c = (A_{12}^2 + A_{22}^2)\tilde{x}_0^2(\tau) - R_0^2$

Az $F_0^+(\tau)$ erő támadáspontjának görbéje természetesen különbözni fog a súrlódásmentes esetben kapottól.

Az $\tilde{x}_{00} = \tilde{x}_0(0)$ kezdeti értéke a következő egyenletből nyerhető, mivel $y_{00} = y_0(0) = 0$

$$(s\theta_x)^2 + (s\theta_y)^2 = (A_{12}^2 + A_{22}^2)\tilde{x}_0^2(0) = R_0^2\quad (63)$$

Kétféle R_0 értéket választunk.

Ha $R_0 = 0,85 \text{ mm}$, akkor $\tilde{x}_{00} = 35,031 \text{ mm}$, ami súrlódás nélkül 32,96 mm-re adódott.

Ha $R_0 = 1,25 \text{ mm}$, akkor $\tilde{x}_{00} = 50,51 \text{ mm}$.

Az ellipszis jelenléte miatt transzformációt hajtunk végre:

$$\tilde{x}_0 = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \quad y_0 = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha\quad (64)$$

Bevezetve

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= (A_{11}^2 + A_{21}^2) / R_0^2, \quad \tilde{b} = 2(A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22}) / R_0^2, \quad \tilde{c} = (A_{12}^2 + A_{22}^2) / R_0^2 \\ \tan 2\alpha &= (c - a) / b\end{aligned}\quad (65)$$

mennyiségeket, a (62) helyett a

$$(\tilde{a} \sin^2 \alpha + 0.5\tilde{b} \sin 2\alpha + \tilde{c} \cos^2 \alpha)\xi^2 + (\tilde{a} \cos^2 \alpha - 0.5\tilde{b} \sin 2\alpha + \tilde{c} \sin^2 \alpha)\eta^2 = 1\quad (66)$$

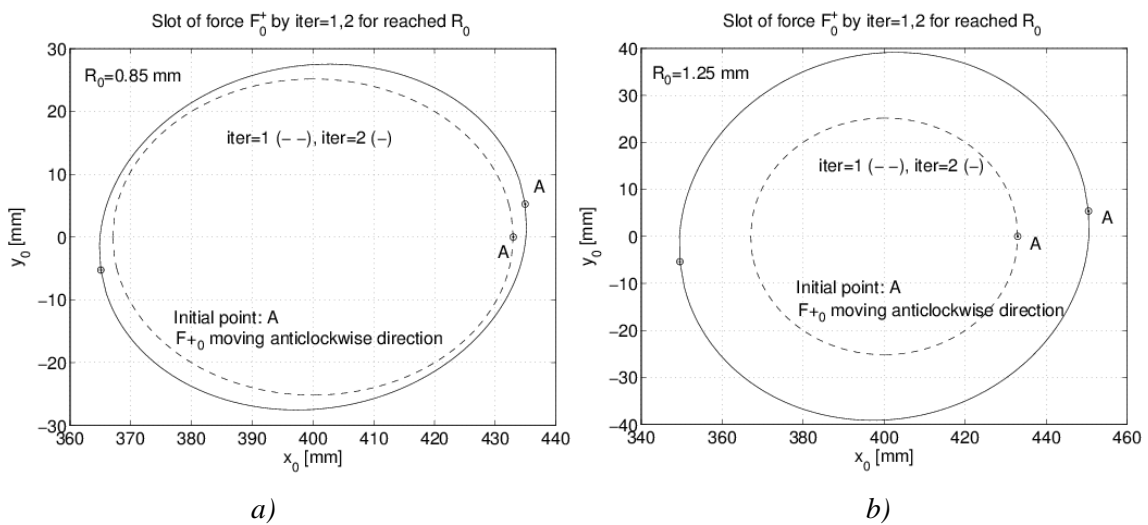
egyenlethez jutunk. Ebből adódóan az ellipszis féltengelye a ξ irányában

$$a_\xi = \sqrt{1 / (\tilde{a} \sin^2 \alpha + 0.5\tilde{b} \sin 2\alpha + \tilde{c} \cos^2 \alpha)}, \text{ míg az } \eta \text{ irányában}$$

