

KIS ÁLLANDÓ GÖRBÜLETŰ, KÖRALAKÚ VÉKONY LEMEZEK ALAKVÁLTOZÁSÁRÓL

LOVASS-NAGY VIKTOR

ÖSSZEFOGLALÁS

A szerző e dolgozat céljául tűzi ki kis (pozitív) állandó görbületű, köralakú vékony lemezeknek a felületre merőleges, egyenletesen eloszló állandó nagyságú erő (hidrosztatikus nyomás) hatására bekövetkező deformációjának és feszültségeloszlásának vizsgálatát, a lemez középfelületének nyúlását is figyelembe véve.

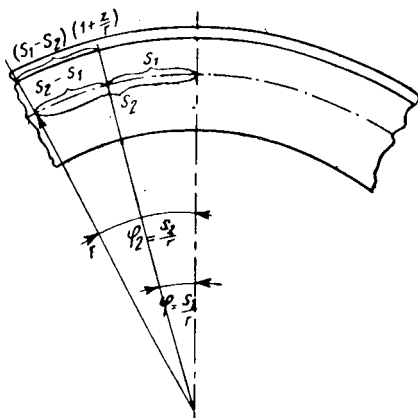
A lemezt kerületén befogottnak, vagy megtámasztottnak és rögzítettnek tételezve fel, a terhelés és a kerületi feltételek szimmetriája miatt terhelt állapotban is forgásfelület alakú lemezeknek egy meridián-metszete deformációjára lehet szorítkozni. A lemezre merőleges irányú nyúlást elhanyagolva, továbbá feltételezve, hogy egyrészt a középfelület és az azzal terheletlen állapotban párhuzamos felületek a deformáció után is párhuzamos felületereget alkotnak, másrészt, hogy a lemez deformálatlan állapotában a gömb középpontjába mutató egyenesek a deformáció során a fenti párhuzamos felületek normálisába mennek át, a lemez egy tetszőszerinti pontjának lehajlását befogott kerület esetén a (36) képlet, megtámasztott és rögzített kerület esetén pedig a (47) képlet szolgáltatja, ahol S jelenti a középfelület meridiángörbéjének a középponttól a kerületig terjedő darabjának hosszát. A normálfeszültségek a középfelület bármely pontjában ugyanakkorának adódnak, amint az a (39) és (48) képletekből látható.

Jelen dolgozat célja, hogy kis (pozitív) állandó görbületű, köralakú vékony lemezeknek a felületre merőleges, egyenletesen eloszló állandó nagyságú erő (hidrosztatikus nyomás) hatására bekövetkező deformációját és feszültségeloszlását a rugalmasságtan ismert módszereinek felhasználásával, de a lemez középfelületének nyúlását is figyelembe véve vizsgálja. Hasonló feladattal foglalkozik *G. B. Biezeno* a *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*-ban közölt egyik munkájában [1], ahol kis görbületű, köralakú lemezeknek a középpontban ható állandó koncentrált erő következtében létrejövő deformációját teszi vizsgálat tárgyává, ugyancsak a középfelület nyúlásának figyelembevétele mellett. *Biezeno* idézett dolgozata értékes tanulsággal szolgál a számításaink alapját képező differenciálegyenletek megkonstruálása során, ám mindjárt a feladat független változóinak megválasztásakor alkalmazott eltérő eljárásunkkal a számításokat egyszerűbb útra fogjuk terelni.

Az állandó hidrosztatikus nyomás által terhelt lemez deformációját kétféle kerületi feltétel mellett fogjuk vizsgálni: egyrészt abban az esetben, amikor a lemez egész kerületén befogott (befalazott); másrészt, amikor a lemez kerülete megtámasztott és rögzített, pl. egy körhenger alakú csőbe szorítjuk bele a lemezt.

A terhelés és a kerületi feltételek szimmetriája következtében a lemez terhelt állapotában is forgásfelület-alakú marad, tehát elegendő a meridián-

metszet deformációját vizsgálunk. A lemez középfelülete meridiángörbéjének (a továbbiakban röviden: »Középgörbe«) tetszősszerinti pontját a lemez terheletlen állapotában egyetlen adattal: a lemez középpontjától a körív mentén mért s távolsággal határozhatjuk meg. (L. az 1. ábrát.) A középgörbén kívül fekvő tetszősszerinti lemezpont helyzetét viszont két adattal: a középgörbétől mért merőleges távolságával (z) és a középgörbére való merőleges vetületének a középponttól a körív mentén mért s távolságával adjuk meg.



1. ábra

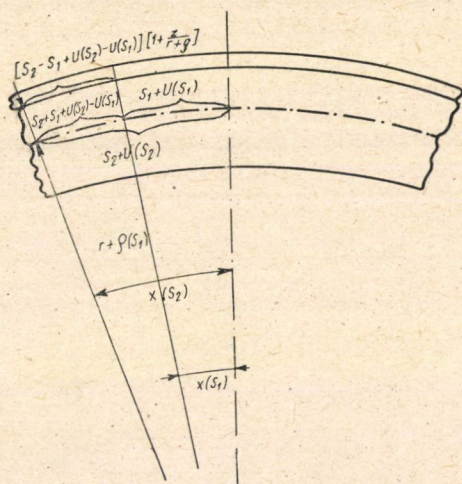
A terheletlen állapotában göombsüveg alakú lemez valamennyi pontjának helyzete az s és z koordinátákkal egyértelműen meg van határozva. (A terheletlen lemez középfelületének r görbületi sugara adott állandó értékkel bír.)

