

PLASZTIKUS ÉS ÖSSZETETT FESZÜLTSEGI ÁLLAPOTOK VIZSGÁLATA VASTAGFALÚ CSÖVEKBEN*

LOVASS-NAGY VIKTOR

ÖSSZEFOGLALÁS

Szerző jelen dolgozatában nagy hidrosztatikus nyomás által terhelt vastagfalú csövekben kialakuló plastikus és összetett (részben plastikus, részben elasztikus) feszültségi állapotok matematikai vizsg. latával foglalkozik. A folyási határt meghaladó igénybevételek esetén keletkező σ_r^* és σ_t^* feszültségek meghatározására a koaxiális körhengerek által határolt (és végtelen hosszúnak tekintett) testnek tengelyszimmetrikus terhelés esetén fennálló ismert egyensúlyi egyenletén kívül a Saint Venant-Tresca, valamint a Mises-Hencky féle plasticitási elmélet kompatibilitási feltételeit használja fel.

A plastikus feszültségi állapotot leíró függvényeknek minkét plasticitási elméletnek megfelelő meghatározása után szerző megállapítja az összetett (plastikus és elasztikus) igénybevétel esetén a plastikus és elasztikus részeket elválasztó körhenger sugarát.

(Jelen dolgozat egy részletét képezi szerző 1948-ban a Ganz Villamossági Gyár megbízása alapján Egerváry akadémikus munkatársaként végzett számításainak.)

A műszaki gyakorlatban előfordul szerkezeti anyagoknak olyan igénybevétele, hogy bennük a rugalmassági határt meghaladó feszültségek ébrednek. Az ily módon igénybe vett testek (gépalkatrészek, centrifugális tömegezők által igénybe vett rotorok vasteste, felületi normálfeszültségek által terhelt vastagfalú csövek stb.) egy részében tehát az anyag viselkedését már nem kísérhetjük figyelemmel a Hooke-féle törvény érvényességét feltételező képletek segítségével, hanem külön vizsgálat tárgyává kell tennünk, milyen összefüggésekkel írhatjuk le a testeknek a rugalmassági határon túl igénybe vett részében kialakult feszültség-eloszlásokat.

E vizsgálatok elvégzését a következő gyakorlati megfontolás teszi indokolttá: Ha el akarjuk dönteni, hogy vajon egy gépalkatrész vagy vastagfalú cső, amelynek egy részében a rugalmassági határt meghaladó feszültségek ébrednek, megfelelő biztonsággal bír-e a műszaki alkalmazás szempontjából, meg kell állapítanunk, hogy az illető testnek a rugalmassági határon túl igénybe vett részében vajon plastikus egyensúlyi állapot jön-e létre, és hogy a plastikusan igénybe vett rész és az elasztikusan igénybe vett rész egymáshoz viszonyított aránya mekkora. Ez utóbbi arányból ugyanis következtethetünk arra, hogy mennyiben várható az illető alkatrésztől megkívánt stabilitás elérése.

* Jelen dolgozat a Ganz Villamossági Gyár megbízása alapján 1948-ban végzett számításokkal kapcsolatos matematikai vizsgálatok egy részletét képezi.

A fentiek előrebocsátása után a következőképpen körvonalazhatjuk azokat a feladatokat, amelyek megoldása e dolgozat tárgyát képezi:

Meg fogjuk kísérlni, hogy a szilárdságtan által rendelkezésünkre bocsátott elméletek segítségével olyan egyenleteket konstruáljunk, amelyek által leírhatók felületi normálfeszültségek által igénybe vett vastagfalú csövekben létrejövő plasztikus feszültségi állapotok. Továbbá meg fogjuk kísérlni olyan számítási eljárás kidolgozását, amely alkalmazásával megállapíthatjuk a plasztikusan és elasztikusan igénybe vett részek egymáshoz viszonyított arányát.

Ismeretes, hogy koaxiális körhengerek által határolt (és végtelen hosszúnak tekintett) testekben tengelyszimmetrikus igénybevétel esetén keletkező σ_r radiális és σ_t tangenciális húzó-nyomó feszültségek a

$$(1) \quad \frac{d}{dr} (r\sigma_r) - \sigma_t = P_r \cdot r$$

differenciál egyenletben foglalt egyensúlyi feltételnek [1] tesznek eleget, ahol P_r az egységre vonatkoztatott tömegeerőt jelenti.

Az ismeretlen σ_r és σ_t feszültségek meghatározásához szükséges további összefüggést az anyag rugalmas vagy plasztikus viselkedésére vonatkozó feltevéseinkből kell származtatni.

Rugalmas alakváltozás esetén a σ_r és σ_t feszültségek közötti további összefüggést a klasszikus rugalmasságtanban mindenütt alapul vett Hooke-féle törvény szolgáltatja, amennyiben megadja a σ_r és σ_t feszültségek és az $u(r)$ radiális elmozdulás, valamint annak deriváltja, $\frac{du}{dr}$ közötti összefüggéseket:

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{m + \frac{1}{m}} \left(\frac{u}{r} + m \frac{du}{dr} \right) \\ \sigma_t &= \frac{E}{m - \frac{1}{m}} \left(\frac{du}{dr} + m \frac{u}{r} \right) \end{aligned} \right\}$$

A σ_r és σ_t ezen kifejezéseit az (1) differenciálegyenletbe helyettesítve, az u radiális elmozdulásokat meghatározó másodrendű differenciálegyenlethez jutunk:

$$(3) \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - \frac{u}{r} = \frac{m - \frac{1}{m}}{mE} P_r r$$

A (3) differenciálegyenletből nyert $u(r)$ függvény ismeretében σ_r és σ_t meghatározhatók a (2) egyenletek segítségével.

Plasztikus alakváltozás esetén nem szükséges az u radiális elmozdulás segítségével fejezni ki a σ_r és σ_t feszültségek összefüggését, hanem az anyag plasztikus viselkedését egy, maguk a σ_r és σ_t feszültségek között fennálló $F(\sigma_r, \sigma_t)$ plaszticitási függvénnyel jellemezhetjük a következőképpen [2]: Az anyagnak abban a részében, melyben az elasztikus feszültségek behelyettesítésével nyert $F(\sigma_r, \sigma_t)$ függvényérték egy, az anyag minőségétől függő k állandó alatt marad, az anyag elasztikusan viselkedik és a feszültségek a fenti (3) differen-

ciálegyenlet alapján adódnak. Az anyagnak azon részében pedig, amelyben az elasztikus feszültségekkel számított $F(\sigma_r, \sigma_t)$ függvényérték a k állandót elérné vagy túlhaladná, az anyag viselkedése plasztikussá válik, ami matematikailag azáltal van jellemezve, hogy a plasztikusan igénybevett rész mindig egyik pontjában

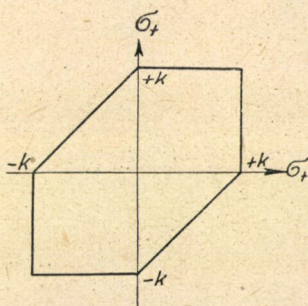
$$F(\sigma_r, \sigma_t) = k$$

Az anyag plasztikus viselkedését meghatározó $F(\sigma_r, \sigma_t)$ függvény alakjára nézve több feltevés szerepel az irodalomban. Ezeknek szemléltetése és összehasonlítása érdekében célszerű a σ_r és σ_t feszültségeket mint derékszögű koordinátákat ábrázolni. Ekkor az $F(\sigma_r, \sigma_t) = k$ egyenlet a σ_r, σ_t síkban zárt görbét jelent, és az anyag összes lehetséges elasztikus feszültségi állapotai a görbén belül fekvő pontok által, a plasztikus állapotok pedig a görbén és azon kívül fekvő pontok által vannak szemléltetve. Ha az $F(\sigma_r, \sigma_t) = k$ összefüggés alapján σ_t -t az (1) differenciálegyenletből elimináljuk, akkor a plasztikus σ_r meghatározására *elsőrendű* differenciálegyenletet nyerünk, melynek általános megoldása tehát csupán *egy* független állandót tartalmaz.

A Saint Venant—Tresca-féle plaszticitási elmélet szerint a maximális csúsztató (nyíró) feszültségnek kell a k határ alatt maradnia; miután a vizsgálandó feszültségi állapotban a főfeszültségek:

σ_r, σ_t és 0, tehát a maximális csúsztató-feszültség a

$|\sigma_r - \sigma_t|$, $|\sigma_r|$ és $|\sigma_t|$ mennyiségek legnagyobbika. Eszerint a Saint Venant—Tresca-féle elméletnek megfelelő görbe, mely az elasztikus tartományt a plasztikustól elválasztja, az 1. ábrán látható hatszög.



1. ábra

Mint látni fogjuk, a Saint Venant—Tresca-féle elmélet számítástechnikailag könnyebben kezelhető, hátrányára írható viszont, hogy benne a középső főfeszültség semmi szerepet sem játszik.

A Mises—Hencky-féle elmélet szerint a *rugalmas alak-változási* munkát jellemző

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2,$$

jelen esetben tehát a

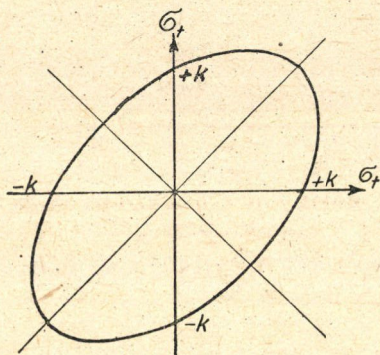
$$(\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - 0)^2 + (\sigma_r - 0)^2 = 2(\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2)$$

kifejezésnek kell egy állandó határ alatt maradnia. A plasztikus határt, az elasztikustól a plasztikus tartományt elválasztó határgörbét tehát a jelen

esetben egy olyan ellipszis jelenti, melynek nagytengelye a $+\sigma_r$ tengellyel 45° -os szöget zár be és tengelyeinek viszonya :

$$\frac{\text{kistengely}}{\text{nagytengely}} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Mint látni fogjuk, a Mises—Hencky-féle elmélet alkalmazása aránylag egyszerű esetekben is jelentékeny számítástechnikai nehézségekkel jár és ha figyelembe vesszük, hogy a Mises—Hencky-féle ellipszist a Saint Venant—Tresca-féle hatszög (mint az előbbinek húrsokszöge) jól megközelíti, akkor megállapíthatjuk, hogy a könnyebb számítást igénylő Saint Venant—Tresca-féle feltevésből nyert eredmények többnyire kielégítőnek minősíthetők.