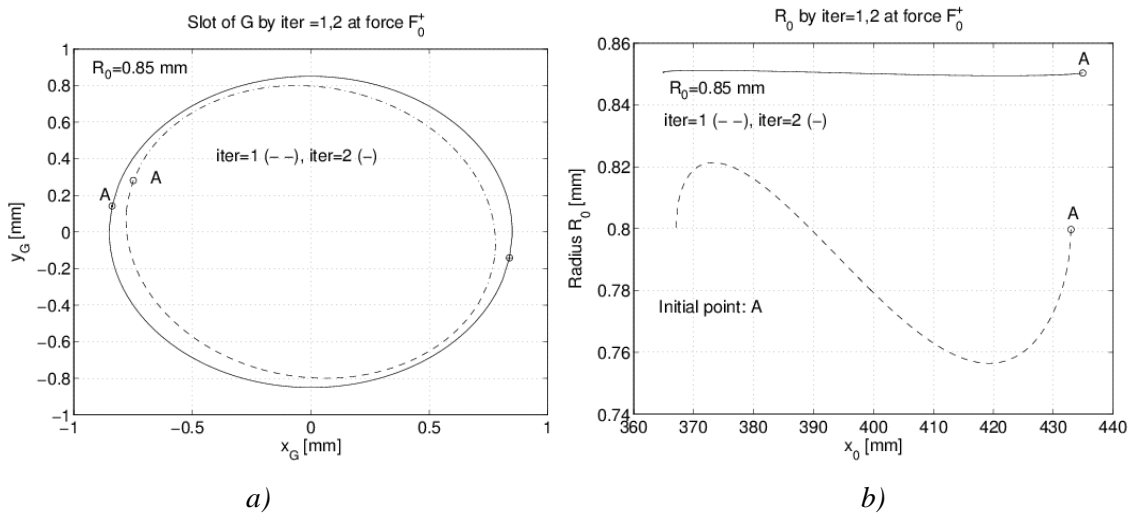
$$b_\eta = \sqrt{1 / (\tilde{a} \cos^2 \alpha - 0.5\tilde{b} \sin 2\alpha + \tilde{c} \sin^2 \alpha)}.$$

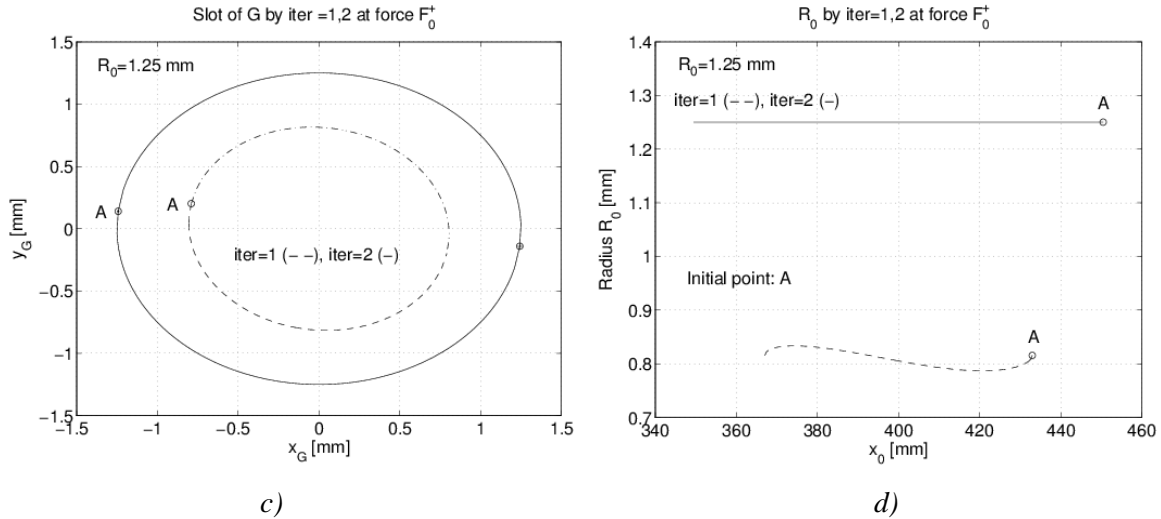
Esetünkben $R_0 = 0,85 \text{ mm}$ -nál $a_\xi = 35,32 \text{ mm}$, $b_\eta = 27,37 \text{ mm}$, a főtengely ξ tengellyel bezárt irányszöge α , ($\sin \alpha = 0,1487$). Ha $R_0 = 1,25 \text{ mm}$, akkor $a_\xi = 50,72 \text{ mm}$, $b_\eta = 38,97 \text{ mm}$, $\sin \alpha = 0,106$.

Az alábbi diagramok a numerikus számítások eredményeit foglalják össze. A 19. ábrán $F_0^+(\tau)$ erő támadáspontjának függvény látható kétfajta megoldásnál. Ha a terhelőerő az (55) szerint megállapított pályán vándorol, függetlenül attól, hogy a súrlódást figyelembe vesszük, avagy nem, akkor a G nyoma nem lesz kör (lásd 20b) ábra). Figyelembe véve a súrlódást a (66) szerinti erő vándorlási pályája esetén, jó közelítéssel elértük az állandó $R_0(\tau)$ sugarat [lásd 20b) ábra (folytonos vonal)].