Tárgyalásunkban a deformációt illetően a következő, a lemezelméletben szokásos egyszerűsítéseket vesszük alapul:

1. A z irányú nyúlást figyelmen kívül hagyjuk.
2. A középgörbe és az ezzel párhuzamos görbék a deformáció után is párhuzamos görbe-sereget alkotnak.
3. Deformálatlan állapotban a gömb középpontjába mutató egyenesek a deformáció során a fenti párhuzamos görbék orthogonális trajektóriáiba mennek át.

A deformálatlan állapotban s, z koordinátákkal adott pont helyzetét a p hidrosztatikus nyomás (kg/cm^2) által deformált (többé már nem göombsüveg alakú) lemezben a meridián-görbére való vetületének a szimmetria-tengelytől (a görbeív mentén) mért $s + u(s)$ távolságával, továbbá a deformált középfelület normálisának a szimmetria-tengellyel bezárt $\chi(s) = \varphi + \psi$ szögével jellemezzük. (L. a 2. ábrát.) A z koordináta egyszerűsítő feltevésünk értelmében változatlan marad.

Az $u(s)$ és $\psi(s)$ függvények meghatározása céljából képezzük a deformáció során létrejövő fajlagos nyúlások kifejezését. A középgörbe $s_1 \leq s \leq s_2$ szakaszának deformált állapotban mért átlaggörbületét $\frac{1}{r + \rho}$ -val jelölve, egy, a középgörbétől z távolságra fekvő párhuzamos görbeív nyúlásait az 1. és 2. ábrák figyelembevételével a következőképpen nyerhetjük:



2. ábra

A meridiángörbe-menti nyúlás :

$$\varepsilon_m \cong \frac{[s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1)] \left[1 + \frac{z}{r + \varrho}\right] - [s_2 - s_1] \left[1 + \frac{z}{r}\right]}{\left[1 + \frac{z}{r}\right] [s_2 - s_1]}.$$

A középgörbe deformált ívének átlag-görbülete :

$$\frac{1}{r + \varrho} = \frac{\chi(s_2) - \chi(s_1)}{s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1)},$$

tehát a meridián-görbe menti átlagos nyúlás :

$$\begin{aligned} \varepsilon_m \cong & \frac{[s_2 - s_1] \left[1 + z \frac{\chi(s_2) - \chi(s_1)}{s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1)} - \left(1 + \frac{z}{r}\right)\right]}{\left[1 + \frac{z}{r}\right] [s_2 - s_1]} + \\ & + \frac{[u(s_2) - u(s_1)] \left[1 + z \frac{\chi(s_2) - \chi(s_1)}{s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1)}\right]}{\left[1 + \frac{z}{r}\right] [s_2 - s_1]}. \end{aligned}$$

Mivel :

$$\lim_{s_2 \rightarrow s_1} \frac{\chi(s_2) - \chi(s_1)}{s_2 - s_1} = \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \frac{\frac{s_2}{r} + \psi(s_2) - \frac{s_1}{r} + \psi(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{1}{r} + \psi'(s),$$

tehát az átlagos nyúlásból $s_2 \rightarrow s_1$ határátmenettel nyert lokális nyúlás pontos értéke :

$$\varepsilon_m = \frac{z \left[\frac{1}{r} + \psi'(s) \right] + u'(s) \left[1 + z \frac{\frac{1}{r} + \psi'(s)}{1 + u'(s)} \right]}{1 + \frac{z}{r}}; \quad u' = \frac{du(s)}{ds}.$$

A tört számlálójában a kijelölt műveleteket elvégezve és összevonva nyerjük, hogy

$$(1) \quad \varepsilon_m = \frac{z\psi'(s) + u'(s)}{1 + \frac{z}{r}}.$$

A meridiángörbe síkjára merőleges irányban a nyúlást a rugalmasságtanban használatos közelítés alapján a következő képlet szolgáltatja :

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi \left\{ s + u(s) + z \left[\frac{s}{r} + \psi(s) \right] \right\} - 2\pi s \left\{ 1 + \frac{z}{r} \right\}}{2\pi s \left\{ 1 + \frac{z}{r} \right\}}.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve és egyszerűsítve :

$$(2) \quad \varepsilon_t = \frac{u(s) + z\psi(s)}{s \left\{ 1 + \frac{z}{r} \right\}}.$$

Amennyiben a lemezvastagságot a görbületi sugárhoz képest oly kicsinek tekintjük, hogy viszonyuk négyzete már elhanyagolható, akkor :

$$\frac{1}{1 + \frac{z}{r}} \cong 1 - \frac{z}{r}$$

és a nyúlások képletei :

$$(3) \quad \varepsilon_m = \left[1 - \frac{z}{r} \right] [u'(s) + z\psi'(s)]$$

$$(4) \quad \varepsilon_t = \left[1 - \frac{z}{r} \right] \left[\frac{u(s)}{s} + z \frac{\psi(s)}{s} \right].$$

