DANUBIUS NOSTER XI. évf. 2023/1. sz.
DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

Fülöp Zsolt

A HAMIS FELTÉTELEZÉSEK MÓDSZERÉNEK ALKALMAZÁSA AZ ÁLTALÁNOS ISKOLAI OKTATÁSBAN

Az aritmetikai módszerekről az algebrai módszerekre való áttérés az általános iskolai tanításban

Az aritmetikai módszerekről az algebrai módszerekre történő áttérés az általános iskola 5-8. évfolyamain valósul meg. Ezeknek a módszereknek a sajátosságai fokozatosan épülnek be az oktatási folyamat során, kezdetben a konkrét számokkal végzett műveleteken alapuló feladatok, majd az aritmetikai, illetve algebrai módszerek alkalmazásával kapcsolatos matematikai problémák elemzése során. Az algebrai módszerek bevezetése lépcsősen valósul meg, a tanulók először a változók fogalmával, az egyismeretlenes egyenletek különböző típusaival ismerkednek meg, majd a későbbiekben képesek lesznek a különböző matematikai problémákat lefordítani az algebra nyelvére. Ezzel párhuzamosan történik az átmenet az operacionális gondolkodásról (aritmetikai módszerek alkalmazása) a strukturális gondolkodásra (algebrai eszközök használata). A szöveges feladatok megoldása során az algebrai módszerek alkalmazása egy hatékony eszközt jelent, ugyanis lehetővé válik, hogy a tanuló a szöveges feladat adatai közötti összefüggéseket egy egyenlet formájában írja fel. Viszont az algebra bevezetése során szükséges, hogy a tanulók szakítsanak az aritmetikai gondolkodásmóddal és elsajátítsák a változókkal való műveleteket, ezt Filloy és Rojano[1] „didactic cut"-nak, Herscovics és Linchevski[2] „cognitive gap"-nek nevezi. Nemzetközi kutatások tárgyát képezi, hogy az algebrai módszerek bevezetése melyik évfolyamon történjen, illetve a tanulói gondolkodás milyen sajátosságait kell figyelembe venni a módszertani tervezés során. Továbbá szükséges ennek a folyamatnak a teljes átszervezése, ugyanis a legújabb kutatások szerint a tanulók többsége nem képes elsajátítani és helyesen alkalmazni az algebra eszköztárát a szöveges feladatok megoldása során. Ennek egyik fő oka az algebrai módszerek korai bevezetése (5-6. évfolyam), ugyanis a tanulók ebben az életkorban még nem képesek a strukturális gondolkodásra. Stacey és MacGregor[3] (2000) kiemelték, hogy a tanulók többsége még 16 éves korban is a szöveges feladatok megoldása során nem algebrai úton próbálkozik, sokan közülük inkább próbálgatásokba bocsátkoznak, ezt a szakirodalom „trial-and-error" vagy „guess-and-check" néven említi. Egy felmérésben 9. és 10.

[1] FILLOY, Eugenio–ROJANO, Teresa: *From an arithmetical to an algebraic thought,* Proceedings of the 6th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Wisconsin, Madison, 1984.

[2] HERSCOVICS, Nicolas–LINCHEVSKI, Liora: *A cognitive gap between arithmetic and algebra,* Educational Studies in Mathematics 27, 1994.

[3] STACEY, Kaye–MACGREGOR, Mollie: *Using algebra to solve problems: selecting, symbolising, and integrating information*, University of Melbourne, Melbourne, 1996.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

osztályos tanulók problémamegoldási módszereit vizsgálták és megfigyeléseik alapján az általuk vezetett felmérésben részt vevő tanulók nagyon kis része oldotta meg a feladatokat algebrai módszerekkel (5 a 90 tanulóból). Ez annak ellenére történt, hogy a tanulókat külön megkérték arra, hogy minden feladat esetében írjanak fel egyenletet is a feladathoz. A tanulók többsége helyesen oldotta meg a feladatokat nem-algebrai módszerekkel (többen közülük a guess-check-improve néven említett próbálgatással). Több tanuló használt algebrai szimbólumokat a különböző ismeretlen mennyiségek jelölésére vagy a feladatban szereplő összefüggések felírására, de végül nem írtak fel egyenletet a feladatok megoldásához, hanem inkább visszatértek az aritmetikai módszerekhez vagy egyszerűen próbálgatással oldották meg a feladatot. A szerzők szerint a legnagyobb nehézséget az egyenletek felírásánál nem a probléma helytelen megértése okozta, ezt bizonyítja a nem-algebrai módszerekkel adott helyes válaszok magas száma is. Azoknak a tanulóknak a számára, akik algebrai módszerekkel próbálkoztak a fő akadályt az algebrai szintaxis helytelen használata, valamint a feladatban szereplő információk egyenletbe vagy egyenletrendszerbe történő összefoglalása jelentette. A tanulók többsége nem tudott egyenletet felírni a problémaszituáció szerkezetének kifejezésére. A szerzők azt is kiemelik, hogy amikor a tanulók olyan feladatokat oldanak meg, amelyek aritmetikai módszerekkel vagy egyszerű intuitív gondolatmenettel kezelhetők, akkor az algebrai módszerek túlságosan bonyolult és fölösleges eszközöknek bizonyulnak. Más szerzők is kiemelik azokat a nehézségeket, amelyeket a szöveges feladatok algebrai úton való megközelítése okoz. Például Nathan, Kintsch és Young[4] megállapították, hogy a tanulók képesek egy problémát megérteni és megoldani egyszerű gyakorlatias gondolatmenettel, viszont nehézségeket okoz helyesen alkalmazni az algebrai megoldáshoz szükséges formai szempontokat. Cortes, Verignaud és Kavafian[5] kiemelték, hogy a tanulók számára az egyenlet inkább a probléma rövidített leírását (vagyis egyfajta összegzését) jelenti, nem pedig a problémamegoldás egy hatékony eszközét.

Feladat: *Egy számhoz 5-öt adtam, az összeget osztottam 2-vel, a hányadost megszoroztam 3-mal, a szorzatból elvettem 1-et, így 14-et kaptam. Melyik ez a szám?*

Ennek a feladatnak az algebrai modellje az $(x+5):2\cdot 3-1=14$, vagyis általánosan egy $A\cdot x+B=C$ típusú egyenlet, ahol az ismeretlen csak az egyenlőségjel bal oldalán szerepel. Az ilyen feladatok megoldhatók egyszerű aritmetikai módszerekkel, főként visszafelé következtetéssel, ezért ezeket nevezhetjük „aritmetikai feladatoknak” is. Ebben az esetben az egyenlet felírása során elegendő, ha a tanuló ismeri a műveleti tulajdonságokat és egyszerűen „leköveti” a feladat szövegezésében szereplő információkat, vagyis elegendő az operacionális (vagy procedurális) gondolkodásmód.

4 NATHAN, Mitchell J.–KINTSCH, Walter–YOUNG, Emilie: *A theory of algebra word-problem comprehension and its implication for the design of learning environments*, Cognition and Instruction, 1992.

5 VERGNAUD, Gérard–KAVAFIAN N.: *From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process*, Proceedings of the Fourteens PME Conference, Mexico: International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1990.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

Feladat: *Melyik az a szám, amelynek a négyszerese 2-vel kisebb, mint a nála 3-mal nagyobb szám háromszorosa?*
Ez a feladat algebrai úton a $4 \cdot x + 2 = 3 \cdot (x + 3)$ egyenlettel, vagyis általánosan egy $A \cdot x + B = C \cdot x + D$ típusú egyenlettel, írható fel. Megfigyelhető, hogy ebben az esetben az x ismeretlen az egyenlőségjel mindkét oldalán szerepel. Ilyenkor az egyenlet felírásához elengedhetetlenül szükséges, hogy a tanuló átlássa a feladat teljes szerkezetét, vagyis szükség van a strukturális gondolkodásra.