2. ábra

Ezzel szemben már ezen a helyen rá kívánunk mutatni arra a körülményre, hogy a Mises—Hencky-féle feltevés elméletileg jobban megalapozott, mint a Saint Venant—Tresca-féle elmélet, amely körülmény már az elméletek leg-egyszerűbb alkalmazása során nyomban kitűnik.

Elasztikus feszültségeloszlás felületi normálfeszültségek által igénybevett vastagfalú csövekben

Alkalmazzuk az (1) egyenletben található összefüggést egy olyan végtelen hosszúnak tekintett és két koaxiális körhenger által határolt testre, amelyet csak felületi normál (húzó-nyomó) feszültségek terhelnek. Ebben az esetben nem szükséges az (1) egyenlet átalakításából nyert (3) másodrendű differenciálegyenletből meghatároznunk a σ_r és σ_t függvényeket, hanem a következő egyszerűbb eljárást alkalmazhatjuk :

Tekintve, hogy jelen esetben az egységnyi térfogatra ható tömegeerő : $P_r = 0$, tehát :

$$\frac{d}{dr} (r\sigma_r) - \sigma_t = 0,$$

ami továbbá így írható :

$$(4) \quad \frac{d\sigma_r}{d \ln r} + \sigma_r - \sigma_t = 0.$$

Ha viszont a henger anyaga a Hooke-féle törvény szerint viselkedik, akkor a σ_r és σ_t között az alábbi kompatibilitási egyenlet írható fel :

$$(5) \quad r \frac{d}{dr} (m\sigma_t - \sigma_r) = (m+1) (\sigma_r - \sigma_t).$$

Ebből :

$$\sigma_r - \sigma_t = r \frac{d}{dr} \frac{m\sigma_t - \sigma_r}{m+1}.$$

Ha a $(\sigma_r - \sigma_t)$ -re ily módon nyert kifejezést a (4) egyenletbe beírjuk, nyerjük, hogy :

$$\frac{d\sigma_r}{d \ln r} + r \frac{d}{dr} \frac{m\sigma_t - \sigma_r}{m+1} = 0,$$

azaz :

$$r \frac{d}{dr} \frac{m\sigma_t - \sigma_r + (m+1)\sigma_r}{m+1} = 0,$$

tehát :

$$\frac{m}{m+1} d(\sigma_r + \sigma_t) = 0.$$

Ebből :

$$\sigma_r + \sigma_t = C.$$

Ebből σ_t -t kifejezve :

$$\sigma_t = C - \sigma_r.$$

A σ_t így nyert kifejezését a (4) egyenletbe helyettesítve, σ_r -re a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenletet nyerjük :

$$\frac{d\sigma_r}{d \ln r} + 2\sigma_r = C.$$

A fentiek alapján arra az eredményre jutunk, hogy az elasztikusan igénybevett vastagfalú csőben a σ_r és σ_t feszültségek eloszlását a következő egyenletek határozzák meg :

$$(6') \quad \sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}$$

$$6'') \quad \sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2}.$$

Az ily módon nyert függvények két önkényes állandót tartalmaznak, nevezetesen: C_1 és C_2 állandókat; tehát a σ_r és σ_t függvények általános, megoldásait szolgáltatják. Az állandók meghatározása a henger belső és külső palástjára vonatkozó feszültségi feltételek alapján történik.

A $\sigma_r = \sigma_r(r)$ és $\sigma_t = \sigma_t(r)$ feszültségeloszlásokat ábrázoló görbéket illetőleg már a (6) egyenletek alapján megállapíthatjuk a következőket: a két feszültség összege állandó ($\sigma_r + \sigma_t = 2C_1$) és minthogy az r minden határon túl való növekedése esetén mindkét feszültségi függvény értékei ugyanazon értékhez konvergálnak: (továbbá mivel $|\sigma_r - \sigma_t|$ monoton csökken az r növekedésével)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_t = C_1$$

tehát a $\sigma_r(r)$ és a $\sigma_t(r)$ függvényeket ábrázoló két görbe egymást nem metszi. Ezt a tulajdonságát az elasztikus feszültségeloszlásnak a későbbiek során fel fogjuk használni a plasztikus és elasztikus állapotokat elválasztó hengerfelület sugarának meghatározásánál.

Mint láttuk, a (6) egyenletek két tetszésszerint megválasztható állandót (C_1 és C_2) tartalmaznak, tehát a $\sigma_r(r)$ és $\sigma_t(r)$ függvények értékei közül *kettőt* tetszés szerint előírhatunk és ezáltal a két függvényt már egyértelműen meghatároztuk.

Előírhatjuk pl. a $\sigma_r(r)$ függvény értékeit a belső hengerpaláston és a külső hengerpaláston:

A belső hengerpaláston ($r = r_0$): $\sigma_r(r_0) = \sigma_{r_0}$

A külső hengerpaláston ($r = r_1$): $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$

Ebből a C_1 és C_2 állandók kiszámíthatók és a feszültségek számára a következő képleteket nyerjük:

$$(7') \quad \sigma_r = \frac{\sigma_{r_1} r_1^2 - \sigma_{r_0} r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{\sigma_{r_1} - \sigma_{r_0}}{r_1^2 - r_0^2} \frac{r_1^2 \cdot r_0^2}{r^2}$$

$$(7'') \quad \sigma_t = \frac{\sigma_{r_1} r_1^2 - \sigma_{r_0} r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{\sigma_{r_1} - \sigma_{r_0}}{r_1^2 - r_0^2} \frac{r_1^2 \cdot r_0^2}{r^2}.$$

Tekintve, hogy r negatív értéket nem vehet fel és $r_1 > r_0$, tehát a $\sigma_r(r_0) = \sigma_{r_0}$ és $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$ értékek előírásával a feszültségi függvényeknek kétféle elhelyezést adhatunk egymáshoz viszonyítva:

$$a) \quad \sigma_r > \sigma_t \text{ (minden } r \text{ értékre), ha } \sigma_{r_0} > \sigma_{r_1} \quad \begin{cases} \sigma_{r_0} \text{ húzó vagy nulla} \\ \sigma_{r_1} \text{ nyomó} \end{cases}$$

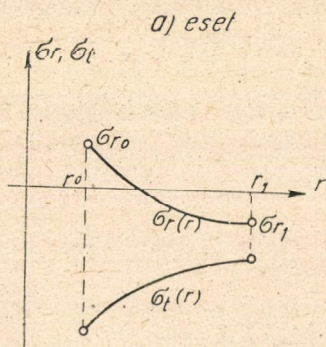
vagy:

$$b) \quad \sigma_r < \sigma_t \text{ (minden } r \text{ értékre), ha } \sigma_{r_0} < \sigma_{r_1} \quad \begin{cases} \sigma_{r_0} \text{ nyomó vagy nulla} \\ \sigma_{r_1} \text{ húzó} \end{cases}$$

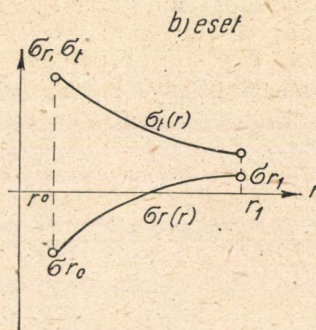
Ugyanis:

$$\sigma_r - \sigma_t = -2 \frac{\sigma_{r_1} - \sigma_{r_0}}{r_1^2 - r_0^2} \frac{r_0^2 \cdot r_1^2}{r^2}.$$

Az elasztikus feszültségeloszlás tehát kétféleképpen alakulhat:



3. ábra



4. ábra

Nyomott csövekben kialakuló plasztikus feszültségi állapot vizsgálata a St. Venant—Tresca-féle elmélet alapján

A bevezetésben ismertettük már *St. Venant*-nak *Tresca* kísérletei alapján kidolgozott elméletét, mely szerint a szilárd testek képlékeny (plasztikus) állapotában a maximális csúsztatófeszültség az igénybe vett anyag minden pontjában ugyanakkora, állandó értékkel bír.

Tekintettel arra, hogy vizsgálatainkat elméletileg végtelen hosszúnak tekintett, koncentrikus körhengerek által határolt 3 dimenziós testekben axiális szimmetriát mutató terhelés alatt kialakuló feszültségi állapotokra végeztük, a vizsgált test minden egyes pontjában három főfeszültség különböztetendő meg:

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = \sigma_r, \sigma_3 = \sigma_z \equiv 0.$$

Így a fő csúsztatófeszültségekre a

$$\sigma_t - \sigma_r; \sigma_t - 0 \text{ és } \sigma_r - 0$$

értékeket nyerjük és a St. Venant-féle törvény oda módosul, hogy a

$$|\sigma_t - \sigma_r|; |\sigma_t|; |\sigma_r|$$

értékek legnagyobbika az egész plasztikusan igénybe vett anyagban állandó értékkel bír. Ez a matematika nyelvére lefordítva azt jelenti, hogy a plasztikusan igénybe vett résznek egy tetszés szerinti pontjában fennáll a következő 3 reláció valamelyike:

$$(I) \quad |\sigma_t^* - \sigma_r^*| \leq k$$

$$(II) \quad |\sigma_t^*| \leq k$$

$$(III) \quad |\sigma_r^*| \leq k.$$

(A továbbiakban — tévedések elkerülése céljából — a plasztikus feszültségeket csillaggal fogjuk megkülönböztetni az elasztikus feszültségektől.)

Tegyük fel, hogy a testre ható külső terhelés, amelynek hatására a vizsgált feszültségi állapot kialakul, olyan, hogy a plasztikus rész minden pontjában

az (I) összefüggés áll fenn. Keressük ebben az esetben a plasztikus részben kialakuló feszültségeloszlást meghatározó $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r)$ és $\sigma_t^* = \sigma_t^*(r)$ függvényeket.