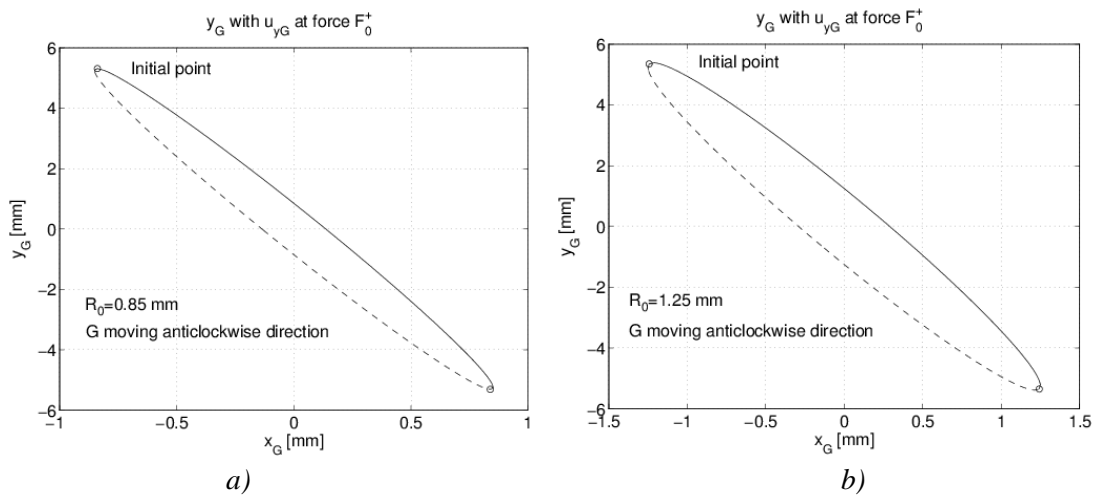
19. ábra. $F_0^+(\tau)$ erő támadáspontjának pályája súrlódás figyelembevételével, ha erő az általunk választott (55) alatti ellipszisen mozog, (1. iteráció) (- - -), ill. a (66) szerinti pályán (2. iteráció) (-), a) $R_0 = 0,85 \text{ mm}$, b) $R_0 = 1,25 \text{ mm}$





20. ábra. A G pályája (55) ill. (66) alapján számolva /első iteráció, ill. a 2. iteráció/: a) és c), a G pályájának sugara iter = 1,2 esetén: b) és d)

Amennyiben a B pontban megengedjük az y irányú elmozdulást (a V-beli megtámasztás nem működik), akkor a súrlódóerő elmozdítja a szerkezetet y irányában $u_y(\tau) = -\mu F_{0,max} \cos \beta \frac{L^3}{3EI_z}$ értékkel, ahol $\cos \beta = \frac{x_G}{R_0} = \frac{-s\theta_y}{R_0}$. Ebből következik, hogy a G pont nyoma az alsó síkon már nem lesz kör, (lásd 21. ábra).



21. ábra. A G pont nyoma, ha a B pontban az y irányú elmozdulás nincs korlátozva, a) $R_0 = 0,85 \text{ mm}$, b) $R_0 = 1,25 \text{ mm}$

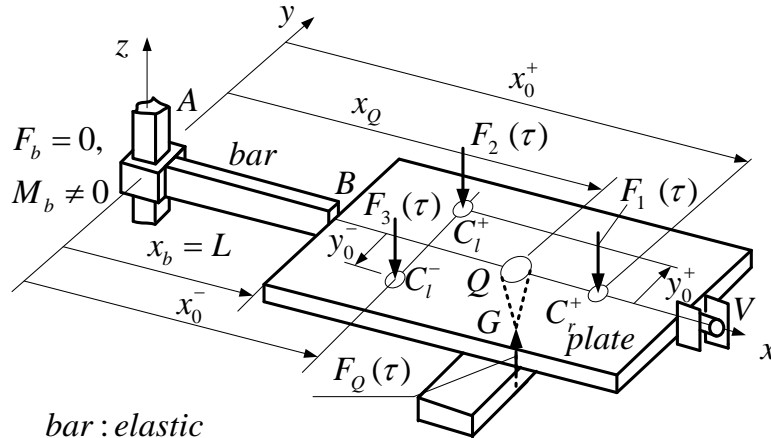
4.7. Három erővel terhelt szerkezet

Kopási kísérletek elvégzésére alkalmas szerkezetet vizsgálunk, amire 3 függőleges irányú erő hat. Az $F_2(\tau), F_3(\tau) \neq 0$ erők a C_l^+ és C_l^- jelű $(x, y) = (x_0^-, -y_0)$ és $(x, y) = (x_0^-, y_0)$ koordinátájú pontokban, míg az $F_1(\tau) \neq 0$ erő a C_r^+ pontban, az $(x, y) = (x_0^+, 0)$ helyen működik (lásd 22. ábra).