Összefoglalva, az aritmetikai módszerekről az algebra eszközeire való átmenet valójában a procedurális gondolkodásról a strukturális gondolkodásra való áttérést jelenti. A tanulók akkor tudnak helyesen felírni egyenletet a szöveges feladatokhoz, ha rendelkeznek a strukturális gondolkodással. A procedurális gondolkodás fázisában a tanulók a szöveges feladatokat még aritmetikai módszerekkel közelítik meg és legfeljebb az $A \cdot x + B = C$ típusú egyenletekkel modellezhető szöveges feladatokat tudják sikeresen megoldani az algebra eszközeivel.

Számos tanulmány született arra vonatkozóan, hogy az absztrakt matematikai fogalmak megközelítése során mit is jelent a procedurális (vagy operacionális), illetve a strukturális megközelítés. Összefoglalni ezeket leginkább Kieran,[6] Sfard,[7] valamint Linchevski és Herscovics[8] munkái alapján lehet. Ezek szerint például „procedurális" megközelítést jelent egy egyenlet megoldásának esetében az, hogy a változóknak különböző értékeket adunk és elvégezzük ezekkel az egyenletben szereplő műveleteket (ezt addig folytatjuk, amíg megkapjuk az egyenlet helyes megoldását). Egy másik példa, hogy az ismeretlen mennyiségnek konkrét értékeket adunk és így kiszámítjuk a különböző törtrészeit. Amikor viszont az ismeretlen mennyiségeket betűszimbólumokkal jelöljük és algebrai műveleteket végzünk, akkor a „strukturális" megközelítésről beszélünk. Ezzel az alapvető különbséggel magyarázható több oka is annak, hogy a tanulók miért követnek el lényegesen több hibát a szöveges feladatok „strukturális" megközelítése esetén. Ugyanis ebben az esetben szükséges a műveleti tulajdonságok (kommutativitás, disztributivitás) helyes alkalmazása, illetve egy nagy hibaforrás lehet az ismeretlen mennyiségek törtrészeivel való műveleteknek a pontos megértése. Egodawatte[9] egy felmérés során azt tapasztalta, hogy még a 9-10. osztályos tanulók is nehezen oldják meg az algebrai feladatokat „strukturális" megközelítésben. Legtöbben különböző betanult szabályok alapján végzik a műveleteket anélkül, hogy megértették volna az illető probléma algebrai struktúráját. Hiányoznak olyan ismeretek, mint például az egyenlőségjel helyes megértése (ekvivalencia), a változó-ismeretlen kettősség megértése, illetve a betűszimbólumokkal való helyes manipuláció.

---

[6] KIERAN, Carolyn: *The early learning of algebra: a structural perspective*, Research issues in the learning and teaching of algebra, 1989.

[7] SFARD, Anna: *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 1991.

[8] LINCHEVSKI, Liora - HERSCOVICS, Nicolas: *Cognitive obstacles in pre-algebra*, Proceeding of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lisbon, 1994.

[9] EGODAWATTE, Gunawardena: *Algebraic procedures used by 14 to 15 year old Sri Lankan students*, Dean's Graduate Student Research Conference, Canada, 2008.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

Az általános iskolai tanulók problémamegoldó stratégiáinak vizsgálata

Egy általam végzett felmérésben az általános iskolás tanulók problémamegoldó képességét vizsgáltam szöveges feladatok esetében.[10] Elsődlegesen arra kerestük a választ, hogy az 5-8. évfolyamok tanulói milyen módszerekkel közelítik meg az úgynevezett „aritmetikai feladatokat”, vagyis az olyan szöveges feladatokat, amelyek algebrai modellje egy $A \cdot x + B = C$ típusú egyenlet. Ebben a felmérésben 15 Pest megyei általános iskola 380 tanulója vett részt. A felmérés lebonyolításával kapcsolatos részleteket és a feladatokra adott válaszok megoszlását a fent említett tanulmányban tettem közzé. Az alábbiakban globálisan összefoglalom a felmérés eredményeit az összes feladatra adott megoldások és válaszok alapján. A jó és rossz válaszok részarányát az alábbi táblázatban foglaltam össze.

	5. évfolyam	6. évfolyam	7. évfolyam	8. évfolyam
Jó válasz	43 %	43 %	37 %	32 %
Rossz válasz	48 %	40 %	48 %	47 %
Nem foglakozott	9 %	17 %	15 %	21 %

A megoldások hatékonysága (1. táblázat)

Amint a fenti táblázatból kitűnik, a jó válaszok részaránya a 7. és 8. évfolyamon alacsonyabb volt. Ez nem magyarázható kizárólag azzal, hogy a felmérésben differenciált feladatlapokat alkalmaztunk, évfolyamonként nehezedő tendenciával. További vetületeket is meg kell vizsgálnunk, amint az a következő táblázatból is kiderül, ahol a sikeres válaszok évfolyamokon belüli részarányát mutatjuk be aszerint, hogy a jó választ adó tanulók milyen mértékben alkalmazták a különböző módszereket.

	5. évfolyam	6. évfolyam	7. évfolyam	8. évfolyam
Próbálgatás	26 %	22 %	22 %	15 %
Aritmetikai m.	17 %	20 %	13 %	6 %
Algebrai m.	0 %	1 %	2 %	11 %
Jó válasz összesen	43 %	43 %	37 %	32 %

A jó válaszok esetében alkalmazott módszerek (2. táblázat)

A fentiekből kitűnik, hogy a tanulók többsége próbálgatással adta meg a helyes választ. Továbbá az alsóbb évfolyamok tanulói nagyobb részarányban alkalmazták a próbálgatást és az aritmetikai módszereket. A felsőbb évfolyamok tanulói közül sokan az algebrai módszereket választották és csak nagyon kevesen (7. évfolyamon a tanulók 2 %-a, míg 8. évfolyamon a tanulók 11 %-a) adtak jó választ algebrai úton. Ez meglepő, mivel az algebrai ismeretek alkalmazása a szöveges feladatok megoldásában 7. és 8. évfolyamon is tananyagnak minősül, valamint a felmérésben olyan feladatok szerepeltek, amelyek megközelíthetők procedurális

[10] FÜLÖP Zsolt: *Transition from arithmetic to algebra in primary school education*, Teaching Mathematics and Computer Science, 13/2, 2015.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

gondolkodással. További következtetéseket tudunk levonni, ha megvizsgáljuk a rossz válaszok esetében előforduló hibák okait. Ezt három kategóriába soroltuk: az adatok közötti összefüggések helytelen felírása, a megoldási terv helytelen végrehajtása, illetve a számolási hibák. Ezeket évfolyamonként százalékos részarányban az alábbi táblázat tartalmazza.

	5. évfolyam	6. évfolyam	7. évfolyam	8. évfolyam
Adatok felírása	25 %	18 %	32 %	31 %
Megoldási módsz.	19 %	16 %	10 %	10 %
Számolási hiba	4 %	6 %	6 %	6 %

A hibaforrások megoszlása (3. táblázat)

A fenti táblázatból érdemes kiemelni, hogy a magasabb évfolyamok tanulói viszonylag magas részarányban hibát vétettek az adatok felírása során. Ez főként annak tulajdonítható, hogy ezek a tanulók a feladatokat algebrai módszerekkel közelítették meg és az adatok közötti összefüggéseket helytelenül írták fel betűszimbólumok alkalmazásával. Ez is egyértelmű jelzés lehet arra vonatkozóan, hogy a szöveges feladatok algebrai úton való megközelítése még viszonylag bonyolult a 7. és 8. évfolyamos tanulók körében.