Plasztikus egyensúlyi állapot esetén az (I) összefüggés alapján írhatjuk, hogy :

$$(I') \quad |\sigma_t^* - \sigma_r^*| = k ; \quad \sigma_t^* - \sigma_r^* = \pm k$$

és pedig

$$\sigma_t^* - \sigma_r^* = +k, \text{ ha } \sigma_t^* > \sigma_r^*$$

$$\sigma_t^* - \sigma_r^* = -k, \text{ ha } \sigma_t^* < \sigma_r^*.$$

A (I') feltételből és az $\frac{d}{dr}(r\sigma_r^*) - \sigma_t^* = 0$ dinamikai egyenletből nyerjük, hogy :

$$\frac{d}{d \ln r} \sigma_r^* = \pm k$$

$$(8') \quad \sigma_r^* = \pm k \ln \frac{r}{c}$$

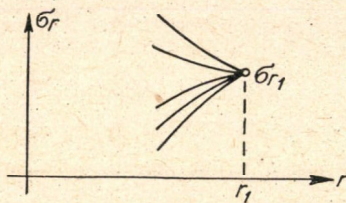
$$(8'') \quad \sigma_t^* = \sigma_r^* \pm k = \pm k \left(1 + \ln \frac{r}{c} \right).$$

Keressük most annak a körhengernek az $r = x$ sugarának az értékét, amely hengerfelület — összetett igénybevétel esetén — a plasztikus és elasztikus feszültségi állapotokat elválasztó határfelület. Tekintve, hogy birtokában vagyunk az elasztikus és az (I') feltételnek eleget tevő plasztikus feszültségeloszlásokat leíró függvényeknek, az x átmeneti sugár meghatározását a következőképpen végezhetjük :

(Megjegyezzük, hogy az itt megállapított irányelvek általános jelentőséggel bírnak az x átmeneti sugár megállapítását illetőleg minden olyan esetben, amikor összetett feszültségi állapottal van dolgunk és ismeretesek az elasztikus és plasztikus feszültségeloszlásokat leíró függvények.)

Tetszés szerint előírhatjuk a σ_r elasztikus feszültség értékét az r_1 külső sugáron, ebből kiadódik a C_1 konstans. [(6') egyenlet.] Ám a C_1 konstans meghatározó összefüggés tartalmazni fogja a C_2 konstans is. A σ_t tangenciális feszültség értékét ugyanis már *fizikailag* nem írhatjuk elő tetszés szerint, ha valahol a σ_r radiális feszültség értékét már előírtuk.

Tehát a $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$ érték előírása után is végtelen sok olyan $\sigma_r(r)$ függvény van, amely a $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$ egyenletet kielégíti. (L. 5. ábra.)



5. ábra

Tetszés szerint előírhatjuk a plasztikus feszültség értékét az $r = r_0$ belső sugáron ; ezáltal kiszámíthatóvá válik a C_2 konstans. Tehát, ha a plasztikus rész valamely pontjában a σ_r^* vagy σ_t^* feszültség értékét előírtuk, ezáltal már előírtuk a másik feszültségi függvény értékét is, tehát $\sigma_r^*(r)$ és $\sigma_t^*(r)$ értékét a plasztikus rész valamennyi helyén, így már meg vannak határozva az $r = x$ átmeneti sugárnál felvett $\sigma_r^*(x)$ és $\sigma_t^*(x)$ értékek is.

Most már az a feladatunk, hogy az ismert $\sigma_r^*(r)$ és $\sigma_t^*(r)$ függvények mellé kiválasszuk azokat a $\sigma_r(r)$ és $\sigma_t(r)$ elasztikus feszültségi függvényeket, amelyek az $r = x$ helyen kielégítik a

$$\sigma_r(x) = \sigma_r^*(x)$$

és

$$\sigma_t(x) = \sigma_t^*(x)$$

egyenleteket ; emellett a $\sigma_r(r)$ elasztikus feszültségi függvénynek az előbbieknél alapján az $r = r_1$ külső sugáron a már rögzített σ_{r_1} értékkel kell bírnia.

Tehát a feladat végül oda vezet, hogy két egyenletet fogunk nyerni, amelyek mindegyike két ismeretlent tartalmaz : x -et és C_2 -öt. Ha e két egyenlet valamelyikéből C_2 értékét x -szel kifejezzük, és az így nyert kifejezést a másik egyenletbe helyettesítjük, akkor egyetlen egyenletet nyerünk az x átmeneti sugár meghatározására.

Ha előírjuk, hogy : $\sigma_r^*(r_0) = \sigma_{r_0}^*$ akkor a (8) alapján kapjuk, hogy a plasztikus részben :

$$\sigma_{r_0}^* = \pm k \ln \frac{r_0}{C}$$

$$\frac{r_0}{C} = e^{\pm \frac{\sigma_{r_0}^*}{k}}$$

(9)

$$C = r_0 e^{\mp \frac{\sigma_{r_0}^*}{k}}$$

Ebből nyerjük, hogy :

$$(10') \quad \sigma_r^*(r) = \pm k \ln \frac{r}{r_0 e^{\pm \frac{\sigma_{r_0}^*}{k}}} = \pm \sigma_{r_0}^* \pm k \ln \frac{r}{r_0}$$

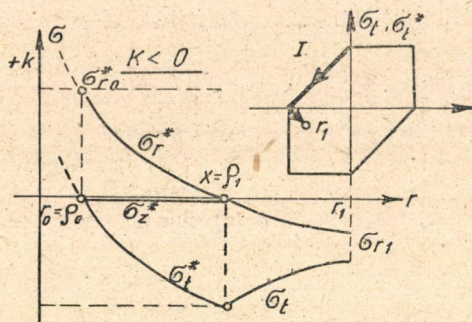
$$(10'') \quad \sigma_t^*(r) = \sigma_{r_0}^* \pm k \left(1 + \ln \frac{r}{r_0} \right).$$

Nézzük most, hogy a $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$ érték előírása esetén hogyan fog alakulni a feszültségeloszlás aszerint, hogy

$$k > 0 \quad \text{vagy} \quad k < 0.$$

Ezt a két lehetőséget a 6. és a 7. ábrák szemléltetik. Meg kell jegyeznünk, hogy az (I') feltételt kielégítő plasztikus feszültségi állapot csak a

$$r_0 \leq r \leq r_1$$

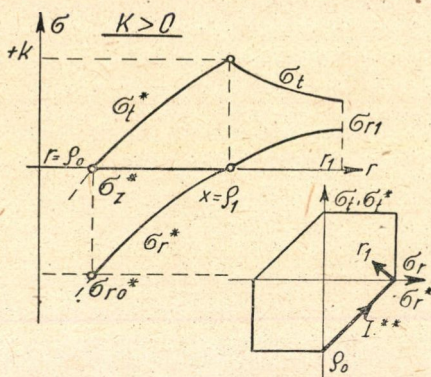


6. ábra

intervallumban létezik, ahol a ϱ_0 és ϱ_1 értékeket a következő egyenlőségek állapítják meg:

$$\sigma_t^*(\varrho_0) = 0 \quad \text{és} \quad \sigma_r^*(\varrho_1) = 0.$$

A $\varrho_0 \leq r \leq \varrho_1$ intervallumon kívül már nem a $\sigma_t^* - \sigma_r^*$ lesz a maximális csúsztatófeszültség, azaz a vizsgálat alapját képező (I') összefüggés érvényét veszti.



7. ábra

Mindkét ábra azt a határesetet tünteti fel, amikor $r_0 = \varrho_0$ és $x = \varrho_1$. Az ábrákba berajzoltuk a $\sigma_z^* \equiv 0$ feszültségi függvényt is, így szemléletesen demonstrálható, hogy a vázolt plasztikus feszültségi állapot csak a $\varrho_0 \leq r \leq \varrho_1$ intervallumban létezik. Mindkét ábra mellé felrajzoltuk a St. Venant-féle hatszöget és ábráztuk, hogy ha az r sugár értéke ϱ_0 -tól r_1 -ig nő, hogyan követhetjük a plasztikus feszültségek változását a St. Venant-féle hatszögben.

A vázolt két lehetőség közül azonban a $k < 0$ eset csak elméletben létezik, mert belülről húzott és kívülről nyomott csövet fizikailag nem tudunk megvalósítani. A továbbiakban tehát csak a $k > 0$ eset vizsgálatára szorítkozunk. Tegyük fel, hogy (ez a σ_{r_1} érték megfelelő előírása által elérhető) azon a hengerpaláston, ahol a $|\sigma_t^* - \sigma_r^*| \leq k$ feltétel megszűnik, (vagyis

ahol $\sigma_r^* = 0$ és $\sigma_t^* = +k$) a plasztikus feszültségi állapot tüstént átmegy az elasztikus feszültségi állapotba. (Mint később látni fogjuk, ez nem feltétlenül szükséges, mert a σ_{r_1} más előírásával elérhetjük, hogy az (I) összefüggés érvényességének megszűntével az (I') egyenlőséget kielégítő plasztikus feszültségi állapot nem megy át közvetlenül az elasztikus feszültségi állapotba, hanem előbb a (II) összefüggés által előírt feszültségi állapot lép fel növekvő r sugár mentén és ez a második fajta (később részletesen tárgyalandó) plasztikus feszültségi állapot megy át az $r = x$ sugárnál az elasztikus feszültségi állapotba.)

Nézzük most, hogy a $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r)$ és $\sigma_t^* = \sigma_t^*(r)$ összefüggésekből kiolvasható egyes feszültségi állapotok hogyan jelentkeznek a St. Venant-féle hatszögben? Tekintve, hogy az elasztikus állapotban $\frac{\sigma_r + \sigma_t}{2} = \text{constans}$,

tehát r_0 -tól a növekvő r sugár irányában haladva r -ig, a σ_r^* és σ_t^* függvények minden egyes értékének megfelel a St. Venant-hatszög I* vagy I** oldalának egy pontja, egészen addig, míg az r sugár el nem éri az $r = x$ értéket, ahol u. i. már σ_r^* zérussá válik. Ettől kezdve az (innenről!) elasztikus feszültségi állapot minden egyes σ_r és σ_t értékét egy, a pozitív σ_r tengellyel 135° -os szöget bezáró egyenesnek a pontjai jellemzik, egészen az $r = r_1$ értékig.