Az erők eredője F_Q , ami a G pontban $(x, y) = (x_Q, 0)$ függőlegesen felfelé mutat. Az erőkre vonatkozó ún. szétosztási paraméterek $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ ($\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = 1$) megadják az

$F_{1,0\max} = \tilde{\alpha}F_Q = \text{adott}, F_{2,0\max} = \tilde{\beta}F_Q = \text{adott}, F_{3,0\max} = \tilde{\gamma}F_Q = \text{adott}$ erőket, ahol az egyes erők időbeli megoszlását az $F_{1Q} = F_1(\tau) = f^-(\tau)F_{1,0\max}$,

$F_{23Q} = F_2(\tau) + F_3(\tau) = f^+(\tau)F_{2,0\max} + f^-(\tau)F_{3,0\max} = (\tilde{\beta} + \tilde{\gamma})F_Q = F_{2,0\max} + F_{3,0\max} = \text{adott}$ összefüggések jellemeznék.



bar : elastic

plate : rigid – body

$$y_0 = y_0^+ = y_0^-$$

$$\overline{QG} = h_z$$

$$u_y(V) = \theta_z(V) = 0 \quad \frac{du_y(V)}{dx} = \frac{d\theta_z(V)}{dx} = 0$$

22. ábra. A szerkezet három erővel terhelve (a V helyen lévő megtámasztás megakadályozza a merev lemez z körüli szögelfordulását, és y irányú eltolódását)

Vegyük sorba a szögelfordulásokat

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = \frac{[F_3(\tau) - F_2(\tau)]y_0L}{GI_T} + L \frac{F_Q h_z \theta_x(\tau)}{GI_T} = \frac{[F_3(\tau) - F_2(\tau)]\eta L}{GI_T} x_Q + L \frac{F_Q h_z \theta_x(\tau)}{GI_T} =$$

$$L \frac{F_{3,0\max} f^-(\tau) - F_{2,0\max} f^+(\tau)}{GI_T} \eta x_Q + L \frac{F_Q h_z \theta_x(\tau)}{GI_T} \quad , \quad (67)$$

$$\theta_x = \theta_x(\tau) = L \frac{F_{3,0\max} f^-(\tau) - F_{2,0\max} f^+(\tau)}{GI_T} \eta x_Q B_x$$

ahol $\eta = y_0 / x_Q$.

$$\begin{aligned} \theta_y = \theta_y(\tau) = & \frac{\left[-F_{23Q}(\tau)(x_Q - h_z \theta_y(\tau) - x_0^-) + F_{1Q}(\tau)(x_0^+ - x_Q + h_z \theta_y(\tau)) \right] L}{EI_y} = \\ & \frac{F_Q}{EI_y} x_Q L \left[(\tilde{\beta} + \tilde{\gamma})(\xi_0^- - 1) + \tilde{\alpha}(\xi_0^+ - 1) \right] + L \left(\frac{(\tilde{\beta} + \tilde{\gamma})F_Q}{EI_y} h_z + \tilde{\alpha} \frac{F_Q}{EI_y} h_z \right) \theta_y(\tau) \quad (68) \\ & \frac{F_Q}{EI_y} x_Q L \left[(\tilde{\beta} + \tilde{\gamma})(\xi_0^- - 1) + \tilde{\alpha}(\xi_0^+ - 1) \right] + L \frac{F_Q}{EI_y} h_z \theta_y(\tau) \end{aligned}$$

$$\theta_y = \theta_y(\tau) = \frac{F_Q}{EI_y} x_Q L \left[(\tilde{\beta} + \tilde{\gamma})(\xi_0^- - 1) + \tilde{\alpha}(\xi_0^+ - 1) \right] B_y$$

A súrlódás hatását a 3.2. pont alatt elmondottak szerint vehetjük figyelembe.

Az alábbi terhelési eseteket fogjuk megkülönböztetni:

1. $\tilde{\alpha} = 1, \tilde{\beta} = \tilde{\gamma} = 0$, azaz csak az $F_1 = F_1(\tau)$ erő működik. A szerkezet hajlító mozgást végez
2. $\tilde{\alpha} = 0,5, \tilde{\beta} = 0,25, \tilde{\gamma} = 0,25$, az $F_1 = F_1(\tau) = f^+(\tau)F_{1,0\max}$, $F_2(\tau) = F_3(\tau) = f^-(\tau)F_{2,0\max}$, a G pont az x -szel párhuzamosan periodikus mozgást fog végezni.
3. $\tilde{\alpha} = 0, \tilde{\beta} = \tilde{\gamma} = 0,5$, azaz csak az $F_2 = F_2(\tau)$ és $F_3 = F_3(\tau)$ erők hatnak, a szerkezet csavaró mozgást végez, a G pont az y -al párhuzamosan végez periodikus mozgást.
4. Tetszőleges $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ értékeknél a G pályája tetszőleges síkgörbe lesz az alsó síklemezen.