Az algebra bevezetése során tapasztalható nehézségek

Több tanulmány rávilágít arra, hogy az algebra bevezetése során a tanulók részéről egy teljesen más szemléletre van szükség, vagyis a tanulóknak feltétlenül szakítani kell a műveletvégzésen alapuló aritmetikai konvenciókkal és a feladat teljes szerkezetének áttekintését célzó strukturális gondolkodásra van szükség. Ennek a szemléletváltásnak a hiánya gyakran kitűnik azokból a tanulói hibákból, amelyeket a kutatások feltérképezni és kategorizálni igyekeznek.
Az egyik ilyen hibát a nemzetközi szakirodalomban *reversal error* néven említik. Ennek szemléltetésére tekintsük az előzőekben már bemutatott feladatot.

Feladat: *Melyik az a szám, amelynek a négyszerese 2-vel kisebb, mint a nála 3-mal nagyobb szám háromszorosa*?
A feladat megoldásában gyakori hiba, hogy a tanulók a $4x - 2 = 3 \cdot (x + 3)$ egyenletet írják fel. Itt a hiba forrása a feladat szövegezésében szereplő „2-vel kisebb” szószerkezet, amely arra készteti a tanulókat, hogy a kisebb mennyiséget csökkentsék 2-vel.

Egy másik fő hibaforrás az egyenlőségjelnek a helytelen értelmezéséből fakad. Az algebrai gondolkodásra való áttérés egyik fő ismérve, hogy a tanuló tisztában van azzal, hogy az egyenlőségjel egy ekvivalenciát jelent és az egyenlőségjel bal-, illetve jobb oldala felcserélhető, vagyis az egyenlet bármely oldalán szereplő műveletek „végeredménye” a másik oldalon szereplő kifejezés[11]. Sok esetben a tanulók úgy értelmezik, hogy az egyenlőtlenségjel jobb oldalán mindig a bal oldalon

[11] KIERAN, Carolyn: *Concepts associated with the equal symbol*, Educational Studies in Mathematics, 1981.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

feltüntetett művelet eredménye kell álljon.[12] Léteznek olyan esetek is, amikor az egyenlőségjelnek mondattani jelentőséget tulajdonítanak, vagyis egy olyan szimbólumnak tekintik, amely mögött a feladat kérdésére adott válasz kell szerepeljen[13]. Amint S. Norton és T. Cooper[14] hangsúlyozták, a tanulóknak szükséges megérteniük, hogy az egyenlőségjel nem feltétlenül azt a helyet jelöli ahova a választ kell írni, illetve egy műveletsor végén nem mindig valamilyen számszerű eredménnyel való lezárásnak (ezt a nemzetközi irodalom *closure* néven említi) kell lennie, hanem ott szerepelhet egy, a műveletsorral egyenértékű kifejezés is. Egy általam végzett kutatásban a következő feladat esetében néhány helytelenül felírt egyenletet mutatnék be.

Feladat: *Egy farmon libák, kacsák és pulykák vannak. A szárnyasok egy negyede pulyka és egy harmada liba. A kacsák száma 65. Mennyi szárnyas van a farmon?*

Néhány tanuló a következő „egyenleteket” írta fel, ezek kizárólag a fentiekben *closure* néven említett hibaforráshoz köthetők: „ $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=65$”; „$\frac{x}{4}+\frac{x}{3}+65=?$”; „$\frac{x}{4}+\frac{x}{3}+65=?$”; „$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+65=?$”; „$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+65$” (az utóbbi „egyenletben” a tanuló még egyenlőség jelet sem írt).

Az algebra tanítása során a legnagyobb akadályt az algebrában használt betűjelölések helytelen megértése okozza. Sokat vitatott tény az algebra bevezetésének kezdeti fázisaiban, hogy milyen jelentést tulajdonítsunk a különböző betűszimbólumoknak. Egyes tanulók már az alsós tanulmányaik során eljutnak odáig, hogy például az x betűszimbólum valamilyen ismeretlent jelöl. Felsőbb évfolyamokon, az algebrai kifejezések tanítása során megjelenik a változó fogalma, ezáltal az ismeretlen-változó dualitás komoly félreértésekre adhat okot. Sok tanuló nehezen érti meg, hogy ugyanaz az x betűszimbólum bizonyos szövegösszefüggésekben változót, más problémaszituációk esetében viszont ismeretlent jelent. Például Ursini és Trigueros[15] szerint a változó és ismeretlen közötti összefüggések helyes megértéséhez feltétlenül szükségesek a következő ismeretek: felismerni és azonosítani egy problémaszituáció esetében az ismeretlent, amelyet a probléma adatainak figyelembe vételével meg kell határozni, majd egyenletet felírni az adott problémaszituációra; a probléma megoldása során a változót különböző számadatokkal helyettesítjük, majd igyekszünk megtalálni a változónak azt az értékét, amely az adott probléma esetében a helyes választ jelenti. A betűszimbólumokkal való manipuláció elengedhetetlen feltétele ennek a kétfajta megközelítésnek a helyes megértése.

---

[12] STACEY, Kaye–MACGREGOR, Mollie: *Ideas about symbolism that students bring to algebra*, The Mathematics Teacher, 1997.
[13] FILLOY, Eugenio–ROJANO, Teresa: *Solving equations, the transition from arithmetic to algebra,* For the Learning of Mathematics, 9 (2), 1989.
[14] NORTON, Stephen J.–COOPER Tom J.: *Students' perceptions of the importance of closure in arithmetic: implications for algebra*, 2001.
[15] URSINI Sonia, TRIGUEROS Maria: *Understanding of different uses of variable*, A study with starting college students, Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lahti, Finland, 1997.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

A betűszimbólumok alkalmazása során zavart okozhat az, hogy egy bizonyos betűszimbólumnak milyen jelentést tulajdonítunk. Tekintsük például az alábbi feladatokat.

1. Feladat: *Egy iskolában a fiúk száma 121-gyel kevesebb, mint a lányok száma. Az iskolába összesen 963 tanuló jár. Mennyi a fiúk, illetve a lányok száma külön-külön?*

2. Feladat: *Anna 5 almát és 3 banánt vásárol, amiért összesen 630 forintot fizet. Egy banán 10 forinttal drágább, mint egy alma. Mennyibe kerül egy banán, illetve egy alma külön-külön?*

Az 1. Feladat megoldása során felírt $x + (x + 121) = 963$ egyenletben az x a fiúk számát (tehát valamilyen darabszámot), míg a 2. Feladat esetében az $5x + 3 \cdot (x + 10) = 630$ egyenletben az x az egy darab alma árát (vagyis értékét) fejezi ki. A betűszimbólumoknak ez a fajta kettős jelentése (darabszám/érték) félreértéseket okozhat amikor a tanulók egyenletet írnak fel a szöveges feladatok megoldásához és komoly kihívást jelent azoknak az oktatási stratégiáknak a megtervezésében, amelyek a betűszimbólumokkal való manipuláció megalapozására irányulnak.

Simon[16] a fentiekre úgy tekintett, mint a szöveges feladatok algebrai úton való megoldásának egyik legnehezebben kezelhető akadályára. Ők egy 10 centes érmékre vonatkozó példát adtak, ahol a tanulók az x betűszimbólumot mindenre alkalmazták, ami a 10 centesekkel kapcsolatos volt: „egy tízcentes", „a tízcentesek", „a tízcentesek száma" vagy „a tízcentesek értéke".