Ezek után állapítsuk meg az x átmeneti sugár kiszámítására alkalmas eljárást, arra az esetre, ha — mint előbb is jeleztük — a σ_{r_1} értéke úgy van rögzítve, hogy $\varrho_0 < x \leq \varrho_1$. A levezetésben már csak a $k > 0$ esetre szorítkozva írhatjuk a következőket:

Ha előírjuk, hogy $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$ legyen, akkor:

$$\sigma_{r_1} = C_1 - \frac{C_2}{r_1^2}$$

$$\sigma_{r_1} + \frac{C_2}{r_1^2} = C_1.$$

Tehát:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r_1} - C_2 \left(-\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r^2} \right) \\ (11') \quad \sigma_r &= \sigma_{r_1} - C_2 \frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2 \cdot r^2} \\ (11'') \quad \sigma_t &= \sigma_{r_1} + C_2 \frac{r_1^2 + r^2}{r_1^2 \cdot r^2}. \end{aligned}$$

Az x átmeneti sugáron:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r_1} - C_2 \frac{r_1^2 - x^2}{r_1^2 \cdot x^2} = \sigma_{r_0}^* + k \ln \frac{x}{r_0} \\ \sigma_t &= \sigma_{r_1} + C_2 \frac{r_1^2 + x^2}{r_1^2 \cdot x^2} = \sigma_{r_0}^* + k \left(1 + \ln \frac{x}{r_0} \right). \end{aligned}$$

Az első egyenletből C_2 -öt kifejezve:

$$C_2 = - \left(\sigma_{r_0}^* - \sigma_{r_1} + k \ln \frac{x}{r_0} \right) \frac{r_1^2 x^2}{r_1^2 - x^2}.$$

A C_2 -re ilymódon nyert értéket a második egyenletbe beírva, nyerjük, hogy

$$\sigma_{r_0}^* + k \left(1 + \ln \frac{x}{r_0} \right) = \sigma_{r_1} - \left(\sigma_{r_0}^* - \sigma_{r_1} + k \ln \frac{x}{r_0} \right) \frac{r_1^2 \cdot x^2}{r_1^2 - x^2} \cdot \frac{r_1^2 + x^2}{r_1^2 \cdot x^2}.$$

Ezt az egyenletet rendezve a következő egyenlethez jutunk :

$$(12) \quad 2x^2(\sigma_{r_1} - \sigma_{r_0}^*) - kx^2 + kr_1^2 = -2kr_1^2 \ln \frac{x}{r_0}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket :

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{x}{r_1} &= \xi \\ \frac{x}{r_0} &= \frac{r}{r_1} \cdot \frac{x_1}{r_0} = \frac{\xi}{\varrho} \\ \frac{r_0}{r_1} &= \varrho \\ \frac{\sigma_{r_1}}{k} &= \kappa \\ \frac{\sigma_{r_0}^*}{k} &= \chi. \end{aligned}$$

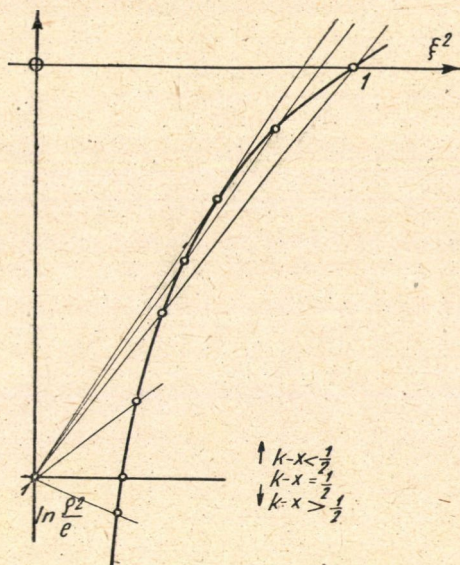
Osszuk el (kr_1^2) -nel a (12) egyenletet és alkalmazzuk a (13) jelöléseket, akkor az átmeneti sugár meghatározására szolgáló egyenletet dimenziótlanná tettük, és az átmeneti sugár helyett a $\xi = \frac{x}{r_1}$ viszonyt fogjuk meghatározni.

Az egyenlet átrendezve :

$$(14) \quad \ln \xi^2 = \left[1 - 2(\kappa - \chi) \right] \xi^2 + \ln \frac{\varrho^2}{e}.$$

Az ily módon nyert (14) egyenlet lehetővé teszi, hogy az x átmeneti sugár kényelmes megállapítására a következő nomogrammot szerkesszük : (8. ábra.)

Egy derékszögű koordinátarendszer vízszintes tengelyére a ξ^2 -et visszük fel, és akkor ebben a koordinátarendszerben a $\ln \xi^2$ függvényt egyszerű ln-görbe, az $[1 - 2(\kappa - \chi)] \xi^2 + \ln \frac{\varrho^2}{e}$ függvényt pedig egyenesek ábrázolják, melyeknek az ordinátatengellyel való metszéspont koordinátája valamennyi egyesnél $\ln \frac{\varrho^2}{e}$ -tel egyenlő, az egyenesek iránytangense pedig más és más, aszerint, hogy mekkora a κ és a χ . (Ugyanis $\varrho = \frac{r_0}{r_1}$ egy csőre állandó értékkel bír, míg a κ és χ viszonyok ugyanannál a csőnél tetszés szerint változtathatók a σ_{r_1} , $\sigma_{r_0}^*$ határfeltételek előírásával. A keresett ξ^2 értéket a logaritmusgörbének és annak az egyenesnek a metszéspontjai szolgáltatják, amely egyenes iránytangense a $\kappa = \frac{\sigma_{r_1}}{k}$ és $\chi = \frac{\sigma_{r_0}}{k}$ viszonyok kiszámítása után éppen $[1 - 2(\kappa - \chi)]$ -vel egyenlő.)



8. ábra

A nomogramm megszerkesztését illetőleg a következőket jegyezzük még meg :

Tekintve, hogy $\xi = \frac{x}{r_1} \leq 1$, (mert az x átmeneti sugár nem lehet nagyobb, mint az r külső sugár), tehát elég a $\ln \xi^2$ görbét a $0 < \xi^2 \leq 1$ szakaszon megrajzolni.

Az egyenesek az ordinátatengelyt mind a $\ln \frac{\rho^2}{e}$ értéknél metszik, amint már előbb is említettük (ugyanarra a csőre). Mármost ez a $\ln \frac{\rho^2}{e}$ érték mindig negatív, mert $\rho = \frac{r_0}{r_1} < 1$ (A cső belső sugara nem lehet nagyobb a külső sugárnál!)

Tekintve, hogy az egyenesek iránytangense $[1 - 2(\kappa - \chi)]$ -vel egyenlő, tehát ez az érték fogja meghatározni, hogy lesz-e egyáltalában az egyenesnek és a logaritmusgörbének a $0 < \xi^2 \leq 1$ szakaszon metszéspontja és hogy hány pontban metszi az egyenes a logaritmusgörbét.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a plasztikus részben mindenütt a (II) összefüggés határozza meg a kialakuló feszültségi állapotot, azaz :

$$\sigma_t^* = \pm k (= \pm k_1^2).$$

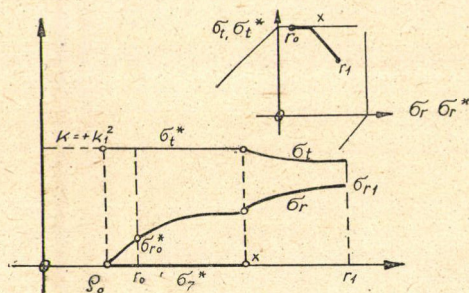
Ezt a dinamikai egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy :

$$\frac{d}{dr} (r\sigma_r^*) = \pm k$$

$$(15) \quad \begin{aligned} r\sigma_r^* &= \pm kr + C \\ \sigma_r^* &= \pm k + \frac{C}{r}. \end{aligned}$$

Nézzük most, vajjon milyen határok között létezik a (II) feltételt kielégítő feszültségeloszlás? Ez a feszültségeloszlás csak ott állhat fenn, ahol a σ_r^* értéke zérus és $\sigma_t^* = +k_1^2$ vagy $\sigma_t^* = -k_1^2$ közé esik. Tehát a következő két eset lehetséges:

$$(16) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{0 \leq \sigma_r^* \leq \sigma_t^*}{\sigma_t^* = +k_1^2} & [k > 0] \\ & \sigma_r^* = \pm k_1^2 - \frac{C}{r^2} \\ \text{b)} \quad & \frac{\sigma_t^* \leq \sigma_r^* \leq 0}{\sigma_t^* = -k_1^2} \\ (17) \quad & \sigma_r^* = -k_1^2 - \frac{C}{r} & [k < 0]. \end{aligned}$$



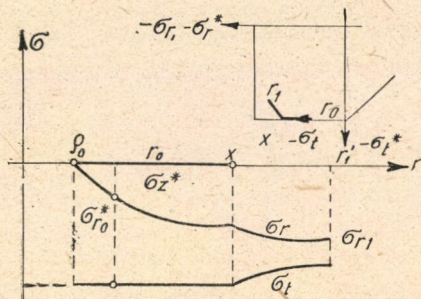
9. ábra

A $\sigma_t^* = \pm k$ feltételt kielégítő feszültségeloszlás csak olyan r sugaraknál létezik, amelyek nagyobbak, mint az az $r = q_0$ érték, ahol $\sigma_r^* = 0$. Ha a cső külső rétegében a feszültségeloszlás elasztikus, és előírjuk a σ_r feszültség értékét az $r = r_1$ külső sugáron, akkor az előzőekben összefoglalt elv alapján most is megállapíthatjuk annak az $r = x$ átmeneti sugárnak az értékét, ahol a $\sigma_t^* = \pm k$ feltételt kielégítő plasztikus feszültségi állapot átmegy az elasztikus feszültségi állapotba. A 9. és 10. ábra egy-egy ilyen összetett feszültségeloszlást mutat, egyidejűleg feltüntetve, hogy a q_0 értéktől az r_1 -ig növekvő r sugár esetén az egyes radiális és tangenciális feszültségértékek hogyan helyezkednek el a St. Venant-féle hatszögben.