A rugalmasságtan ismert képletei alapján a nyúlásokból kiszámíthatjuk a meridiángörbe síkjába eső (σ_m) és az arra merőleges (σ_t) húzó-nyomó feszültségeket : [2]

$$\sigma_m = \frac{Em^2}{m^2 - 1} \left(\varepsilon_m + \frac{1}{m} \varepsilon_t \right)$$

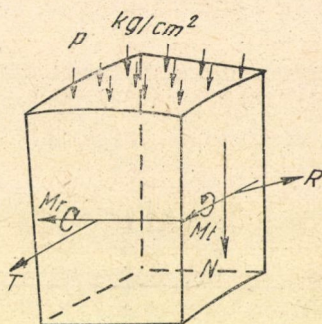
$$\sigma_t = \frac{Em^2}{m^2-1} \left(\frac{1}{m} \varepsilon_m + \varepsilon_t \right),$$

azaz, behelyettesítve a (3) és (4) kifejezésekből nyert értékeket :

$$(5) \quad \sigma_m = \frac{Em^2}{m^2-1} \left[1 - \frac{z}{r} \right] \left[u' + z\psi' + \frac{1}{m} \left(\frac{u}{s} + z\frac{\psi}{s} \right) \right]$$

$$(6) \quad \sigma_t = \frac{Em^2}{m^2-1} \left[1 - \frac{z}{r} \right] \left[\frac{1}{m} (u' + z\psi') + \frac{u}{s} + z\frac{\psi}{s} \right].$$

Most a húzó-nyomó feszültségek és az $u(s)$, $\psi(s)$ függvények ismeretében megszerkesztjük a hosszegységre vonatkoztatott feszültség-eredőket, illetve nyomaték-eredőket és ezek alapján felírjuk a lemez-elem egyensúlyát kifejező egyenleteket, ilymódon közvetlenül a probléma differenciál-egyenletrendszeréhez fogunk jutni. (A lemez-elem egy lapjára ható feszültségeknek, valamint nyomatékoknak általában három derékszögű komponensük van. Ezek közül mindazok, melyek a 3. sz. ábrán nem szerepelnek, a tengelyszimmetria folytán zérussal egyenlők.)



3. ábra

Először képezzük a σ_m és σ_t nomál-feszültségeknek R , ill. T (hosszegységekre vonatkoztatott) eredőit, továbbá a hidrosztatikus nyomás következtében jelentkező (ugyancsak hosszegységekre vonatkoztatott) N tangenciális feszültség-eredőt, valamint az M_r és M_t (hosszegységekre vonatkoztatott) feszültség-nyomatékokat. A hosszegységekre vonatkoztatott nomál-feszültség-eredők a következő képletből nyerhetők :

$$(7) \quad R = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\sigma_m 2\pi \left[s + u + z \left(\frac{s}{r} + \psi \right) \right]}{2\pi(s + u)} dz$$

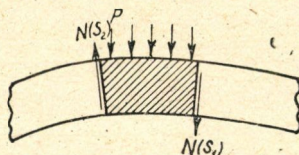
$$\begin{aligned}
 (8) \quad T &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\sigma_t \left[s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1) \right] \left[1 + \frac{z}{r+c} \right]}{s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1)} dz = \\
 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_t \left[1 + z \frac{\frac{1}{h} + \psi'}{1 + u'} \right] dz.
 \end{aligned}$$

Az integrálásokat elvégezve és a lemezvastagság kicsinységére való tekintettel a h^3 -t a h -hoz viszonyítva elhanyagolva, nyerjük, hogy

$$(9) \quad R = h \frac{Em^2}{m^2 - 1} \left(u' + \frac{1}{m} \cdot \frac{u}{s} \right)$$

$$(10) \quad T = h \frac{Em^2}{m^2 - 1} \left(\frac{1}{m} u + \frac{1}{m} \cdot \frac{u}{s} \right).$$

A tangenciális feszültségeredő (nyíróerő) meghatározását legcélszerűbb oly módon elvégezni, hogy (a 4. ábra alapján) felírjuk a lemezre merőlegesen ható erők egyensúlyi feltételét.



4. ábra

$$(11) \quad ps_2^2\pi - ps_1^2\pi + N(s_2) 2s_2\pi - N(s_1) 2s_1\pi = 0.$$

Az egyenletet $\pi(s_2 - s_1)$ -gyel osztva, $s_2 \rightarrow s_1$ határátmenettel nyerjük, hogy

$$(12) \quad sN(s) = -\frac{ps^2}{2}$$

és ebből

$$(13) \quad N(s) = -\frac{ps}{2}.$$

A hosszegységre vonatkoztatott feszültség-nyomatékok a 3. ábra alapján megszerkesztett alábbi egyenletekből nyerhetők:

$$(14) \quad M_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\sigma_m z 2\pi \left[s + u + z \left(\frac{s}{r} + \psi \right) \right]}{2\pi [s + u]} dz$$

$$(15) \quad M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\sigma_t z 2\pi \left[s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1) \right] \left[1 + \frac{z}{r + \rho} \right]}{2\pi [s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1)]} dz$$