Küchemann[17] a tanulói gondolkodást a betűszimbólumok értelmezése terén két nagy csoportba sorolta:

1. A betűszimbólum mellőzése vagy számokkal való helyettesítése, illetve a betűszimbólumoknak a tárgyak nevének rövidítéséhez való használata.
2. A betűszimbólum egy ismeretlent vagy egy általánosított számot (változót) jelent.

Küchemann ugyanakkor arra a következtetésre jutott, hogy a 13-15 éves tanulók nem képesek arra, hogy a betűszimbólumokat mint ismeretleneket vagy változókat kezeljék.

Sokáig elfogadott tény volt, hogy az algebrai jelölések különböző interpretációja kizárólag az eltérő kognitív képességeknek tulajdonítható. Például, ha egy tanuló ismeretanyagában bizonyos fogalmak nem rögzültek, akkor képtelen lesz egyes algebrai feladatokat helyesen megoldani. Ezekkel az elméletekkel ellentétben Stacey és MacGregor[18] kiemelték, hogy az algebrai fogalmak félreértelmezésében a kognitív képességeknél jóval kézzelfoghatóbb tényezők is közrejátszanak, mint például:

- intuitív feltételezések és pragmatikus gondolkodás egy szokatlan jelölési rendszerrel kapcsolatban;

[16] SIMON, Herbert A.: *Cognitive processes in solving algebra word problems*, Problem Solving: Research, Method and Theory, Wiley, New York, 1966.
[17] KÜCHEMANN, Dietmar: *Algebra, Children's Understanding of Mathematics*, 11-16, Murray, London, 1981.
[18] STACEY, Kay–MACGREGOR, Mollie: *Ideas about symbolism that students bring to algebra*, The Mathematics Teacher, 1997.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

- analógiák egyéb olyan szimbólumrendszerekkel amelyek a mindennapi életből, a matematika más területeiről vagy más tantárgyak jelölésrendszeréből származnak;
- az újonnan szerzett matematikai ismeretek interferenciája;
- rosszul felépített, félrevezető oktatási anyagok.

Az említett szerzők megállapították, hogy a tanulók többsége nem képes olyan feladatokat megoldani, ahol a betűszimbólumokat mint számokat kell értelmezni. Ezért azt javasolják, hogy az algebra tanítását kezdetben a betűszimbólumokon végzett konkrét műveletek szintjén kell kezelni, annak ellenére, hogy Küchemann szerint a betűk tárgyakként való használata szembemegy például azzal a szemlélettel, amikor a betűszimbólum a tárgyak számát jelenti.

A fentieket összefoglalva az algebra tanítása csakis fokozatosan, a procedurális gondolkodásról a strukturális gondolkodásra való áttérés feltételeinek megteremtésével valósítható meg. Az algebraoktatás kezdetén, az úgynevezett *Pre-algebra* and *Early algebra* stádiumban, jelentkező nehézségeket, illetve ezeknek az átalakításával kapcsolatos törekvéseket figyelembe véve dolgoztuk ki azokat az elképzeléseket, amelynek alapján a hamis feltételezések (regula falsi) módszerét be lehet iktatni az oktatási gyakorlatba az aritmetikáról algebrára való áttérés során.

A hamis feltételezések módszere

A hamis feltételezések módszerének több elnevezése ismeretes, a nemzetközi szakirodalomban leggyakrabban „false position method" vagy „regula falsi" néven említik. A szöveges feladatok megoldási módszereinek elemzése során leggyakrabban a „trial-and-error" vagy „guess-and-check" módszerekkel tévesztik, annak ellenére, hogy ezektől a módszerektől lényeges eltéréseket mutat. Ennek a módszernek a lényege, hogy a diák két hipotézist állít fel, majd tudatosan keresi az összefüggéseket a hipotézisekben foglaltak és a hiba alakulása között. A következő lépésben ezeket az összefüggéseket megtalálva számítja ki a feladat megoldását. Ez a módszer hasonlít a próbálgatások módszeréhez, viszont jóval több annál, ugyanis a második feltételezés (próbálkozás) után a diák már tudatosan keresi a megoldást az addigi tapasztalatokra támaszkodva. A harmadik lépésben pedig már, bizonyos aritmetikai számításokat követően, a feladat megoldása következik. A két módszer viszont közös vonásokat mutat abban a tekintetben, hogy a diák saját elképzeléseit próbálja a feladat adataival összevetni, vagyis a diák tág keretek között „tippelhet". Ugyanakkor nem szükséges nagyon sok előzetes ismeret, ezzel magyarázható, hogy a legtöbb diák a faladatok megoldását próbálgatással végzi (ezt a nemzetközi kutatási eredmények is alátámasztják). Ilyen értelemben a hamis feltételezések módszere tudatosabbá teszi a próbálgatásokat, ezért ezt a módszert szisztematikus próbálgatásnak is lehet nevezni.

A módszer ismertetése tudománytörténeti szempontból is fontos lehet, erre doktori értekezésemben[19] már kitértem, ezért itt csak egyetlen példát mutatnék be. A hamis feltételezések módszerét az ókori Kína matematikájában is fellelhetjük,

[19] FÜLÖP Zsolt: *Feladatmegoldási módszerek összehasonlító vizsgálata a pedagógus, illetve a diák rendelkezésére álló ismeretek birtokában,* Doktori értekezés, Bolyai Intézet, Szeged, 2017.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

erre példa a „Matematika kilenc könyvben” (angolul: The Nine Chapters on the Mathematical Art), amely Kr.e. 200 és Kr.u. 100 között íródott. Ennek a műnek a hetedik könyve, amelynek címe a „Többlet és hiány”, tartalmazza azt a módszert, amely később a kettős regula falsi elnevezést kapta.[20] A kínai módszert, mai szemmel tekintve, kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldására dolgozták ki. A módszer konkrét aritmetikai érvekkel volt alátámasztva és különböző gyakorlati feladatok megoldására használták fel. Ezek közül megemlítenénk a következő feladatot.

Feladat: *Csirkét közösen fizetnek ki; ha mindenki 9-et fizet, a többlet 11 lesz; ha mindenki 6-ot fizet, a hiány 16 lesz. Hány ember van? Mennyi a csirke ára?*

A feladatot a hamis feltételezések módszerével a következőképpen oldották meg, a gondolatmenetet (a könnyebb követkehőség céljából) a mai matematika szimbólumrendszerével mutatjuk be.

Első feltételezés: az emberek száma $x_1 = 5$, ebből következik, hogy a csirkék ára $y_1 = 9 \cdot 5 - 11 = 34$, illetve $y_2 = 6 \cdot 5 + 16 = 46$, a feladat adatai közötti két különböző összefüggésből kiindulva.

Így az első feltételezés hibája $k_1 = y_2 - y_1 = 46 - 34 = 12$.

Második feltételezés: az emberek száma $x_1 = 6$, ebből következik, hogy a csirkék ára $y_1' = 9 \cdot 6 - 11 = 43$, illetve $y_2' = 6 \cdot 6 + 16 = 52$. A második feltételezés hibája $k_2 = y_2' - y_1' = 52 - 43 = 9$.

Az emberek számát a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$x = \frac{k_1 \cdot x_2 - k_2 \cdot x_1}{k_1 - k_2} = \frac{12 \cdot 6 - 9 \cdot 5}{12 - 9} = 9$$

A csirkék száma pedig 70, ez a feladat szövegében lévő két összefüggés bármelyikéből adódik.