A fenti terhelésekkel kopási kísérletek is végezhetők, ha a QG csap végét félgömb alakúra képezük ki. Numerikus számításának főbb lépései a Páczelt et al. (2012)-ben található meg.

Változatlanul a Példák 4 elején megadott geometriai és anyagadatokat fogjuk alkalmazni.

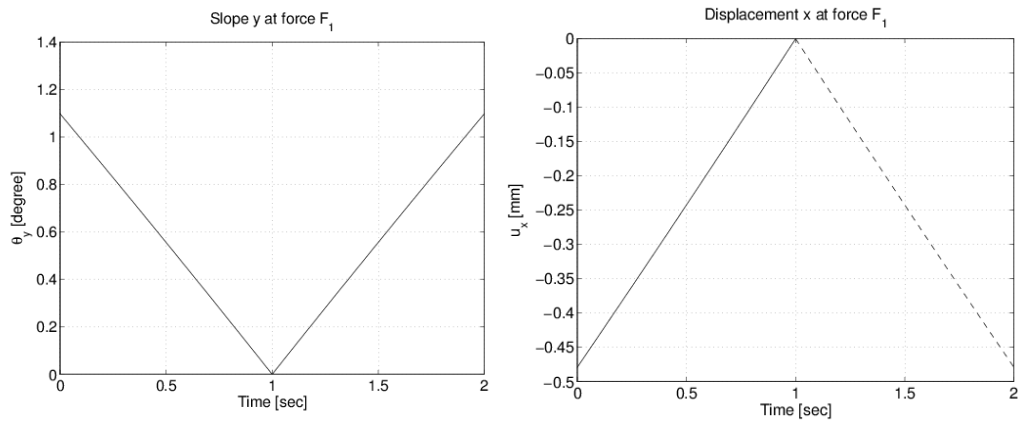
Az 1. terheléskor az F_1 erőhöz tartozó szögelfordulás időbeli változása a 23. ábrán látható.

Bevezetve az $\tilde{\alpha} = 1 - \beta, \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = \beta$ paramétert, a terhelések

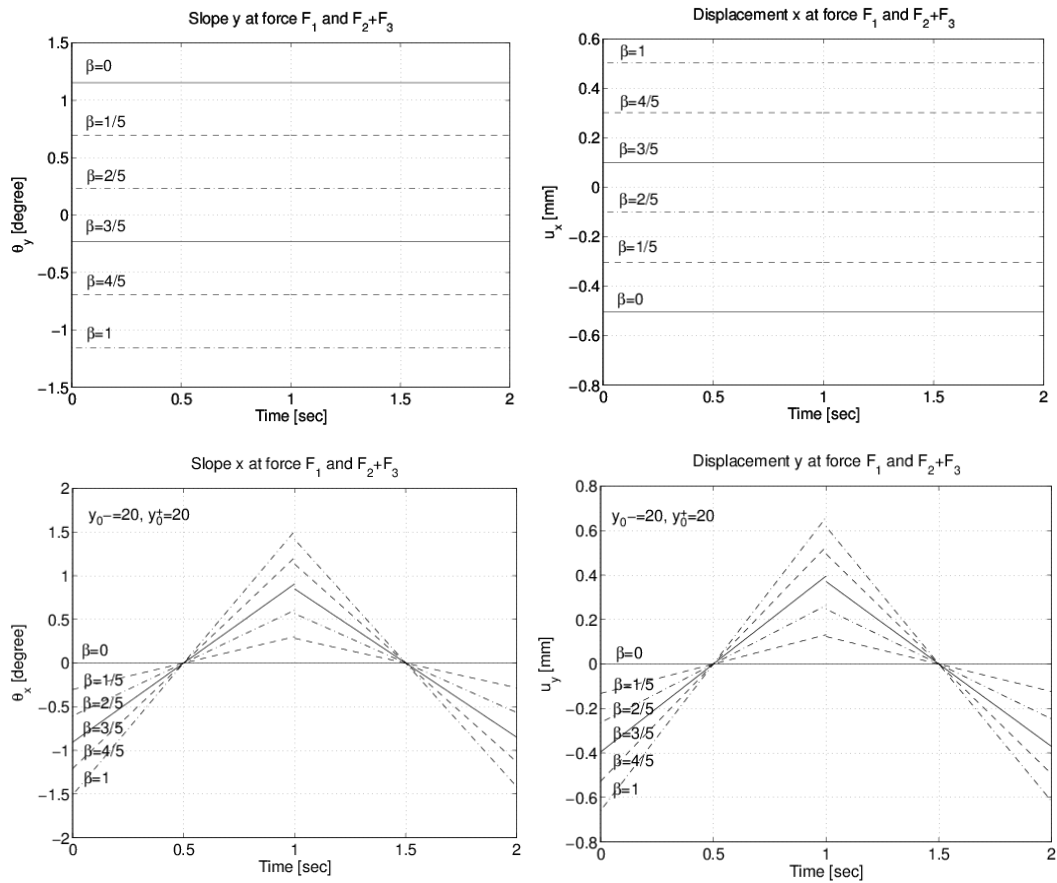
$$F_1 = F_1(\tau) = f^+(\tau)F_{1,0\max} = f^+(\tau)(1 - \beta)F_Q,$$