Az integrálás elvégzése után, az eredményben a h ötödik hatványát a harmadik hatványhoz képest elhanyagolva, továbbá az

$$\frac{\frac{s}{r} + \psi}{s + u} = \frac{\varphi + \psi}{s + u} = \frac{1}{r + \rho}$$

kifejezésnek az egységhez képest relatív kicsiny voltára való tekintettel nyerjük, hogy

$$(16) \quad M_t = \frac{h^3}{12} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \left[\psi' + \frac{1}{m} \frac{\psi}{s} \right]$$

$$(17) \quad M_r = \frac{h^3}{12} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \left[\frac{1}{m} \psi' + \frac{\psi}{s} \right]$$

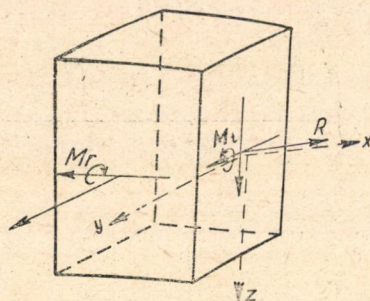
vagy, bevezetve a $B = \frac{h^3}{12} \frac{E m^2}{m^2 - 1}$ »hajlítási szilárdság« [3] fogalmát, a (hosszegységre vonatkoztatott) feszültség-nyomatékok képlete így írható:

$$(18) \quad M_t = B \left[\psi' + \frac{1}{m} \frac{\psi}{s} \right]$$

$$(19) \quad M_r = B \left[\frac{1}{m} \psi' + \frac{\psi}{s} \right]$$

A (hosszegységre vonatkoztatott) feszültség-eredők és feszültségnyomatékok ismeretében a lemez-elem egyensúlyát kifejező egyenletek a következőképpen írhatók fel:

Válasszuk az egyensúlyi egyenletek felírásához koordinátatengelyeknek az R és N feszültségeredőkkel párhuzamos irányú x és z tengelyeket és az x, z síkra merőleges y tengelyt. (L. az 5. ábrát.) Ebben az x, y, z koordinátarendszerben felírva a lemez-elemre ható erők egyensúlyának feltételeit, az y tengellyel és a z tengellyel párhuzamos erőkomponensek egyensúlyát kifejező egyenletek csupán a nyíróerő és a hidrosztatikus nyomás közti már ismert összefüggést, illetve a »gyűrűs-feszültségek« y irányú komponenseinek egyensúlyának tényét foglalják magukban. Az ismeretlen $u(s)$ és $\psi(s)$ függvények



5. ábra

meghatározása szempontjából csupán az x tengellyel párhuzamos erőkomponensek egyensúlyát kifejező egyenlet, továbbá a parallelkör érintője körül mint tengely körül vett nyomaték-komponensek algebrai összegének eltűnését kifejező egyenlet jön számításba :

$$(20) \quad \frac{d}{ds} [R(s+u)] - T = 0$$

$$(21) \quad \frac{d}{ds} [M_t(s+u)] - N(s+u) - M_r = 0.$$

Az R s mennyiség mellett Ru -t, M_t s mellett $M_t u$ -t, N s mellett Nu -t elhanyagolva a (20) és (21) egyenletek a következőképpen egyszerűsödnek :

$$(22) \quad s \frac{d}{ds} R + R - T = 0$$

$$(23) \quad s \frac{d}{ds} M_t + M_t - sN - M_r = 0.$$

A (9), (10), valamint (16), (17) összefüggések felhasználásával

$$(24) \quad s \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{du}{ds} - \frac{1}{s} u = 0$$

$$(25) \quad s \frac{d^2 \psi}{ds^2} + \frac{d\psi}{ds} - \frac{1}{s} \psi = \frac{p}{2B} s^2. *$$

A (24) egyenlet általános megoldása $u(s) = C_1 s + \frac{C_2}{s}$. Mivel a lemez közép-pontjában (az $s = 0$ helyen) a nyúlás értéke nem lehet végtelen nagy, tehát szükségképpen $C_2 = 0$ és $u = C_1 s \dots \dots \dots (26)$. A (25) egyenlet általános megoldása :

$$\psi(s) = K_1 s + \frac{K_2}{s} + \frac{p}{16B} s^3.$$

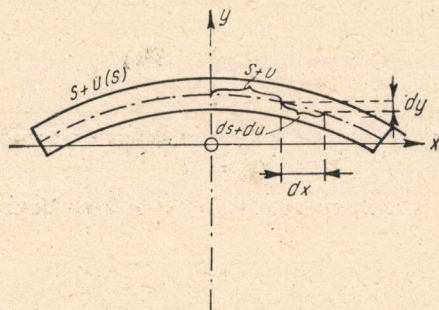
* Az általunk levezetett (25) egyenletben foglalt összefüggést síklemezre alkalmazva, a lemez-elmélet ismert differenciálegyenletéhez jutunk. L. pl. *Hort—Thoma*: Die Differential-Gleichungen der Technik u. Physik, V. kiadás, 167. o.

Mivel K_2 szükségképpen nullával egyenlő, tehát

$$(27) \quad \psi = K_1 s + \frac{p}{16B} s^3.$$

A C_1 és K_1 állandók értékét a kerületi feltételek figyelembevételével a későbbiekben fogjuk kiszámítani.

A következőkben meg fogjuk konstruálni a deformált középgörbe paraméteres egyenletrendszerét — és a kerületi feltételeket is figyelembevételével — ki fogjuk számítani a lemez tetszőszerinti pontjának lehajlását szolgáltatató képletet.