A mai napig rejtély maradt, hogy hogyan jutottak el a kínaiak a fentiekben bemutatott megoldóképlethez. Az, hogy használták, bizonyított, mivel a hetedik könyv az előbbiekben ismertetett eljárást mutatja be. A képletet az algebra eszközeivel könnyen bizonyíthatjuk, ettől most eltekintünk.

A hamis feltételezések módszerének magyar úttörői is vannak. Maróthi György[21] Arithmetika című könyvében bemutatja az Egyes Mesés Regula szabályát, amellyel a következő feladatot oldja meg.

Feladat: *Egy leánytól kérdik a Leányt kérők, hány esztendős? Az anyám úgymond harmadfél annyi idős, mint én: az Atyám pedig háromszor annyi idős. A hármunk ideje tészen 117 esztendőt. Kérdés, hány esztendős volt?*

Továbbá a Kettős Mesés Regula (vagy Regula Falsi Duarum Positionum) alkalmazásával oldja meg a következő feladatot.

Feladat: *Egy valaki ruhát akarván csináltatni, talál kétféle posztóra. Egyiknek singjét tartják 9 máriáson, a másikét tízen. Ebből a tíz máriásosból akarna venni, de nem érné meg a pénzével, hanem 8 máriás híja lenne. Ha pedig*

[20] KANGSHEN, Shen–CROSSLEY, N. John - LUN, Anthony: *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, Oxford University Press, Oxford, 1999.
[21] MARÓTHI György: *Arithmetica*, Debrecen, 1782.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

az olcsóbbikból veszen, megmarad 3 máriása. Kérdés, hány singet akar venni, és mennyi pénze van?

Könnyen belátható, hogy ezt a feladatot az ókori kínai módszerhez hasonlóan oldotta meg. A fentieket összefoglalva kétfajta megoldási módszerről beszélhetünk attól függően, hogy egy, illetve két feltételezés után próbálunk következtetni a helyes megoldásra. Ezeket a módszereket *Single False Position Method,* illetve *Double False Position Method* néven említhetjük.

A fentiekben bemutatott gondolatmenet nagyon sablonosnak számít, szigorú szabályok követésén alapul, ahol nem kerülhet előtérbe a kreatív problémamegoldó gondolkodás. Ezért úgy látjuk, hogy a módszert adaptálni lehet (és szükséges) az aktuális oktatási gyakorlatokhoz, vagyis szükséges megtalálni, hogy ezek a módszerek miként és milyen változtatásokkal vihetők be a tanórai tevékenységbe. Ennek bizonyos vetületeit fogjuk elemzés tárgyává tenni a következőkben.

Egyenes arányosság módszere (Multiplication method)

Ezt a módszert egy tanulmányban[22] multiplication method néven említettem. A módszer lényegét a következő példán keresztül szemléltetjük.
Feladat: *Péter egy 8580 forintos játékot 50 és 20 forintos érmékkel fizetett ki. Hány érme volt mindegyikből külön-külön, ha 3-szor annyi 20 forintost használt fel, mint 50 forintost?*

A feladatot egy feltételezéssel oldjuk meg, ezért a Single False Position Method módszerét követjük. A megoldás alapját az egyenes arányosság szabályai képezik. Kezdetben feltételezzük például, hogy 50 forintosokból 10 darab van, és a feladatban szereplő összefüggésekből következik, hogy a 20 forintosok száma 30. Így az érmék összértéke $50 \cdot 10 + 20 \cdot 30 = 1100$ forint. Viszont a feladatban szereplő játék ára 8580 forint, vagyis $8580 : 1100 = 7{,}8$ -szor több az általunk feltételezett értéknél. Ebből következik, hogy valójában az ötvenforintosok száma $7{,}8 \cdot 10 = 78$, míg a húszforintosok száma $7{,}8 \cdot 30 = 234$

A fenti aritmetikai számításokon alapuló gondolatmenet erősíti az egyenes arányosság szabályainak megértését és elősegíti a változó fogalmának bevezetését (jelen esetben a változó az 50 forintos érmék számát jelenti. Belátható, hogy ez a módszer a Single False Position Method adaptálását képezi az aktuális általános iskolai oktatás kihívásaihoz.

Az adatok növelésének/csökkentésének módszere (Increase/decrease method)

Ezt a módszert ugyanabban a tanulmányban increase/decrease method néven említettem. Ez a módszer a Double False Position Method-dal áll közvetlen kapcsolatban olyan szempontból, hogy két feltételezés után próbálunk összefüggést találni a feladatban szereplő adatok változása között és a hiba alakulásából következtetni a helyes megoldásra. A módszer lényegét a következő feladaton keresztül szemléltetjük.

[22] FÜLÖP Zsolt: *Regula falsi in lower secondary school education II*, Teaching Mathematics and Computer Science 18, Vol. 2. 2020.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

Feladat: *Péter egy 3460 forintos játékot 100 és 20 forintos érmékkel fizetett ki. A 20 forintos érmék száma 5-tel több, mint a 100 forintos érmék számának a háromszorosa. Hány érmét használt fel mindegyikből külön-külön?*

Ebben a feladatban a nehézséget az okozza, hogy a 20 forintos érmék száma 5-tel több, mint a 100 forintos érmék számának a háromszorosa. Amennyiben képzeletben „eltávolítjuk" az 5 darab „fölösleges" 20 forintos érmét, akkor a játék képzeletbeli ára 100 forinttal csökken, tehát az új ár 3360 forint lesz. Ezt tanári szemmel analógiákat mutat a geometriai transzformációk témakörében jól ismert transzlációval. A továbbiakban a feladatot meg lehet oldani az előbbiekben ismertetett egyenes arányosság módszerével. Eddigi tapasztalataink alapján az ilyen típusú feladatoknál ez a módszer bonyolultnak és nehézkesnek bizonyul a tanulók számára. Ezért ebben az esetben két feltételezéssel próbálkozunk és feltételezéseinket összhangba állítjuk a feladat tényleges adataival. Például az első feltételezés esetében 3 darab 100 forintost és 14 darab 20 forintost veszünk. A második esetben a 100 forintosok számát eggyel növeljük, így 4 darab 100 forintossal és 17 darab 20 forintossal számolunk. Mindkét esetben kiszámítjuk a feltételezés hibáját (az általunk feltételezett érmék összértéke és a játék tényleges ára közötti eltérés), majd következtetéseket fogalmazunk meg a hiba alakulására vonatkozóan. A könnyebb követhetőség kedvéért próbálkozásainkat táblázatba foglaljuk.

	100 Ft-os	20 Ft-os	összérték	hiba
első feltételezés	3	14	580	$3460 - 580 = 2880$
második feltételezés	4	17	740	$3460 - 740 = 2720$
megoldás	21	68	3460	0

A feladat megoldása két feltételezéssel (4. táblázat)

A táblázatból kitűnik, hogy a 100 forintos érmék számát eggyel növelve a feltételezés hibája $2880 - 2720 = 160$-nal csökken, tehát ahhoz, hogy a hibát nullára csökkentsük az első feltételezéshez képest $2880: 160 = 18$ ilyen „lépést" kell végrehajtani. Ilyen módon a 100 forintosok száma 21, míg a 20 forintosoké $3 \cdot 21 + 5 = 63$ lesz.

A fentiekben ismertetett módszer különbözik a sorozatos próbálgatások módszerétől, mivel itt két feltételezés után a tanuló már tudatosan keresi az összefüggéseket a feltételezésekben szereplő adatok és a hiba alakulása között. A következő lépésben pedig, bizonyos aritmetikai számításokat követően, már a feladat megoldása következik. Ugyanakkor nem szükséges nagyon sok előzetes ismeretanyag, ezzel magyarázható, hogy a legtöbb tanuló a szöveges feladatok megoldását próbálgatással végzi (ezt a nemzetközi kutatási eredmények is alátámasztják). A hamis feltételezések nagy előnye, hogy ezeket a próbálgatásokat tudatosabbá teszi, ezért ezt a módszert szisztematikus próbálgatásnak is lehet nevezni.