$$F_{2,3} = F_2 + F_3 = F_2(\tau) + F_3(\tau) = (f^+(\tau) + f^-(\tau))F_{23,0\max} = (f^+(\tau) + f^-(\tau))\beta F_Q \text{ formában írhatók fel.}$$

A terheléshez tartozóan a csap végén lévő G pontban a szögelfordulásokat és elmozdulásokat a 24. ábra mutatja különböző β -hoz tartozóan, $F_Q = 1 \text{ kN}$ esetén. A $T_*/2$ időpillanatban a csapvégi elmozdulás irányt változtat, és ezzel együtt a súrlódóerő iránya is megváltozik. Ily módon a θ_x szögelfordulás mezőben és az u_y elmozdulásban szakadás lép fel.

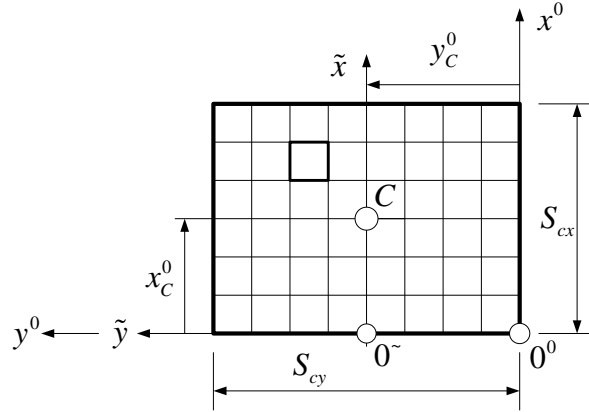


23. ábra. Az $F_1 = F_1(\tau)$ ($F_2 = F_3 = 0$) erőhöz tartozó G pontbeli szögelfordulás és elmozdulás



24. ábra. θ_x, θ_y szögelfordulás és u_x, u_y elmozdulás a G pontban az F_3, F_2 és F_1 erőnél
 ($F_3 + F_2 = \beta F_Q, F_1 = (1 - \beta) F_Q$)

A kopás szimulálására a QG csap végén lévő $R_0 = 5 \text{ mm}$ sugarú félgömböt merevnek, az alatta lévő, koptatandó síkfelületű testet (lemez) alumíniumötvözetűnek ($E_2 = 75\,000 \text{ MPa}$, $\nu_2 = 0,3$) vesszük. Az érintkezés tartomány kicsiny volta miatt, az alsó testet rugalmas feltérként modellezzük. Az érintkezési tartományt négyzetes altartományokra bontjuk fel (lásd 25. ábra) és a felettük kialakuló érintkezési feszültségeket állandónak tekintjük.



25. ábra. A szóba jöhető érintkezési tartomány felbontása kicsiny négyzetes altartományokra. A jelen koordinátarendszer x^0, y^0 tengelyei párhuzamosak a szerkezetnél felvett y, x tengelyekkel, továbbá $\tilde{y} = 0, x = 400, \tilde{x} = 0, y = -0,5, \tilde{z} = z$, mivel $S_{cx} = 1 \text{ mm} = S_{cy}$.

A rugalmasságtani megoldáshoz a hatásfüggvényeket a Boussinesq elmélet szerint vesszük (Kalker, 1990), a felvett elemek száma 41×41 , az érintkezési egyenlőség megoldására a KALKER-féle algoritmust használjuk (Páczelt, 2000).