6. ábra

A 6. ábra alapján a középgörbe paraméteres egyenletrendszerét az alábbi differenciálegyenletekből nyerjük:

$$(28) \quad -\frac{dy}{ds + du} = \sin \left(\frac{s}{r} + \psi \right)$$

$$(29) \quad \frac{dx}{ds + du} = \cos \left(\frac{s}{r} + \psi \right).$$

A (26) és (27) kifejezéseket behelyettesítve* és integrálva nyerjük, hogy

$$(30) \quad y = y_0 - (1 + C_1) \left(\frac{s^2}{2r} + \frac{p}{16B} \frac{s^4}{4} + K_1 \frac{s^2}{2} \right)$$

$$(31) \quad x = x_0 + (1 + C_1) \left(s - \frac{s^3}{6r^2} - \frac{1}{r} K_1 \frac{s^3}{3} - \frac{1}{r} \frac{p}{16B} \frac{s^5}{5} - \frac{1}{2} K_1^2 \frac{s^3}{3} - K_1 \frac{p}{16B} \frac{s^5}{5} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{(16B)^2} \frac{s^7}{7} \right).$$

A) A lemez kerületét mindenütt befogottnak (befalazottnak) tételezve fel, az eddig határozatlan állandók kiszámítására a következő feltételek állanak rendelkezésünkre:

* A 28. és 29. egyenletekben szereplő sinus és cosinus függvényeket másodfokú Taylor-polinomjaikkal közelítjük meg.

I. A kerületben ψ mindenütt nullával egyenlő, tehát

$$\psi(S) = 0,$$

azaz :

$$K_1 S + \frac{p}{16B} S^3 = 0,$$

tehát :

$$K_1 = -\frac{p}{16B} S^2$$

és így a $\psi(s)$ függvény :

$$(32) \quad \psi = \frac{p}{16B} (s^3 - S^2 s).$$

II. A lemez középpontjának x koordinátája az axiális szimmetriára való tekintettel nullával egyenlő, tehát $x_0 = 0$.

III. A lemez kerületének rögzített voltából következik, hogy

$$x(s) = r \sin \frac{S}{r} \cong S - \frac{S^3}{6r^2},$$

ebből

$$(33) \quad 1 + C_1 = \frac{S - \frac{S^3}{6r^2}}{S - \frac{S^3}{6r^2} + \frac{1}{r} \frac{2p}{240B} S^5 - \frac{4}{165} \left(\frac{p}{16B} \right)^2 S^7}$$

$$C_1 = \frac{1}{1 - \frac{S^2}{6r^2} - \frac{\frac{4}{105} \left(\frac{p}{16B} \right)^2 S^6 - \frac{1}{r} \frac{2p}{240B} S^4}{1}}$$

IV. A lemez kerületének rögzítettségéből következik, hogy

$$y(S) = 0, \text{ tehát } y_0 = (1 + C_1) \left(\frac{S^2}{2r} - \frac{p \cdot S^4}{64B} \right).$$

Az I–IV. feltételek alapján a középgörbe paraméteres egyenletrendszere – kis elhanyagolással egyszerűsített alakban – így írható :

$$(34) \quad x = \frac{1}{S - \frac{4}{105} \left(\frac{p}{16B} \right)^2 S^6} \left[-\frac{s^3}{6r^2} - \frac{1}{210} \left(\frac{p}{16B} \right)^2 (15s^7 - 42S^2 s^5 + 35S^4 s^3) \right]$$

$$(35) \quad y = \frac{1}{1 - \frac{4}{105} \left(\frac{p}{16B} \right)^2 S^6} \left[\frac{S^2 - s^2}{2r} - \frac{p}{64B} (S^2 - s^2)^2 \right],$$

ebből a középgörbe s koordinátájú pontjának lehajlása :*

$$(36) \quad w = \frac{1}{1 - \frac{4}{105} \left(\frac{p}{16B} \right)^2 S^6} \frac{S^2 - s^2}{2r} + \frac{1}{1 - \frac{4}{105} \left(\frac{p}{16B} \right)^2 S^6} \cdot \frac{p}{64B} (S^2 - s^2)^2.$$

A $\psi(s)$ és $u(s)$ függvények ismeretében felírhatjuk a húzó-nyomó feszültségeket és a hajlító nyomatékokat, illetve az utóbbiakból kiszámíthatjuk a hajlító feszültségeket. Az 5. és 6. egyenletek alapján

$$(37) \quad \sigma_m = \frac{Em^2}{m^2 - 1} \left\{ 1 - \frac{z}{r} \right\} \left\{ \frac{m+1}{m} \frac{1}{\frac{4}{105} \left(\frac{p}{16B} \right)^2 S^6 - 1} + \right. \\ \left. + z \frac{p}{16B} \left[2s^2 + \frac{m+1}{m} (s^2 - S^2) \right] \right\},$$

$$(38) \quad \sigma_t = \frac{Em^2}{m^2 - 1} \left\{ 1 - \frac{z}{r} \right\} \left\{ \frac{m+1}{m} \frac{1}{\frac{4}{105} \left(\frac{p}{16B} \right)^2 S^6 - 1} + \right. \\ \left. + z \frac{p}{16B} \left[\frac{2}{m} s^2 + \frac{m+1}{m} (s^2 - S^2) \right] \right\},$$

tehát a lemez középfelületének bármelyik pontjában ($z = 0$) a két húzó-nyomó feszültség ugyanakkora értékkel bír :

$$(39) \quad \sigma_m = \sigma_t = \frac{Em}{m-1} \frac{1}{\frac{140}{3} \frac{m^2}{(m^2-1)} \left(\frac{E}{p} \right)^2 \left(\frac{h}{s} \right)^6 - 1}.$$