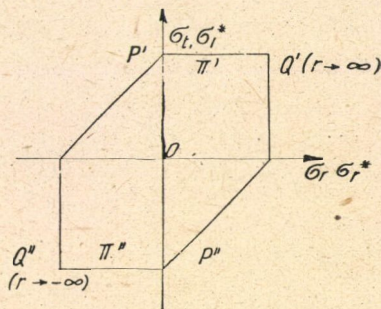
A $\sigma_t^* = \pm k$ feltételt kielégítő plasztikus feszültségek a St. Venant-féle hatszögnek a (II') és (II'') oldalain helyezkednek el, (l. a 11. ábrát), és pedig ha az r sugár értéke q_0 -tól kezdve nő minden határon túl, akkor azok a pontok, amelyek a St. Venant-féle hatszögben a $\sigma_t^* = \pm k$ feltételt kielégítő plasztikus radiális és tangenciális feszültségi értékeket jelentik, a P' -től a Q' -höz, illetve a P'' -től a Q'' -höz közelednek. Ugyanis, ha r értéke minden határon túl nő,

a σ_r^* plasztikus radiális feszültség értéke $\pm k$ -hoz konvergál. Ha a cső külső rétegében a feszültségeloszlás elasztikus, az x átmeneti sugártól kezdve a radiális és tangenciális feszültségek értékei a St. Venant-féle hatszög belsejében, egy-egy a pozitív σ_r^* tengellyel 135° -os szöget bezáró egyenesen helyezkednek el. (L. a 9. és 10. ábrákat.)

Vizsgáljuk a továbbiakban a (15) egyenlet által meghatározott plasztikus feszültségeloszlást és keressük, hogy ha a vizsgált vastagfalú cső belső rétegében a (15) egyenlet által leírt plasztikus feszültségeloszlás, a külső részben pedig elasztikus feszültségeloszlás lép fel, adott határfeltételek mellett hogyan számítható ki az x átmeneti sugár értéke?



10. ábra



11. ábra

Előírva, hogy $\sigma_r(r_0) = \sigma_{r0}^*$, kapjuk a következőket :

$$(18) \quad \begin{aligned} \sigma_{r0}^* &= \pm k + \frac{C}{r_0} \\ C &= (\sigma_{r0}^* \mp k) r_0 \\ \sigma_r^* &= \pm k + \frac{r_0}{r} (\sigma_{r0}^* \mp k). \end{aligned}$$

Ha még előírjuk, hogy $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r1}$, akkor az x átmeneti sugár meghatározására a következő két egyenlet írható fel a $\sigma_r(x) = \sigma_r^*(x)$ és $\sigma_t(x) = \sigma_t^*(x)$ feltételek alapján :

$$(19') \quad \pm k + \frac{r_0}{x} (\sigma_{r0}^* \mp k) = \sigma_{r1} - C_2 \frac{r_1^2 - x^2}{r_1^2 \cdot x^2}$$

$$(19'') \quad \pm k = \sigma_{r1} + C_2 \frac{r_1^2 + x^2}{r_1^2 \cdot x^2}.$$

A (19'')-ből C_2 -t kifejezve és a (19')-be helyettesítve nyerjük, hogy :

$$\pm k + \frac{r_0}{x} (\sigma_{r0}^* \mp k) = \sigma_{r1} + (\mp k + \sigma_{r1}) \frac{r_1^2 x^2}{r_1^2 + x^2} \frac{r_1^2 - x^2}{r_1^2 x^2}.$$

Rendezés után az egyenlet így alakul :

$$(20) \quad r_0(\sigma_{r0}^* \mp k) x^2 + (\pm 2kr_1^2 - 2\sigma_{r1}r_1^2) x + r_0r_1^2(\sigma_{r0}^* \mp k) = 0.$$

A (20) egyenletet dimenziótlanná tehetjük, ha mindkét oldalát elosztjuk kr_1^3 -nal, és aztán bevezetjük a következő jelöléseket :

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{x}{r_1} &= \xi \\ \frac{r_0}{r_1} &= \varrho \\ \frac{\sigma_{r_1}}{k} &= \kappa \\ \frac{\sigma_{r_0}^*}{k} &= \chi. \end{aligned}$$

Az így módon dimenziótlanná tett egyenlet így írható :

$$(22) \quad (\chi \mp 1) \varrho \xi^2 + 2(\pm 1 - \kappa) \xi + \varrho(\chi \mp 1) = 0.$$

Az így nyert, ξ -ben vegyes másodfokú egyenlet megoldásai :

$$(23') \quad \begin{aligned} \text{a) } k > 0 \\ (k = +k_1^2) \end{aligned} \quad \xi_{1,2} = -\frac{1 - \kappa}{\varrho(\chi - 1)} \pm \sqrt{\left[\frac{1 - \kappa}{\varrho(\chi - 1)} \right]^2 - 1}$$

$$(23'') \quad \begin{aligned} \text{b) } k < 0 \\ (k = -k_1^2) \end{aligned} \quad \xi_{1,2} = \frac{1 + \kappa}{\varrho(\chi + 1)} \pm \sqrt{\left[\frac{1 + \kappa}{\varrho(\chi + 1)} \right]^2 - 1}.$$

Tehát, ha adva vannak a cső méretei (r_0 , r_1) és a határfeltételek ($\sigma_{r_0}^*$, σ_{r_1}), akkor a (23) képletek segítségével közvetlenül nyerhető a $\xi = \frac{x}{r_1}$ viszony.

Hátra van még annak az esetnek a vizsgálata, amikor a plasztikus feszültségeloszlás a $|\sigma_r^*| \leq k$ törvény által van meghatározva. Ez a feltétel kétféleképpen teljesülhet, vagy úgy, hogy :

$$\sigma_r^* \geq \sigma_t^* \geq 0$$

vagy pedig :

$$0 \leq \sigma_t^* \leq \sigma_r^*,$$

Tehát plasztikus radiális feszültségre írhatjuk, hogy :

$$\sigma_r^* = \pm k,$$

amiből következik, hogy :

$$\frac{d}{d \ln r} \sigma_r^* = 0,$$

de akkor :

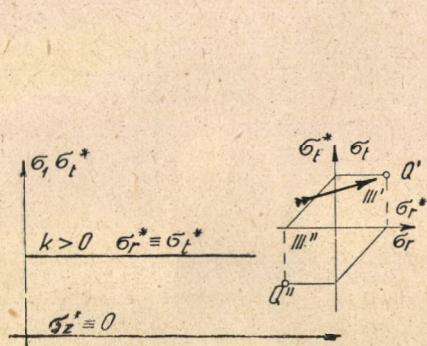
$$\sigma_r^* - \sigma_t^* = 0$$

és

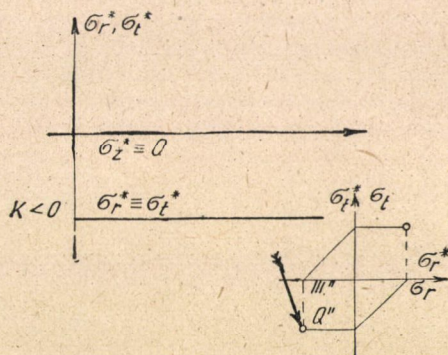
$$(24) \quad \sigma_r^* = \sigma_t^* = \pm k.$$

Ez az eset áll elő pl. akkor, ha egy tömör hengerre minden oldalról egyenletes nyomás hat. ($k < 0$ eset.) Ekkor, amennyiben az igénybevétel oly nagy, hogy bekövetkezik a $\sigma_r^* = \sigma_t^* = -k$ eset, az illető testben nem jön létre egyensúlyi állapot, hanem az anyag folyni fog. Ha viszont figyelembe vesszük, hogy a $\sigma_r^* = \pm k$ egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha egyidejűleg: $\sigma_t^* = \pm k$, akkor arra a megállapításra jutunk, hogy a St. Venant-féle hatszögnek III' és III'' oldalai tulajdonképpen csak a Q' és a Q'' pontban definiálnak egy plasztikus feszültségi állapotot, amely — ellentétben az I', I'', II', II'' oldalakon fekvő pontok által definiált plasztikus egyensúlyi állapotokkal — nem jelent egyensúlyi állapotot. Tehát megállapítható, hogy a St. Venant-féle hatszög III' és III'' oldalai nem léteznek olyan értelemben, mint a plasztikus és elasztikus feszültségi állapotokat elhatároló egyenesek.

A 12. és 13. ábrák tüntetik fel a $\sigma_r^* = \sigma_t^* = +k$, illetve a $\sigma_r^* = \sigma_t^* = -k$ egyenletet kielégítő feszültségeloszlásokat.



12. ábra



13. ábra

Láttuk tehát, hogy a St. Venant—Tresca feltevést matematikailag kifejező összefüggések milyen plasztikus feszültségeloszlásokra vezetnek, ha azokat a dinamika által szolgáltatott differenciálegyenletbe helyettesítjük. Reámutattunk arra a tényre is, hogy a matematika által szolgáltatott feszültségi függvények közül csak azokat használhatjuk fel plasztikus feszültségi állapotok definiálására, amely plasztikus feszültségi állapotoknak előfeltételei fizikailag is megvalósulhatnak. Összetett (részben plasztikus, részben elasztikus) feszültségi állapot szempontjából nyomott (kívülről vagy belülről) vastagfalú csövekben csak a plasztikus egyensúlyi állapotot létesítő

$$(10') \quad \sigma_r^*(r) = \sigma_{r_0}^* \pm k \ln \frac{r}{r_0}$$

$$(10'') \quad \sigma_t^*(r) = \sigma_{r_0}^* \pm k \left(1 + \ln \frac{r}{r_0} \right)$$

illetve:

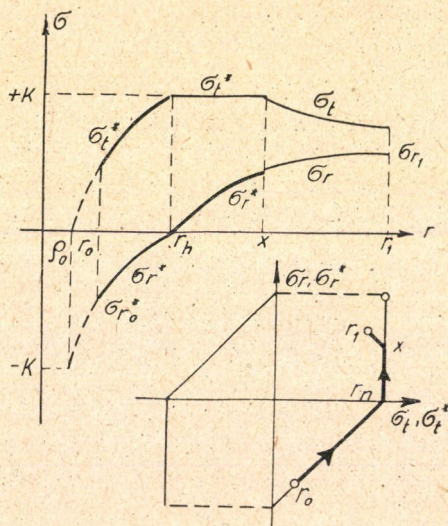
$$(18) \quad \sigma_r(r) = \pm k + \frac{r_0}{r} (\sigma_{r_0}^* \mp k)$$

$$(II) \quad \sigma_t^*(r) = \pm k$$

feszültségi függvények jöhettek tekintetbe.