A normális irányú kopási sebességet az ún. Archard-féle kopási törvény szerint írjuk le (Páczelt et al., 2012): $\dot{w}_n = \beta_w p_n v_r$. Itt β_w kopási paraméter, p_n az érintkezési nyomás, v_r az érintkező testek közötti relatív sebesség. Numerikusan integrálva a kopási törvényt, a $t, t + \Delta t$ idők közötti növekmény

$$\Delta w_n = \int_t^{t+\Delta t} \dot{w}_n d\tau = \beta_w \int_t^{t+\Delta t} p_n v_r d\tau \cong \beta_w \Delta t v_{r, \text{átl}} p_{n, \text{átl}} \quad (69)$$

A számításainkban a mozgás fél periódusát 7 részre bontottuk fel, az időlépésenként kapott kopási növekményből az új kopás mértéke

$${}^{t+\Delta t} w_n = {}^t w_n + \Delta w_n. \quad (70)$$

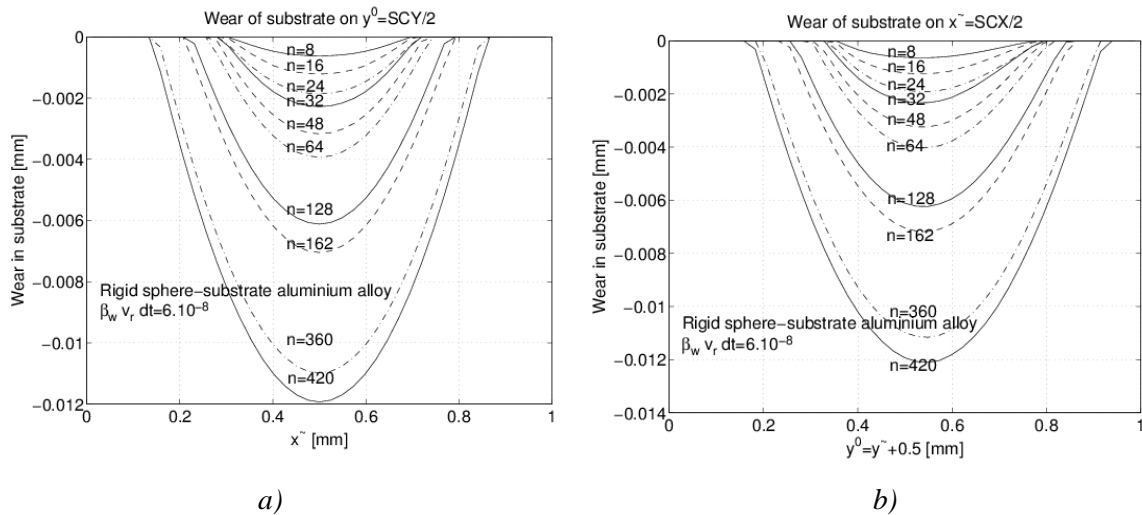
A terhelés maximumából $\dot{w} = \theta_y = 0,0093 \text{ rad}$, amiből

$\theta_y = \theta_y (T_* / 2 = 1s) \square \dot{\theta}_y \cdot (T_* / 2) = \dot{\theta}_y$ (számított) szögsebesség adódik. A gömb végén a sebesség

$v_{r, \text{átl}} = v_r = \dot{\theta}_y$ (számított) $h_z = \dot{w}_z = 0,0093 \cdot 25 = 0,2325 \text{ mm/s}$. Számításainkban $\beta_w \Delta t v_r = 6 \cdot 10^{-8}$.

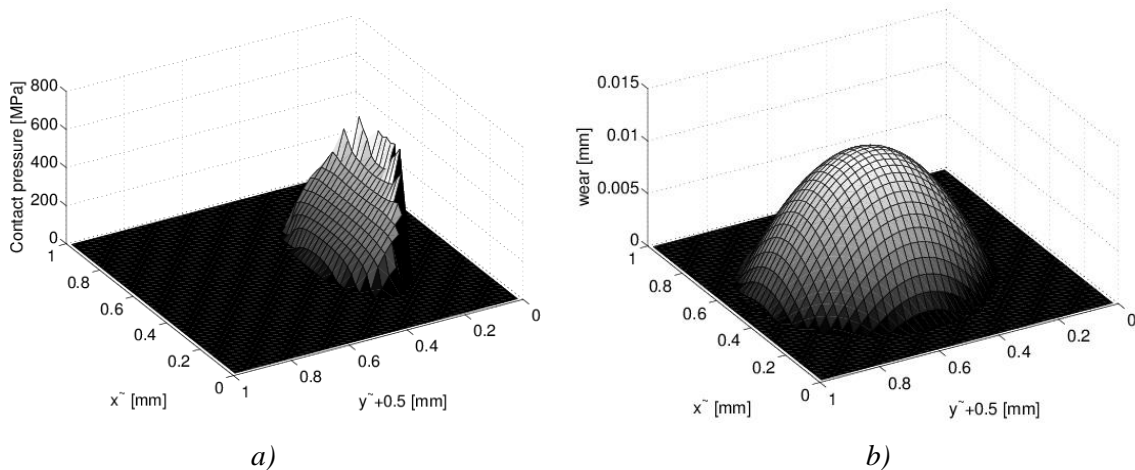
Mivel a kopás anyag leválást eredményez, ezzel a kopott test felületének alakja megváltozik, a testek közötti hézag is módosul, ami az érintkezési nyomás megváltozását is magával hozza. Tehát időlépésenként újra és újra egy megváltozott felülettel rendelkező testnek kell az érintkezési viszonyait tisztázni. A numerikus lépések részletesebb kifejtését a Páczelt et al. (2020) alatti munkában találjuk meg.