A hamis feltételezések bevezetésével kapcsolatban elért eredmények

A hamis feltételezések módszerének bevezetésével kapcsolatos első próbálkozások a 2014/15 tanévben történtek a veresegyházi Kálvin Téri Református iskolában.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

Kezdetben ezt a módszert az általam tanított 8. osztályos tanulók körében szakköri foglalkozásokon ismertettem, ennek eredményeiről egy szakmódszertani tanulmányban számoltam be.[23] Mivel a 8. évfolyamon az algebrai módszerek tanítása már kötelező tananyagnak minősül, ezért a szöveges feladatok egyenletekkel való megközelítését a tanórai tanulás keretei között megtettük. A szakköri foglalkozások keretében a tanulók a szöveges feladatoknak a hamis feltételezések módszerével való megközelítését ismerték meg egy 9 órás tevékenységsorozat keretén belül, heti egy órában. Az első négy órában ismertettem a hamis feltételezések módszerét és csoportos foglalkozások keretében oldottunk meg olyan típusú szöveges feladatokat, amelyekkel a tanulók nem találkoztak tanórai körülmények között. Ezek során a tanulók megértették a hamis feltételezések módszerének a lényegét, valamint összehasonlítottuk ezt a megoldási módszert a hagyományos algebrai módszerekkel, elemezve az egyes módszerek előnyeit, illetve hátrányait. A következő 5 tanórában a tanulók önállóan oldottak meg feladatokat, az eredményeket frontálisan egyeztettük és levontuk a megfelelő következtetéseket. Az eredmények elemzése során kiderült, hogy a 8. osztályos tanulók az újonnan tanult hamis feltételezések módszerét szívesen alkalmazzák, viszont nem kell attól tartani, hogy ez teljesen kiszorítaná a szöveges feladatok algebrai úton való megközelítését. Egy másik érdekes megállapítás volt, hogy a matematikából jó vagy közepes szinten teljesítő tanulók teljesítménye egyes feladatok esetében jobbnak bizonyult a jeles osztályzatú tanulókénál. Ennek egy lehetséges magyarázata, hogy az említett tanulók a hamis feltételezések módszerével gondolkodva jó választ adtak, míg a náluk képzettebb társaik megpróbáltak algebrai módszerekkel dolgozni és helytelenül írtak fel egyenleteket ezekhez az újszerűnek számító feladatokhoz. Ugyanakkor voltak olyan feladatok is, amelyek esetében a tanulók döntő többsége algebrai úton adta meg a helyes megoldást, fölöslegesnek tartották elvégezni a hamis feltételezések módszerével kapcsolatban felmerülő többletszámításokat. Itt hangsúlyoztuk az algebrai módszereknek azt a nagy előnyét, hogy célirányosan vezetnek a megoldáshoz. Előfordultak olyan esetek is, amikor a tanulók a hamis feltételezések alkalmazása során áttértek a sorozatos próbálgatásokba. Ilyenkor megbeszéltük, hogy a hamis feltételezések módszerének lényege abban rejlik, hogy legfeljebb két feltételezés után próbálunk következtetni a helyes megoldásra, a további próbálgatások fölöslegesek.

Az előzőekben bemutatott kutatás tapasztalataiból kiindulva a 2021/22 tanévben szintén a veresegyházi Kálvin Téri Református Általános Iskolában tanórai keretek között próbálkoztam a módszer ismertetésével. Ebben az esetben a kutatásban az iskola 6. évfolyamának 50 tanulója vett részt. A hatodikos korosztályban lévő tanulók többsége még abban a stádiumban van, hogy nem mindig képes absztrahálni, elvonatkoztatni, a bonyolultabb szöveges feladatok lefordítása az algebra nyelvére és szimbólumrendszerére pedig viszonylag nehézkes és bonyolult. Ezért nagyon kézenfekvő a szöveges feladatok gyakorlati szemmel történő megközelítése. Kezdetben négy tanóra keretében feladatokat oldottunk meg hagyományos aritmetikai módszerekkel, majd a következő négy tanórában az

[23] FÜLÖP Zsolt: *Regula falsi in lower secondary school education*, Teaching Mathematics and Computer Science 14, Vol. 2. 2016.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

egyenletek megoldási módszereivel foglalkoztunk. A következőkben 6 tanóra keretében szöveges feladatokat oldottunk meg, ahol a hangsúlyt elsősorban az algebrai eszközök (egyenletek) alkalmazására fektettük. Tehát az előzőekben említett tanórákon elsősorban a hagyományos tanmenetekben szereplő tananyagot dolgoztuk fel. Ezt követően két tanórában bemutattam a hamis feltételezések módszerét, majd egy külön tanórában a tanulók egy 6 feladatból álló feladatsort oldottak meg. A felmérés előtt kiemeltem, hogy az eddig tanult bármilyen megoldási módszerrel próbálkozhatnak. A fentiekben ismertetett tevékenységekről és a felmérés eredményeiről egy részletes leírás a doktori értekezésemben szerepel.[24]

A továbbiakban, már a Gödöllői Református Líceum Gimnázium tanáraként, két tanévben is elvégeztem ugyanazokat a kutatásokat a 7. évfolyamon. Az említett hat osztályos gimnáziumban az újonnan érkezett 7. osztályos tanulókra jellemző, hogy egyesek 6. osztályos korukban már tanulták a szöveges feladatok algebrai úton való megközelítését is, míg mások még a hagyományos aritmetikai módszerek közül sem ismerik mindegyiket. Ezért minden tanévben a szöveges feladatok megoldásának során a legnagyobb kihívás a tanulók tudásának „egységesítése”. Erre a szöveges feladatok megoldására vonatkozó fejezet tanítása során kerül sor. Ebben a fázisban mutattam be a hamis feltételezések módszerét is, amely természetesen minden tanuló számára újdonságnak számított. A fejezet végén kerül sor annak a felmérésnek az elvégzésére, amelyet a Kálvin Téri Református Általános Iskola 6. osztályos tanulóival is elvégeztem. A két tanév során ez a tevékenység összesen 70 tanulót érintett. Ezzel párhuzamosan a felmérést megírta még 63 hetedik évfolyamos és 53 nyolcadik évfolyamos tanuló is, ezeket a tanulókat tanár kollégáim tanították az érvényben levő tantervek szerint. A felmérés részleteiről egy szakmódszertani tanulmányban számoltam be.[25] A következőkben röviden összefoglalom az említett tevékenységek eredményeit. A táblázatokban a 6. osztályos, illetve az általam tanított 7. osztályos tanulókat kísérleti csoportként jelöltem meg, míg a kollégáim által tanított csoportokat tekintjük kontroll-csoportnak. Természetesen a két csoport közötti különbség, hogy míg a kísérleti csoport tagjai ismerték a hamis feltételezések módszerét, addig a kontroll-csoport tagjai csak a hagyományos aritmetikai, illetve algebrai módszerekre hagyatkozhattak. A tanulók teljesítményére vonatkozóan egy táblázatban foglaltuk össze a feladatok megoldásának helyességére vonatkozó összesített eredményeket. A feladatonkénti elemzésektől most eltekintünk, ezek megtalálhatók az említett tanulmányban.