A fenti megfontolások után felvethető a következő kérdés : lehetséges-e vajjon, hogy egy, a belső paláston nyomással, a külső paláston pedig húzással igénybe vett csőben egyidejűleg *háromféle* feszültségi állapot létezzék, azaz a plasztikus résznek egy részében a (10) egyenletek, másik részében pedig a (18, II) egyenletek szerinti feszültségeloszlás lépjen fel?

Eddigi meggondolásaink alapján a következőket állapíthatjuk meg : ha a belső hengerfelületen akkora nyomó-terhelést alkalmazunk, hogy a $|\sigma_t^* - \sigma_r^*| = k$ egyenletet kielégítő, plasztikus feszültségi állapot jön létre a cső legbelső rétegében, akkor ez a plasztikus feszültségi állapot csak azon a körhengerfelületen belül létezhet, amelynek r_h sugaránál $\sigma_r^*(r_h) = 0$ és $\sigma_t^*(r_h) = +k$ értéket vesz fel. (L. 14. ábra.) Ha mármost a σ_r elasztikus radiális feszültség értékét az r_1 külső sugáron úgy írjuk elő, hogy az x átmeneti sugár értéke r_h -nál kisebb, vagy r_h -val egyenlő, akkor az I. fajta plasztikus feszültségi állapot közvetlenül megy át az elasztikus feszültségi állapotba. Felvethető a kérdés, vajjon mekkora az a σ_{r_1} érték, amelynél $\sigma_r(r_h) = \sigma_r^*(r_h) = 0$ lesz? Ezt a σ_{r_1} értéket a következő módon nyerhetjük : ha r_h sugárnál $\sigma_r(r_h) = 0$ és $\sigma_t(r_h) = +k$ értékeket írunk elő az elasztikus feszültségeloszlás számára, akkor kiszámíthatjuk a C_1 és C_2 konstansoknak azon értékeit, melyek mellett $\sigma_r(r)$ és $\sigma_t(r)$ ennek a követelménynek eleget tesznek. Az így nyert $\sigma_r = \sigma_r(r)$ függvénynek az $r = r_1$ helyen felvett $\sigma_r(r_1)$ értéke lesz az a σ_{r_1} érték, amelynél nagyobb σ_{r_1} előírása esetén az I. plasztikus feszültségi állapot nem megy át közvetlenül az elasztikus feszültségi állapotba, hanem közbeiktatódik egy olyan tartomány, ahol a (18; II) egyenletet kielégítő plasztikus feszültségi állapot áll fenn. Ehhez csatlakozik az x átmeneti sugáron az elasztikus feszültségi állapot.



14. ábra

A (14) ábrán bemutatunk egy ilyen összetett feszültségeloszlást, ahol tehát a vizsgált vastagfalú cső legbelső rétegében ($r_0 \leq r \leq r_h$) a $|\sigma_t^* - \sigma_r^*| \leq k$ feltételt kielégítő plasztikus feszültségeloszlás, a középső rétegben a $|\sigma_t^*| \leq k$

feltételt kielégítő plasztikus feszültségeloszlás ($r_h \leq r \leq x$), a külső rétegben pedig, vagyis az $x \leq r \leq r_1$ intervallumban elasztikus feszültségeloszlás lép fel. A II. plasztikus és az elasztikus feszültségi állapotokat elválasztó x sugár értékét úgy számíthatjuk, mintha egy r_h belső sugarú vastagfalú csővünk volna, amelyben a II. plasztikus és az elasztikus feszültségi állapot lép fel és a határfeltételek :

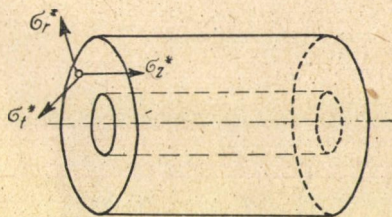
$$\sigma_r^*(r_h) = 0 \quad \text{és} \quad \sigma_r(r_1) = \sigma_{r1}.$$

A 15. ábrában is feltüntettük az egyes feszültségi állapotok ábrázolását a St. Venant-féle hatszögben is.

A plasztikus feszültségi állapot vizsgálata a Mises—Hencky-féle elmélet alapján

A Mises—Hencky-féle elmélet, amint erre már a bevezetésben rámutattunk, energetikai megfontolások alapján abból a feltevésből indul ki, hogy a plasztikusan viselkedő anyagban a három fő csúsztatófeszültség négyzeteinek összege állandó értékkel bír. Tekintve, hogy vizsgálatainkat olyan kétdimenziós feszültségi állapotra végezzük el, melynél a három főfeszültség közül egyik mindenütt zérus értékkel bír, tehát a három fő csúsztatófeszültség :

$$(\sigma_r^* - \sigma_t^*) ; (\sigma_r^* - 0) ; (\sigma_t^* - 0).$$



15. ábra

Az előadottak alapján a Mises—Hencky-féle elmélet alapfeltevése így írható :

$$(25) \quad (\sigma_r^* - \sigma_t^*)^2 + (\sigma_r^* - 0)^2 + (\sigma_t^* - 0)^2 = K^2$$

a négyzetreemelés után ez így alakul :

$$(25a) \quad \sigma \sigma_r^{*2} - \sigma_r^* \sigma_t^* + \sigma_t^{*2} = k^2.$$

Ez az egyenlet szolgáltatja a σ_r^* és σ_t^* plasztikus feszültségek között azt az összefüggést, amelyet az (1) egyenletbe behelyettesítve, megkapjuk a $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r)$ vagy $\sigma_t^* = \sigma_t^*(r)$ összefüggést szolgáltató differenciálegyenletet.

A következőkben keresni fogjuk, vajjon milyen lesz a $\sigma_r^*(r)$ és $\sigma_t^*(r)$ plasztikus feszültségek eloszlása két koncentrikus körhengerrel határolt, elméletileg végtelen hosszúnak tekintett hengeres test belsejében, amelyre a külső és a belső hengerfelületen húzó-nyomó terhelések hatnak.

Az (1) egyenletbe a P_r helyébe zérust helyettesítve, a plasztikus feszültségekre is érvényes dinamikai egyenlet így írható :

$$(1a) \quad \frac{d}{dr} (r\sigma_r^*) - \sigma_t^* = 0.$$

Ezt az egyetlen differenciálegyenletet szolgáltatja a dinamika a $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r)$ és $\sigma_t^* = \sigma_t^*(r)$ összefüggések meghatározására. Rendelkezésünkre áll azonban a fentebb tárgyalt (25a) összefüggés, amelyből σ_r^* -ot vagy σ_t^* -ot a másik főfeszültség függvényeként kifejezhetjük és az így nyert kifejezést az (1a) egyenletbe helyettesítve, egy elsőrendű algebrai differenciálegyenletet nyerhetünk, amelyet integrálva megkapjuk a $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r)$ vagy $\sigma_t^* = \sigma_t^*(r)$ függvényt.

Tekintve, hogy az (1a) differenciálegyenlet homogén lineáris és a (25a) egyenlet baloldalán álló kifejezés pedig homogén másodfokú, szabad a (25a) egyenletben foglalt mellékfeltételt a következőképpen normírozni : legyen $k^2 = \frac{3}{4}$, vagyis :

$$(25b) \quad \sigma_r^{*2} - \sigma_r^* \sigma_t^* + \sigma_t^{*2} = \frac{3}{4}.$$

A (25b) egyenletből σ_t^* -ot kifejezve :

$$\sigma_t^* = \frac{\sigma_r^*}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \sigma_r^{*2}}$$

Az így nyert eredményt az (1a) egyenletbe helyettesítve nyerjük, hogy :

$$(26) \quad \frac{d}{d \ln r} \sigma_r^* + \frac{\sigma_r^*}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \sigma_r^{*2}} = 0.$$

A (25b) egyenlet, amely geometriailag szemlélve egy ellipszis egyenlete, átírható a következő paraméteres egyenletrendszerre. [3]

$$(27') \quad \sigma_r^* = \sin \left(t + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$(27'') \quad \sigma_t^* = \sin \left(t - \frac{\pi}{6} \right)$$

A (27) összefüggéseket az (1a) egyenletbe beírva nyerjük, hogy :

$$\frac{d}{d \ln r} \left(\frac{1}{2} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \right) + \cos t = 0.$$

A változókat szeparálva kapjuk, hogy :

$$\frac{d(\cos t + \sqrt{3} \sin t)}{\cos t} + 2d \ln r = 0,$$

azaz :

$$d \ln \cos t + \sqrt{3} dt + 2d \ln r = 0.$$

Mindkét oldalon integrálva :

$$(28) \quad \ln r + \frac{1}{2} \ln \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} t + C = 0$$

vagy más alakban :

$$(28a) \quad r = C \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} t}}{\sqrt{\cos t}}.$$

Tekintettel arra, hogy a (28a) képletben $\cos t$ négyzetgyökkel alatt szerepel, a C állandó a következőképpen választandó :

$$C = C, \text{ ha } 0 \leq \cos t \leq 1$$

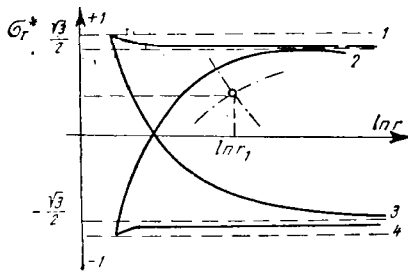
$$C = iC, \text{ ha } -1 \leq \cos t \leq 0.$$

A (27) és (28) egyenletek által meghatározott plasztikus feszültség-eloszlásokat az 1., 2. diagrammok szemléltetik.

Amennyiben birtokában vagyunk a (26) differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldását reprezentáló két integrálgörbének, a következőképpen nyerhetjük egy tetszőszerinti $\ln r_1, \sigma_{r_1}^*$ értékpárhoz tartozó két integrálgörbét :

I. A $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sigma_r^* \leq 1$ intervallumban az 1. és 3. görbeágakat (l. 16. ábra) kell úgy párhuzamosan eltolni a $\ln r$ tengely mentén, hogy a két görbeág egymást az adott $\ln r_1, \sigma_{r_1}^*$ koordinátákkal bíró pontban messe.

II. A $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sigma_r^* \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ intervallumban a 2. és 3. görbeágakat kell az adott pontba megfelelően eltolni, hogy megkapjuk az adott ponton átmenő két integrálgörbét.