Periódusonként ismételt $F_1 = F_{10} f^+(\tau) = 500 f^+(\tau)$ erővel hatunk a rendszerre, a kopás során kialakul az alsó testben egy kis árok, aminek két metszetét a 26. ábra mutatja.



26. ábra. Az alumínium alsó lemezben kialakuló kopott vajat a) az $y^0 = S_{cy} / 2$ és b) az $x^- = S_{cx} / 2$ metszetben, n az időlépés sorszama

Magát a teljes lekopott térfogatot és az érintkezési nyomást az $n = 428$ -as időlépésnél a 27. ábra mutatja. Fontos megjegyezni, hogy az érintkezési nyomás egy perióduson belül is lényegesen változik, hisz a terhelőerő időben az $f^+(\tau)$ szerint változó. A tényleges érintkezési tartomány vándorol az y^- mentén, a nyomás függvénynek hol az alsó, hol a felső y^- részénél van maximuma. Látjuk az $n = 428$ -nál ez az alsó részen van.



27. ábra. Az érintkezési nyomás és a lekopott összegzett anyag az $n = 428$ időlépésben, a) nyomás, b) lekopott anyag

Megjegyzés: A terhelés 3. esetét választva az x tengely körüli csavaró mozgás miatt az alsó test anyagának a y irányú kopási állandóját lehet meghatározni, ill. numerikusan modellezni. Ezzel a két-fajta terheléssel végzett kísérlet az anyagi anizotróp súrlódási-kopási tulajdonságok meghatározását biztosítja.

5. Összefoglalás

A jelen tanulmányban a rugalmas prizmatikus tartó-merev lemez alkotta szerkezethez csatlakozó merev csap végének elmozdulását a szerkezetre ható két erő támadáspontjainak megváltoztatása jelentősen befolyásolja. A csap érintkezésbe kerül egy síkfelületű testtel, lemezzel. A kialakuló elmozdulásokat a testek közötti Coulomb-féle súrlódási törvény szerint fellépő súrlódóerő jelentősen befolyásolja. Elemeztük az alsó síkfelületű test (lemez) y -nal párhuzamos mozgásnak a hatását is. Vizsgáltuk az időbeli változásokat leíró lineáris és trigonometrikus függvények hatását, a csap végének kör alakú pályán történő mozgásának lehetőségét, a terhelőerő speciális elliptikus pályán való mozgásának szükségszerűségét. A nagyszámú példa jól demonstrálja az elméleti eredmények magvalósításának lehetőségét. Az utolsó példa a csap végének gömbi kialakítása adta időben változó érintkezési viszonyok miatt jelentkező kopás numerikus szimulálásának eredményeit is bemutatja.

6. Köszönetnyilvánítás

A kutatást a Magyar Tudományos Akadémia és az Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH, K115701 projektje támogatta.

Irodalom

- [1] Páczelt, I., Mróz, Z. (2019). Optimized punch contact action related to control of local structure displacement. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 60, 1921–1936. <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02300-z>
- [2] Páczelt, I., Mróz, Z. (2020). A new class of optimization problems related to structural control by contact interaction. In Krivtsov, A. M., Indeitsev, D. A. (Eds.), *Advanced Problems in Mechanics* (pp. 163–178., Paper Chapter 16). Springer International Publishing. (Lecture Notes in Mechanical Engineering ISSN 2195-4356) <https://doi.org/10.1007/978-3-030-49882-5>
- [3] Szabó J., Roller B. (1971). *Rúdszerkezetek elmélete és számítása*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- [4] Páczelt I. (1999). *Végeselem-módszer a mérnöki gyakorlatban*. I. kötet. Miskolci Egyetemi Kiadó.
- [5] Páczelt, I., Mróz, Z., Baksa, A. (2020). Analysis of steady state wear processes for inhomogeneous materials and varying contact loads. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 1, 27–66. <https://doi.org/10.32973/jcam.2020.003>
- [6] Páczelt, I., Kucharski, S., Mróz, Z. (2012). The experimental and numerical analysis of quasi steady wear processes for a sliding spherical indenter. *Wear*, 274–275, 127–148. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2011.08.026>
- [7] Kalker, J. (1990). *Three dimensional elastic bodies in rolling contact*. Academic Publisher, Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-7889-9>
- [8] Páczelt, I. (2000). Iterative solution of contact optimization problems. *Arch. Mech.*, 52 (4–5), 685–711., Warszawa.