Ez az általunk levezetett eredmény azt mutatja, hogy a húzó-nyomó feszültség értéke elméletileg minden határon túl növekszik, ha

$$\left(\frac{E}{p} \right)^2 \left(\frac{h}{S} \right)^6 \rightarrow \frac{3}{140} \frac{m^2 - 1}{m^2}.$$

* Amennyiben a középgörbe nyúlását elhanyagolhatónak tekintjük, $C_1 = 0$ é

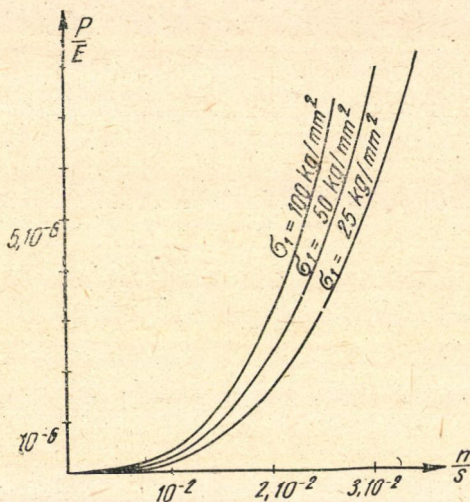
$$W = \frac{p}{64B} (S^2 - s^2)^3.$$

Ezt a képletet *köralakú síklemezre* alkalmazva a lemez-elmélet ismert eredményére jutunk. (V. ö. Handbuch der Physik, Band VI., 214. o.)

Természetesen a húzó-nyomó feszültségnek ez a növekedése csak a Hooke-törvény érvényességi határáig lehetséges. Abban az esetben, ha előírjuk, hogy a lemez középfelületében fellépő húzófeszültség értéke valamely adott σ_1 értéket ne lépjen túl, a lemez méretei és a megengedhető hidrosztatikus nyomás értéke között az alábbi összefüggést nyerjük:

$$(40) \quad \frac{p}{E} \cong \sqrt{\frac{\frac{140}{3} \frac{m^2}{m^2-1}}{\frac{Em}{m-1} \frac{1}{\sigma_1} + 1}} \left(\frac{h}{S}\right)^3,$$

tehát adott $\frac{h}{S}$ viszony esetén megengedhető legnagyobb hidrosztatikus nyomás értékeket különböző megengedett σ_1 maximális húzó-nyomó feszültségek esetén harmadfokú parabolák ábrázolják. (L. 7. ábra.)



7. ábra

A M_t és M_r hajlító-nyomatékok (hosszegységre vonatkoztatott) értékei a (18) és (19) összefüggések alapján a $\psi(s)$ függvény ismeretében a következő képletekből számíthatók:

$$(41) \quad M_t = \frac{p}{16} \left(\frac{m+1}{m} S^2 - \frac{3m+1}{m} s^2 \right)$$

$$(42) \quad M_r = \frac{p}{16} \left(\frac{m+1}{m} S^2 - \frac{3+m}{m} s^2 \right).$$

Ezek a képletek figyelemreméltó analógiát mutatnak a köralakú síklemezben hidrosztatikus nyomás hatására fellépő hajlítónyomatékok ismert képletével; amennyiben pedig a (41) és (42) összefüggéseket síklemezre alkalmazzuk, az ismert képlettel azonos formulához jutunk. [4]

A (41) és (42) összefüggések alapján a hajlítófeszültségek értéke a lemez középpontjában ($s = 0$) és a kerületen ($s = S$) a következő:

$$\sigma_{M_t}(0) = \sigma_{M_r}(0) = \frac{3}{8} \frac{m+1}{m} \frac{p}{h^2} S^2$$

$$\sigma_{M_t}(S) = \frac{3}{4} \frac{p}{h^2} S^2$$

$$\sigma_{M_r}(S) = \frac{1}{m} \frac{3}{4} \frac{p}{h^2} S^2.$$

B) A lemez kerületét megtámasztottnak és rögzítettnek tételezve fel, a határfeltételek a következőképpen módosulnak:

I. A kerületen M_t értéke mindenütt nullával egyenlő [5], tehát

$$M_t(S) = \frac{h^3}{12} \cdot \frac{Em^2}{m^2-1} \left(\psi'(s) + \frac{1}{m} \cdot \frac{\psi(S)}{S} \right) = 0,$$

azaz

$$K_1 + \frac{p}{16B} S^2 + m \left(K_1 + \frac{3p}{16B} S^2 \right) = 0,$$

tehát megtámasztás esetén

$$K_1 = - \frac{p}{16B} \cdot \frac{1+3m}{1+m} \cdot S^2,$$

ebből a $\psi(s)$ függvény

$$(43) \quad \psi(s) = \frac{p}{16B} \left(s^3 - \frac{1+3m}{m} S^2 s \right).$$

II. A lemez középpontjának x koordinátája az axiális szimmetriára való tekintettel továbbra is nullával egyenlő, tehát $x_0 = 0$.