16. ábra

III. A $-1 \leq \sigma_r^* \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ intervallumban a 2. és 4. görbeágak szolgáltatják — megfelelő eltolás után — az $\ln r_1, \sigma_{r_1}^*$ koordinátákkal bíró ponton átmenő integrálgörbéket.

Az I—III.-ban foglaltakkal analóg módon nyerhetjük egyik σ_i^* ($\ln r$) görbepár ismeretében bármely $\ln r_1$, $\sigma_{r_1}^*$ értékpárhoz tartozó partikuláris megoldást.

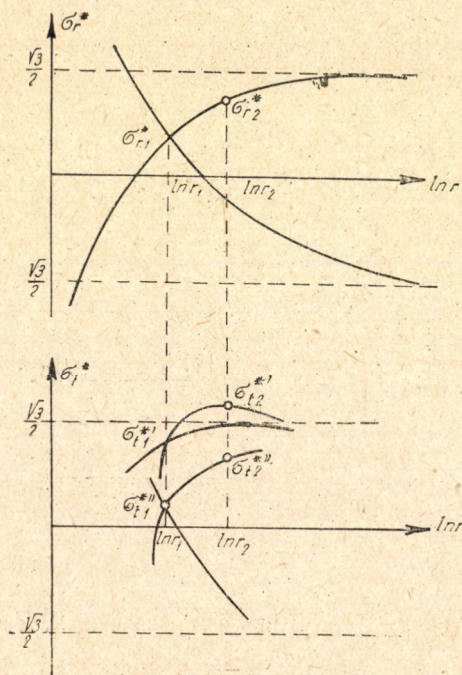
Az előadottak után még válaszolnunk kell arra a kérdésre, hogy ha ismeretes $\ln r_1$, $\sigma_{r_1}^*$ értékpárhoz tartozó két integrálgörbe, hogyan nyerhetjük a hozzájuk tartozó két σ_i^* ($\ln r$) függvényt? Erre a kérdésre a válasz a következő:

Az adott $\sigma_{r_1}^*$ értékhez két σ_i^* érték tartozik, mert:

$$\sigma_i^* = \frac{\sigma_r^*}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \sigma_r^{*2}}.$$

Mármost mindkét σ_i^* -hez ugyanaz a $\ln r_1$ érték tartozván, megszerkesztjük az $\ln r_1$, $\sigma_{r_1}^*$ és $\ln r_1$, $\sigma_{i_1}^*$ értékpárokon áthaladó két-két σ_i^* görbét. Ily módon négy $\sigma_i^*(\ln r)$ görbét kaptunk. Ha az adott σ_r^* görbén kiválasztunk egy tetszős szerinti $\ln r_2$, $\sigma_{r_2}^*$ koordinátákkal bíró pontot, e pont $\sigma_{r_2}^*$ koordinátájához ugyancsak két σ_i^* érték, nevezetesen: $\sigma_{i_2}^{*'}$ és $\sigma_{i_2}^{*''}$ van rendelve. A $\sigma_{i_2}^{*'}$ rajta lesz a $\sigma_{i_1}^{*'}$ -n keresztül rajzolt két σ_i^* görbe egyikén, a $\sigma_{i_2}^{*''}$ érték pedig rajta lesz a $\sigma_{i_1}^{*''}$ -n keresztülmenő két σ_i^* görbe egyikén. Az a két görbe, amely a $(\ln r_2, \sigma_{i_2}^{*'})$, illetve a $(\ln r_2, \sigma_{i_2}^{*''})$ pontokat tartalmazza, lesz az egyik σ_r^* görbéhez tartozó két σ_i^* ($\ln r$) integrálgörbe. (L. a 17—18. ábrákat.)

Tehát a $\ln r_1$, $\sigma_{r_1}^*$ koordinátákkal bíró ponton átmenő két σ_r^* görbe mindegyikéhez két-két σ_i^* görbe tartozik, amint ez a (25b) egyenletből is azonnal megállapítható.



17., 18. ábra

Az összetartozó σ_r^* és σ_t^* görbeágakat az elmondottak alapján könnyűszerrel meghatározhatjuk.

Még arra a kérdésre kell válaszolnunk, hogy mi a teendő abban az esetben, ha $K^2 = \frac{3}{4}$, ahogy mi a (25a) egyenletet normíroztuk. Ekkor a (25b)

egyenlet alapján levezetett eredmények csak annyiban fognak változni, hogy σ_r^* és σ_t^* értékeit egy állandóval osztani vagy megszorozni kell.

Vizsgáljuk most, hogy ha olyan összetett feszültségi állapotot tételezünk fel egy vastagfalú csőben, amelynek megfelelően a plasztikus részben a feszültségek a Mises—Hencky-féle elmélet által előírt módon viselkednek, akkor hogyan kell a plasztikus és elasztikus részeket elválasztó körhengerfelület x sugarát megállapítanunk?

Ebben az esetben a plasztikusan viselkedő hengerrészben a feszültségek és a sugár közti összefüggést a (27) és (28) egyenletekből nyerjük, az elasztikus részben a feszültségeket a (6) egyenletek határozzák meg:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^* &= \sin \left(t + \frac{\pi}{6} \right) \\ \sigma_t^* &= \sin \left(t - \frac{\pi}{6} \right) \\ r &= \frac{C \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{\sqrt{\cos t}} \end{aligned} \right\} \text{plasztikus rész}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= C_1 - \frac{C_2}{r^2} \\ \sigma_t &= C_1 + \frac{C_2}{r^2} \end{aligned} \right\} \text{elasztikus rész}$$

A C , C_1 és C_2 állandók értékét például úgy rögzíthetjük, hogy előírjuk a σ_r^* függvény értékét egy tetszés szerinti helyen és előírjuk a σ_r függvény értékét két tetszés szerinti helyen, vagy pedig előírhatjuk a σ_r és σ_t függvények értékét ugyanazon a tetszés szerinti helyen, de ez utóbbi csak elméletileg lehetséges, mert fizikailag nem tudunk olyan külső feltételeket konstruálni, amelyek egy általunk előírt σ_r és σ_t feszültséget eredményeznek a cső külső hengerpálástján.

Tekintve, hogy mind a radiális, mind pedig a tangenciális feszültségek folytonosan mennek át az elasztikus állapotból a plasztikus állapotba, írhatjuk, hogy:

$$\sigma_r(x) = \sigma_r^*(x) \quad \text{és} \quad \sigma_t(x) = \sigma_t^*(x).$$

Ebből, és a (25a) egyenletnek ilyen alakú átalakításából:

$$\left(\frac{\sigma_r^* + \sigma_t^*}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sigma_r^* - \sigma_t^*}{2} \right)^2 = k^2$$

nyerjük, hogy :

$$(29) \quad \left(\frac{\sigma_r(x) + \sigma_t(x)}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sigma_r(x) - \sigma_t(x)}{2} \right)^2 = k^2.$$

A (29) egyenletből most már a következőképpen nyerjük az elasztikus és plasztikus részeket elválasztó körhenger x sugarát :

Tekintve, hogy [a (6) egyenletekből] :

$$\frac{\sigma_r(r) + \sigma_t(r)}{2} = C_1 \quad \text{és} \quad \frac{\sigma_r(r) - \sigma_t(r)}{2} = -\frac{C_2}{r^2}$$

és

$$\frac{\sigma_r(x) + \sigma_t(x)}{2} = C_1; \quad \frac{\sigma_r(x) - \sigma_t(x)}{2} = -\frac{C_2}{x^2},$$

ahol a C_1 és C_2 állandók értékeit a következő egyenletek szolgáltatják :

$$(30) \quad C_1 = \frac{\sigma_{r_1} + \sigma_{t_1}}{2}; \quad C_2 = -r_1^2 \frac{\sigma_{r_1} - \sigma_{t_1}}{2} \quad \begin{matrix} \sigma_{r_1} = \sigma_r(r_1) \\ \sigma_{t_1} = \sigma_t(r_1) \end{matrix}.$$

A C_1 és C_2 állandók értékeit a (6) egyenletből $\sigma_r(x)$ -szel és $\sigma_t(x)$ -vel kifejezve és a (29) egyenletbe helyettesítve, az $r = x$ átmeneti sugáron :

$$C_1^2 + 3 \frac{C_2^2}{x^4} = k^2.$$

Tehát :

$$(31) \quad x = \sqrt[4]{\frac{3 C_2^2}{k^2 - C_1^2}}.$$

Ha mármost előírjuk, hogy a vastagfalú cső belső hengerpalástján a plasztikus radiális feszültség értéke : $\sigma_r^*(r_0) = \sigma_{r_0}^*$ és a külső hengerpaláston az elasztikus radiális feszültség értéke : $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$, akkor az x átmeneti sugár kiszámításához meg kell állapítanunk, hogy vajjon melyik az a $\sigma_t(r_1) = \sigma_{t_1}$ érték, amelyet a (29) egyenletet kielégítő $\sigma_t(r)$ függvény az r_1 külső sugáron felvesz? Ennek az σ_{r_1} értéknek az ismeretében a C_1 és C_2 már kiszámítható a (30) egyenletekből, és az így nyert értékeknek (31)-be való helyettesítésével közvetlenül nyerhető az x átmeneti sugár értéke.