	6. évfolyam kísérleti csop.	7. évfolyam kísérleti csop.	7. évfolyam kontroll csop.	8. évfolyam kontroll csop.
Jó válasz	59 %	84 %	35 %	67 %
Rossz válasz	28 %	15 %	43 %	24 %
Nem foglalk.	13 %	1 %	22 %	9 %

A megoldások hatékonysága a felmérés során (5. táblázat)

[24] FÜLÖP Zsolt: *Feladatmegoldási módszerek összehasonlító vizsgálata a pedagógus, illetve a diák rendelkezésére álló ismeretek birtokában,* Doktori értekezés, Bolyai Intézet, Szeged, 2017.
[25] FÜLÖP Zsolt: *Regula falsi in lower secondary school education II*, Teaching Mathematics and Computer Science 18, Vol. 2. 2020.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

A következő táblázatban azoknak a jó választ adó tanulók által alkalmazott módszereknek a százalékos megoszlását ismertetjük. Ebben a táblázatban viszonyítási alapnak az adott csoportban született jó válaszok számát tekintjük.

	6. évfolyam kísérleti csop.	7. évfolyam kísérleti csop.	7. évfolyam kontroll csop.	8. évfolyam kontroll csop.
Algebra	1 %	39 %	43 %	66 %
Aritmetika	13 %	20 %	30 %	13 %
Próbálgatás	35 %	2 %	27 %	19 %
Hamis feltételezések	51 %	39 %	0 %	2 %

A jó válaszok esetében alkalmazott módszerek (6. táblázat)

Amint a fenti táblázatból kitűnik, a 6. osztályos tanulók többsége a hamis feltételezések módszerével vagy próbálgatással adott helyes választ. A 7. osztályos kontroll-csoportban is viszonylag nagy volt a hamis feltételezésekkel kísérletezők aránya, viszont ugyanolyan részarányban voltak azok is, akik algebrai eszközökkel adtak helyes választ. Az algebrai eszközök legnagyobb arányban a hetedik, illetve nyolcadik évfolyamosok kontroll csoportjában alkalmazták. Ez természetesnek tekinthető, mivel ők nem ismerték a hamis feltételezések módszerét, viszont közöttük is elég nagy volt a próbálgatással dolgozó tanulók aránya. A 7. évfolyam kísérleti csoportjának kimagasló teljesítménye bizonyítja, hogy ők voltak azok, akiknek sikerült a feladatok többségéhez a leghatékonyabb megoldási módszert megtalálni. A táblázatból az is kitűnik, hogy a 6. évfolyamos tanulók még nincsenek azon a szinten, hogy megfelelő módon tudják alkalmazni az algebrai módszereket, sőt a hagyományos aritmetikai módszerek alkalmazása helyett is inkább próbálgatnak vagy a hamis feltételezések módszeréhez folyamodnak. A 7. évfolyam kísérleti csoportját tekintve látható, hogy a próbálgatások helyett már tudatosan alkalmazzák a hamis feltételezések módszerét és egyre többen vannak azok, akik inkább az algebrai, illetve aritmetikai eszközökhöz folyamodnak.

A függvénytani megközelítés és a hamis feltételezések módszere

Több kutatás rávilágít arra, hogy az algebra bevezetését függvénytani alapokra kell helyezni. Yerushalmy[26] támogatja azt a véleményt, hogy a függvény fogalmának már az algebratanítás kezdeteitől jelen kell lennie az iskolai tananyagban. A számítógéppel támogatott oktatás lehetővé teszi a függvények értéktáblázatának és grafikonjának az elkészítését, ezért több kutató is javasolja az algebra tanításának függvénytani alapokra helyezését. Ebben a megközelítésben az olyan fogalmak, mint például változók, ismeretlenek, egyenletek, stb. új értelmet nyernek.[27]

[26] YERUSHALMY, Michal: *Problem solving strategies, A longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra*, Educational Studies in Mathematics, vol. 43, 2000.

[27] KIERAN, Carolyn–BOILEAU, André–GARANCON, Maurice: *Introducing algebra by means of a technology-supported functional approach*, Approaches to Algebra, Perspective for Research and Teaching, Dordrecht, 1996.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

Így az új technológiáknak köszönhetően az egyenletek megoldásának tanítása már a kezdetektől két külön irányban valósulhat meg: függvénytani megközelítésben (a függvények grafikonjának elemzésével) és hagyományos egyenletmegoldó módszerekkel (lebontogatással, illetve mérleg-elvvel). Kutatók egy csoportja[28] megvizsgálta a 13 éves tanulók problémamegoldó képességeit mindkét megközelítésben olyan szöveges feladatok esetében, amelyek algebrai modellje az $Ax + B = Cx + D$ egyenlet. Véleményük szerint ezeknek a feladatoknak a megközelítését függvénytani alapokra helyeznék az $y = Ax + B$ és $y = Cx + D$ kétváltozós értéktáblázatok elkészítésével. Ezt követően a tanulók az értéktáblázatok összehasonlításával és a próbálgatás módszerével (ahol a változóknak különböző értékeket adnának) vagy a függvények grafikonjának elkészítésével adnák meg a helyes választ. Ennek a módszernek az előnye, hogy a tanulók megtanulják hogyan kell helyesen értelmezni a változó fogalmát, amely ebben az esetben különböző (általuk választott) számokat jelent. Ezzel ellentétben az egyenletek felírása esetén az x -szel jelölt ismeretlen segítségével kell megadják az összefüggéseket a feladat adatai között, amely jóval nagyobb absztrahálási képességeket feltételez. Felvetődik a kérdés, hogy a hamis feltételezések módszeréről (amely tipikusan aritmetikai eszköz) hogyan történhet az áttérés a szöveges feladatok algebrai úton történő megoldására? A módszer nagy hasonlatosságot mutat a függvénytani megközelítéshez, ugyanis ebben az esetben is a feladatban szereplő ismeretlen mennyiségeknek különböző értékeket tulajdonítunk, anélkül, hogy ezeket betűszimbólumokkal látnánk el. Tekintsük például a következő feladat egy lehetséges megoldását.

Feladat: *Két könyvespolcon könyvek vannak, a másodikon háromszor annyi, mint az elsőn. Ha a másodikról elveszünk 13 könyvet, az elsőre pedig felteszünk még 10 könyvet, akkor a másodikon kétszer annyi könyv lesz, mint az elsőn. Hány könyv van a két könyvespolcon külön-külön?*

A feladat hamis feltételezésekkel történő megoldását az alábbi táblázatba foglaltuk.

	1. polc	2. polc	1. polc +10	2. polc - 13	Hiba
1. Feltételezés	10	30	20	17	23
2. Feltételezés	11	33	21	20	22
Megoldás	33	99	43	86	0

A feladat megoldása hamis feltételezések módszerével (7. táblázat)

Látható, hogy a feltételezések alapjául az első polc tartalmát választottuk, majd ennek változtatásával következtettünk a hiba alakulására. A következőkben próbáljuk elkészíteni a fenti táblázatot úgy, hogy az első polc tartalmát változóként kezeljük és a táblázat fejlécében szereplő mennyiségeket ennek a segítségével fejezzük ki. Így a következő táblázathoz jutunk.

[28] FARMAKI, Vasiliki–KLAOUDATOS, Nikos–VERIKIOS, Petros: *From functions to equations: introduction of algebraic thinking to 13 year-old students, International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 28th, Bergen, Norway, July 14-18, 2004.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

	x	$3x$	$x+10$	$2\cdot(x+10)$	$3x-13$	Hiba
1. Feltételezés	10	30	20	40	17	23
2. Feltételezés	11	33	21	42	20	22
Megoldás	33	99	43	86	86	0

A feladat megoldása értéktáblázattal (8. táblázat)

Belátható, hogy az x változónak azt az értékét keressük, amelyre a $2\cdot(x+10)$ és $3x-13$ kifejezések helyettesítési értéke egyenlő lesz. Ez valójában a $2\cdot(x+10)=3x-13$ egyenlet megoldását jelenti.