III. Mivel a lemez kerülete rögzített, azaz elmozdulás nem lehetséges, tehát

$$x(S) = r \cdot \sin \frac{S}{r} \cong S - \frac{S^3}{6r^2},$$

ebből következik, hogy

$$1 + C_1 = \frac{S - \frac{S^3}{6r^2}}{S - \frac{S^3}{6r^2} + \frac{1}{r} \frac{p}{240B} \frac{1+6m}{1+m} S^5 - \frac{2}{105} \left(\frac{p}{16B} \right)^2 \frac{51m^2 + 3m + 2}{(1+m)^2} S^7}$$

$$(44) \quad C_1 = \frac{1}{1 - \frac{S^2}{6r^2} - \frac{\frac{2}{105} \frac{51m^2 + 3m + 2}{(1+m)^2} \left(\frac{p}{16B}\right)^2 S^6 - \frac{1}{r} \frac{1+6m}{1+m} \frac{p}{240B} S^4} - 1$$

IV. A lemez kerületének rögzítettsége következtében $y(S) = 0$, akármekkora is a p nyomás, tehát

$$y_0 = (1 + C_1) \left(\frac{S^2}{2r} - \frac{p}{16B} \frac{1+5m}{1+m} \frac{S^4}{4} \right).$$

Az I–IV. feltételek alapján a megtámasztott lemez középgörbéjének paraméteres egyenletrendszere — kis elhanyagolással egyszerűsített alakban — a következőképpen írható:

$$(45) \quad x = \frac{1}{1 - \frac{2}{105} \frac{51m^2 + 3m + 2}{(1+m)^2} \left(\frac{p}{16B}\right)^2 S^6} \left[s - \frac{s^3}{6r^2} - \frac{1}{210} \frac{1}{(1+m)^2} \left(\frac{p}{16B}\right)^2 \cdot [15(1+m)^2 s^7 - 42(1+m)(1+3m)s^5 S^2 + 35(1+3m)^2 S^4 s^3] \right]$$

$$(46) \quad y = \frac{1}{1 - \frac{2}{105} \frac{51m^2 + 3m + 2}{(1+m)^2} \left(\frac{p}{16B}\right)^2} \left[\frac{S^2 - s^2}{2r} - \frac{p}{64B} (S^2 - s^2) \left(s^2 - \frac{1+5m}{1+m} S^2 \right) \right],$$

tehát a középgörbe s koordinátájú pontjának a p hidrosztatikus nyomás hatására létrejövő lehajlása:

$$(47) \quad w = \frac{1}{1 - \frac{2}{105} \frac{51m^2 + 3m + 2}{(1+m)^2} \left(\frac{p}{16B}\right)^2} \frac{S^2 - s^2}{2r} + \frac{1}{1 - \frac{2}{105} \frac{51m^2 + 3m + 2}{(1+m)^2} \left(\frac{p}{16B}\right)^2} \frac{p}{64B} \cdot (S^2 - s^2) \left(s^2 - \frac{1+5m}{1+m} S^2 \right).$$

A kerületen megtámasztott és rögzített lemezben ébredő húzó-nyomó feszültségek a $\psi(s)$ és $u(s)$ függvények ismeretében az (5) és (6) egyenlet alapján kiszámíthatók. A húzó-nyomó feszültségek általános kifejezésének felírását mellőzve, a befogott lemezzel való összehasonlítás végett (l. a 39. sz. képletet) meghatározzuk a középfelület valamely pontjában megtámasztás esetén ébredő húzó-nyomó feszültségeket. A $\psi(s)$ és $u(s)$ függvények kifejezését az (5) és (6) egyenletekbe helyettesítve és z helyébe nullát írva, arra az eredményre jutunk, hogy — akárcsak a befogott lemeznél — a középfelület bár-

melyik pontjában a két húzó-nyomó feszültség (σ_m és σ_t) ugyanakkora értékkel bír:

$$(48) \quad \sigma_m = \sigma_t = \frac{Em}{m-1} \frac{1}{\frac{280}{3} \frac{(1+m)^2}{(51m^2+3m+2)} \left(\frac{E}{p}\right)^2 \left(\frac{h}{s}\right)^6 - 1}.$$

Tehát a húzó-nyomó feszültség értéke független a helytől és a képlet szerint minden határon túl növekszik, ha

$$\left(\frac{E}{p}\right)^2 \left(\frac{h}{s}\right)^6 \rightarrow \frac{3}{280} \frac{51m^2+3m+2}{(1+m)^2}.$$

Ha előírjuk, hogy a lemez középfelületében keletkező húzó-nyomó feszültség értéke egy adott σ határ alatt maradjon, akkor a lemez méretei és a megengedhető legnagyobb p hidrosztatikus nyomás között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$(49) \quad \frac{p}{E} \leq \sqrt{\frac{\frac{280}{3} \frac{(m+1)^2}{51m^2+3m+2} \left(\frac{h}{s}\right)^3}{\frac{Em}{m^2-1} \frac{1}{\sigma_1} + 1}},$$

tehát adott $\frac{h}{s}$ viszony esetén a megengedhető legnagyobb hidrosztatikus nyomás értékét szolgáltató függvény — akárcsak a befogott lemez esetében — harmadfokú parabolával ábrázolható.