A szöveges feladatoknak a fentiekben bemutatott megközelítése lehetővé teszi a különböző problémaszituációknak táblázatos formában történő reprezentációját, a változók bevezetését, valamint az összefüggések megtalálása után az egyenlet helyes felírását. A feladat megoldásának kezdetén a figyelem a táblázatban szereplő számadatokra irányul, az x betűszimbólum pedig inkább változót, mint ismeretlent jelöl. Ilyen módon azok a feladatok, amelyek megoldását egyenletek felírásához kötjük kétféle módon is megközelíthetők: aritmetikai számításokkal a táblázat számadatai közötti összefüggésekből kiindulva, illetve egyenletek felírásával, amelyekhez az alapot szintén a táblázatban szereplő összefüggések szolgáltatják.

Összegzés

A kutatások lebonyolítása során megerősítést nyert az a véleményem, hogy a hamis feltételezések módszerét tanítani lehet az általános iskolai oktatásban. Ez nem helyettesítheti, hanem hatékonyan kiegészítheti a tanult aritmetikai és algebrai módszereket. Egy olyan alternatívát kínál, amelyet főként azoknál a feladatoknál lehet alkalmazni, amelyek aritmetikai vagy algebrai úton való megközelítése viszonylag bonyolult egy adott évfolyam számára. Egy évfolyamon belül lehetőséget teremt a differenciálásra: azok a tanulók, akiknek az algebrai módszerek elsajátítása nehézkesen történik, dolgozhatnak a hamis feltételezések módszerével, miközben társaik már az algebra eszközeit használják. A hamis feltételezések módszere hatékony eszköz a procedurális gondolkodás fejlesztésére és a strukturális gondolkodás megalapozására. A tapasztalatok szerint a magasabb évfolyamokon az algebrai ismeretek megszilárdulásával fokozatosan háttérbe szorul a hamis feltételezések módszere. Tehát nem kell attól tartani, hogy ez a módszer kirekeszti a hagyományos aritmetikai és algebrai módszereket.

Irodalom

EGODAWATTE, Gunawardena: *Algebraic procedures used by 14 to 15 year old Sri Lankan students*, Dean's Graduate Student Research Conference, Canada, 2008.

FARMAKI, Vasiliki–KLAOUDATOS, Nikos–VERIKIOS, Petros: *From functions to equations: introduction of algebraic thinking to 13 year-old students, International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 28th, Bergen, Norway, July 14–18, 2004.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

FILLOY, Eugenio–ROJANO, Teresa: *From an arithmetical to an algebraic thought,* Proceedings of the 6th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Wisconsin, Madison, 1984.
FILLOY, Eugenio–ROJANO, Teresa: *Solving equations, the transition from arithmetic to algebra,* For the Learning of Mathematics, 9 (2), 1989.
FÜLÖP Zsolt: *Transition from arithmetic to algebra in primary school education*, Teaching Mathematics and Computer Science, 13/2, 2015.
FÜLÖP Zsolt: *Regula falsi in lower secondary school education*, Teaching Mathematics and Computer Science 14, Vol. 2. 2016. DOI: 10.5485/TMCS.2016.0422
FÜLÖP Zsolt: *Feladatmegoldási módszerek összehasonlító vizsgálata a pedagógus, illetve a diák rendelkezésére álló ismeretek birtokában,* Doktori értekezés, Bolyai Intézet, Szeged, 2017.
FÜLÖP Zsolt: *Regula falsi in lower secondary school education II*, Teaching Mathematics and Computer Science 18, Vol. 2. 2020. DOI: 10.5485/TMCS.2020.0512
HERSCOVICS, Nicolas–LINCHEVSKI, Liora: *A cognitive gap between arithmetic and algebra,* Educational Studies in Mathematics 27, 1994. DOI: 10.1007/BF01284528
KANGSHEN, Shen–CROSSLEY, N. John–LUN, Anthony: *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, Oxford University Press, Oxford, 1999.
KIERAN, Carolyn: *Concepts associated with the equal symbol*, Educational Studies in Mathematics, 1981.
KIERAN, Carolyn: *The early learning of algebra: a structural perspective*, Research issues in the learning and teaching of algebra, 1989.
KIERAN, Carolyn–BOILEAU, André–GARANCON, Maurice: *Introducing algebra by means of a technology-supported functional approach*, Approaches to Algebra, Perspective for Research and Teaching, Dordrecht, 1996.
KÜCHEMANN, Dietmar: *Algebra, Children's Understanding of Mathematics*, 11–16, Murray, London, 1981.
LINCHEVSKI, Liora–HERSCOVICS, Nicolas: *Cognitive obstacles in pre-algebra*, Proceeding of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lisbon, 1994.
MARÓTHI György: *Arithmetica*, Debrecen, 1782.
NATHAN, Mitchell J.–KINTSCH, Walter–YOUNG, Emilie: *A theory of algebra word-problem comprehension and its implication for the design of learning environments*, Cognition and Instruction, 1992.
NORTON, Stephen J.–COOPER Tom J.: *Students' perceptions of the importance of closure in arithmetic: implications for algebra*, 2001.
SIMON, Herbert A.: *Cognitive processes in solving algebra word problems*, Problem Solving: Research, Method and Theory, Wiley, New York, 1966.
SFARD, Anna: *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 1991.

DOI: 10.55072/DN.2023.1.5

STACEY, Kaye–MACGREGOR, Mollie: *Using algebra to solve problems: selecting, symbolising, and integrating information*, University of Melbourne, Melbourne, 1996.

STACEY, Kaye–MACGREGOR, Mollie: *Ideas about symbolism that students bring to algebra*, The Mathematics Teacher, 1997.

URSINI Sonia, TRIGUEROS Maria: *Understanding of different uses of variable*, A study with starting college students, Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lahti, Finland, 1997.

VERGNAUD, Gérard–KAVAFIAN N.: *From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process*, Proceedings of the Fourteens PME Conference, Mexico: International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1990.

YERUSHALMY, Michal: *Problem solving strategies, A longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra*, Educational Studies in Mathematics, vol. 43, 2000.

Abstract

REGULA FALSI METHOD IN LOWER SECONDARY SCHOOL EDUCATION

Many research studies have shown that most students – when they have to solve word problems – do not appeal to the learned arithmetical and algebraic methods, and they handle the problem by numerical checking methods, such as „guess-and-check" or „trial-and-error". These are flexible strategies that are often used when no other strategy is immediately obvious, and their main advantage is that they do not require a lot of knowledge. However, in some cases, the usage of these methods involves a large amount of calculus to find a solution. The false position method or regula falsi is a specific arithmetical problem solving method used to solve word problems with two or three unknowns. In our opinion, this method is useful in the lower secondary school educational processes, especially to reduce the great number of random trial-and-error problem solving attempts among the lower secondary school pupils. Another important fact is that while assigning a value to a variable and verifying its accuracy, students are developing functional reasoning as it entails recognising a relation between variables even if such relation is not always expressed in the formal language of algebra. In this presentation, we will give the results of our studies concerning the effects of teaching false position method on students' problem solving strategies. We investigated the advantages and disadvantages of the false position method in the solutions of word problems. The findings from our research works suggest that the false position method approach gives the beginners a satisfactory way of solving problems, while the typical solution by equation demands maturity on the part of students and could be postponed for a later time.