A (hosszegységre vonatkoztatott) hajlító-nyomatékok értékeit szolgáltató képletek a (18) és (19) összefüggésekből nyerhetők, amennyiben a $\psi(s)$ függvénynek a megtámasztásnak, mint kerületi feltételnek, figyelembevételével nyert kifejezését oda behelyettesítjük:

$$(50) \quad M_t = -\frac{3m+1}{16m} p (S^2 - s^2)$$

$$(51) \quad M_r = -\frac{3m+1}{16m} p \left(S^2 - \frac{m+3}{3m+1} s^2 \right).$$

Az ilymódon nyert képletek — a befogott lemeznel tapasztaltakhoz hasonlóan — analógiát mutatnak a köralakú síklemezben fellépő hajlító-nyomatékok kiszámítására szolgáló ismert képletekkel [6], illetve síklemezre alkalmazva az általuk levezetett képletek az ismert formulákba mennek át.

Az (50) és (51) képletekből a hajlítófeszültség értéke a lemez középpontjában és a kerületen a következő:

$$\sigma_{M_t}(0) = \sigma_{M_r}(0) = -\frac{3(3m+1)}{8m} \frac{p}{h^2} S^2$$

$$\sigma_{M_t}(S) = 0$$

$$\sigma_{M_t}(S) = \frac{3}{4} \frac{m-1}{m} \frac{p}{h^2} S^2.$$

IRODALOM

1. C. B. Biezeno: Über die Bestimmung der »Durchschlagkraft« einer schwach-gekrümmten, kreisförmigen Platte. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechanik, Band 15, H 1/2, 110.
2. L. pl. Handbuch der Physik, Band VI. (Berlin, Verlag von J. Springer, 1928), 60. o.: Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie c. fejezetet.
3. Handbuch der Physik, Band VI. 210. o.
4. L. pl. Handbuch der Physik, Band VI. 214. o.
5. L. Handbuch der Physik, Band VI. 214. o.
6. L. Handbuch der Physik, Band VI. 214. o.

О ДЕФОРМАЦИЯХ КРУГЛЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК С МАЛОЙ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНОЙ

В. ЛОВАШ—НАДЬ

Р е з ю м е

Автор ставит себе целью исследование деформации и распределения напряжения происходящего из действия перпендикулярного на поверхность равномерно распределенной силы постоянной величины (гидростатического давления) круглых тонких пластинок с малой (положительной) постоянной кривизной, обращая внимание тоже на вытяжку средней поверхности пластинки.

Предполагая пластинку охватываемой на окружности или подпираемой и закрепленной, можно ограничиться деформацией меридианного сечения пластинки, которая обладает формой поверхности вращения и в нагруженном состоянии, из-за симметричности нагрузочных и краевых условий. Пренебрегая вытяжкой, перпендикулярной на пластинку, дальше предполагая, что

а) средняя поверхность и поверхности, параллельные к тому в ненагруженном состоянии, создают совокупность параллельных поверхностей и после деформации;

б) в недеформированном состоянии пластинки, прямые, которые в недеформированном состоянии пластинки идут через центр шара, переходят в нормали вышеуказанных параллельных поверхностей в течении деформации — нагиб любого пункта пластинки доставляется в случае схватываемой окружности формулой (36), а в случае подпираемой и закрепленной окружности формулой (47), где S длина части меридианной кривой средней поверхности, протягивающейся от центра до окружности. Нормальные напряжения тождественны в любом пункте средней поверхности, как видимо из формул (39) и (48).

SUR LA DEFORMATION DES PLAQUES MINCES DE FORME CIRCULAIRE ET D'UNE PETITE COURBURE CONSTANTE

V. LOVASS—NAGY

R é s u m é

Le but de ce travail est l'investigation de la déformation et de la distribution des tensions qui se produisent sous l'effet d'une force de grandeur constante, perpendiculaire à la surface et distribuée d'une manière uniforme (pression hydrostatique) des plaques minces de forme circulaire et d'une petite courbure constante (positive), en tenant compte aussi de la dilatation de la surface moyenne de la plaque.

En supposant que la plaque est encastrée ou supportée et fixée sur la périphérie, on peut, vu la symétrie de la charge et des conditions périphériques, se borner à la déformation d'une section méridionale de la plaque qui, étant chargée ne cesse pas d'avoir la forme d'une surface de rotation. En négligeant la dilatation dans la direction perpendiculaire à la plaque et en supposant en outre que, d'une part la surface moyenne et les surfaces qui, dans l'état non-chargé, sont parallèles à cette dernière, forment une famille des surfaces parallèles, aussi après la déformation, et, d'autre part, que les lignes droites passant par le centre de la sphère dans l'état non déformé passent après la déformation dans les normales des surfaces parallèles mentionnées plus haut, la déflection d'un point arbitraire de la plaque est fournie au cas d'une périphérie encastrée, par la formule (36) et en cas d'une périphérie supportée et fixée, par la formule (47) dans lesquelles S signifie la longueur de la partie s'étendant du centre jusqu'à la périphérie de la courbe du méridien de la surface moyenne.

Les tensions normales sont constantes dans les points de la surface moyenne, comme on le voit des formules (29) et (48).