A (28) egyenlet átalakításával kapjuk, hogy :

$$(32) \quad 2 \ln \frac{C}{r} = \sqrt{3} \arcsin \frac{\sigma_r^*(r) + \sigma_t^*(r)}{2k} + \frac{1}{2} \ln \left[1 - \left(\frac{\sigma_r^*(r) + \sigma_t^*(r)}{2k} \right)^2 \right].$$

Az $r = x$ átmeneti sugáron :

$$2 \ln \frac{C}{x} = \sqrt{3} \arcsin \frac{\sigma_r(x) + \sigma_t(x)}{2k} + \frac{1}{2} \ln \left[1 - \left(\frac{\sigma_r(x) + \sigma_t(x)}{2k} \right)^2 \right].$$

Ez az egyenlet, ha x értékét a (31) képletből kifejezzük, nyilván így írható :

$$2 \ln C - \frac{1}{2} \ln \frac{C_2^2}{k^2 - C_1^2} = \sqrt{3} \arcsin \frac{\sigma_r(x) + \sigma_t(x)}{2k} + \frac{1}{2} \ln \left[1 - \left(\frac{\sigma_r(x) + \sigma_t(x)}{2k} \right)^2 \right]$$

vagy :

$$(33) \quad - \left(\ln \frac{C_2}{k} - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \left(\frac{C_1}{k} \right)^2 \right) \right) + 2 \ln C = \sqrt{3} \arcsin \frac{C_1}{k} + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \left(\frac{C_1}{k} \right)^2 \right)$$

Ebből az összefüggésből, tekintve, hogy C értékét a $\sigma_{r_0}^* = \sigma_{r_0}^*(r_0)$ feltétele előírásával már rögzítettük,

$$\ln C = \frac{1}{2} \left[2 \ln r_0 + \sqrt{3} \arcsin \frac{\sigma_{r_0}^* + \sigma_{r_0}^*(r_0)}{2k} + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \left(\frac{\sigma_{r_0}^* + \sigma_{r_0}^*(r_0)}{2k} \right)^2 \right) \right]$$

a keresett σ_{t_1} érték meghatározására a következő eljárást követhetjük :

A (33)-ból :

$$(34) \quad 2 \ln C = + \ln \frac{C_2}{k} + \sqrt{3} \arcsin \frac{C_1}{k}.$$

A (30) egyenletből C_1 és C_2 értékeit kifejezve :

$$2 \ln C = \ln \left(\frac{\sigma_{t_1} - \sigma_{r_1}}{2k} r_1^2 \right) + \sqrt{3} \arcsin \frac{\sigma_{t_1} + \sigma_{r_1}}{2k}$$

vagy más alakban :

$$(35) \quad \ln \left(\frac{r_1^2}{C^2} \frac{\sigma_{t_1}}{2k} - \frac{r_1^2}{C^2} \frac{\sigma_{r_1}}{2k} \right) = -\sqrt{3} \arcsin \left(\frac{\sigma_{t_1}}{2k} + \frac{\sigma_{r_1}}{2k} \right).$$

Vezessük be a következő jelöléseket :

$$(36) \quad \begin{aligned} \frac{\sigma_{t_1}}{2k} &= \xi - a \\ \frac{\sigma_{r_1}}{2k} &= a \\ \frac{r_1^2}{C^2} &= b. \end{aligned}$$

Akkor a (35) egyenlet így írható :

$$\ln (b\xi - 2ab) = -\sqrt{3} \arcsin \xi$$

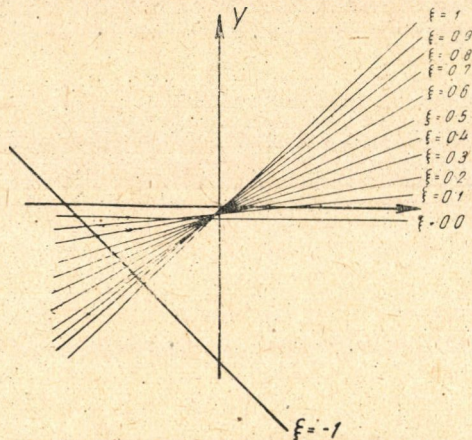
vagy :

$$(37) \quad b\xi - 2ab = e - \sqrt{3} \arcsin \xi.$$

A (37) egyenlet alapján lehetővé válik, hogy a ξ meghatározására egyenes-sereges nomogrammot készítsünk. Ugyanis a (37) egyenletet a $X = b$ és $Y = 2ab$ jelölések bevezetésével a következő alakban írhatjuk:

$$(38) \quad Y = \xi X - e^{-\sqrt{3} \arcsin \xi}$$

Ha X -et és Y -t pontkoordinátáknak, ξ -t pedig paraméternek tekintjük, akkor a (38) egyenlet egyenessereget jelent. A nomogramm használata úgy történik, hogy a konkrét feladat állandóiból X -et és Y -t a (36) és (38) képletek segítségével kiszámoljuk, és akkor a nomogramm adott (X, Y) pontján átmenő egyenes ξ paraméter-értéke lesz a keresett ξ érték. Ebből kiszámítható a keresett σ_{t1} érték és a C_1 és C_2 állandók értéke, és a (31) képlet alapján kiszámítható az x átmeneti sugár értéke.



19. ábra

A (36) képletek alkalmazását, illetőleg a ξ meghatározására szolgáló nomogramm megszerkesztését és használatát illetőleg szükséges megjegyeznünk a következőket:

A $\sigma_r^*(r_0) = \sigma_{r_0}^*$ feltétel előírása után kiszámítható a C állandó értéke:

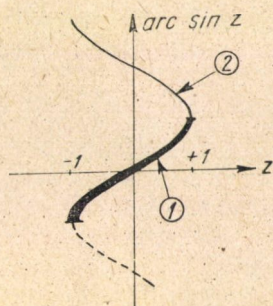
$$\ln C = \frac{1}{2} \left\{ 2 \ln r_0 + \sqrt{3} \arcsin \frac{\sigma_{r_0}^* + \sigma_{t_0}^*}{2k} + \frac{1}{2} \ln \left[1 - \left(\frac{\sigma_{t_0}^* + \sigma_{t_0}^*}{2k} \right)^2 \right] \right\}$$

vagy:

$$C = \frac{r_0}{\sqrt[4]{1 - \frac{(\sigma_{r_0}^* + \sigma_{t_0}^*)^2}{4k^2}}} e^{\frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \frac{\sigma_{r_0}^* + \sigma_{t_0}^*}{2k}}$$

Tekintve, hogy a C kiszámítására szolgáló képletben (a negyedik gyökök közül csak a pozitív valós gyök jöhet tekintetbe) szerepel a többértékű $\arcsin$ függvény, tehát a C értékére a képletből elméletileg végtelen sok érték adódik. Ezek közül azonban csak kettőt használhatunk, mert egy $\ln r$, $\sigma_r^*(\ln r)$ ponton keresztül két $\sigma_r^*(\ln r)$ görbe rajzolható. Viszont, ha e két C értéket

az $\arcsin \frac{\sigma_{r_0}^* + \sigma_{t_0}^*}{2k}$ görbe (1) és (2) szakaszaiból nyerjük, akkor bármely, e kettőtől különböző C érték előállítható, mint az (1) vagy (2) szakaszból nyert C -nek és $e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$ -nek szorzata. Ha azonban megvizsgáljuk a Mises—Hencky-féle plasztikus feszültségeloszlást szolgáltató (27) és (28), ill. (28a) egyenleteket, kitűnik, hogy ha C értékének $C \cdot e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$ -re változása esetén t helyébe $(t - \pi)$ -t írunk, akkor a (27) egyenletek változatlanul ugyanazt az ellipszist szolgáltatják, viszont a (28a) egyenlet ugyanolyan alakú lesz, mint a C értékének az $e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$ -vel való szorzása előtt volt.



20. ábra

Elegendő tehát az $\arcsin \frac{\sigma_{r_0}^* + \sigma_{t_0}^*}{2k}$ görbe (1) és (2) ágából adódó két C értéket meghatározni. Viszont a (38) egyenlethez tartozó nomogramm megszerkesztésénél is azt az ágot kell felhasználnunk az arcussinus függvénynek, amelyik ágának felhasználásával a C értékét kiszámítottuk. (Ezért két nomogrammot készítettünk: (3a) és (3b) nomogrammat.)

A St. Venant—Tresca és a Mises—Hencky-féle elméletek összehasonlítására megszerkesztettünk egy, a St. Venant—Tresca elmélet által leírt-összetett plasztikus feszültségeloszlást, ahol a plasztikus és elasztikus részeket elválasztó hengerfelület sugarának és a külső sugárnak aránya: $= \frac{x}{r_1} = 5/8$.^{*} Ha most feltesszük, hogy a feszültségek eloszlását a Mises—Hencky-féle elmélet határozza meg, és a vastagfalú cső méretei ugyanazok, mint az előbb, valamint a $\sigma_r^*(r_0) = \sigma_{r_0}^*$ és $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$ értékek is ugyanazok, akkor a plasztikus és elasztikus feszültségi állapotokat elválasztó hengerfelület sugarát, a következőképpen számíthatjuk ki:

A C állandó értékeire azt kapjuk, hogy:

$$\ln C = \begin{cases} 0,9 \\ \text{vagy} \\ 3,16 \end{cases}$$

^{*} L. a 4. diagrammot!

Ugyanis :

$$\frac{\sigma_{r_0}^*}{k} = -0,31$$

és

$$\frac{\sigma_{t_0}^*}{k} = 0,81$$

Viszont :

$$\frac{\sigma_{r_1}}{k} = 0,62$$

Az a plasztikus feszültségeloszlás, amely megközelíti a 4. diagrammon látható St. Venant—Tresca szerinti plasztikus feszültségeloszlást, akkor áll elő, ha a $\ln C$ értékét a 3,16-nak választjuk. Akkor :

$$C = 23,5$$

$$X = 0,116$$

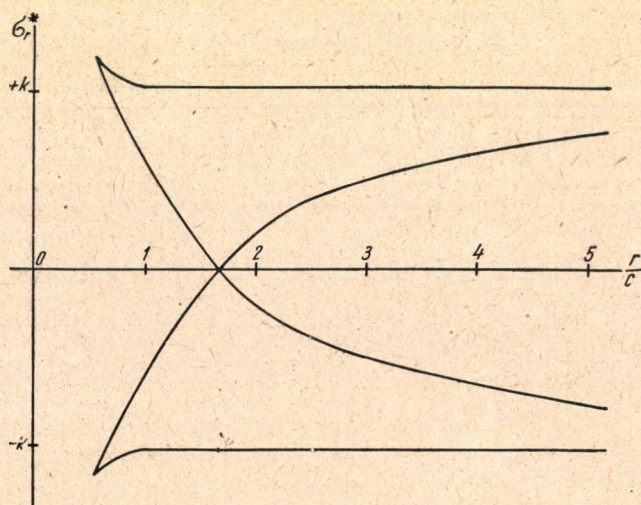
$$Y = 0,62 \cdot 0,116 = 0,072$$

Ebből azt kapjuk, hogy $\xi = 0,8$, mert a (3b) diagrammban az $X = 0,116$, $Y = 0,072$ koordinátákkal bíró pont éppen rajta van azon az egyenesen, amely a $\xi = 0,8$ értékhez tartozik.

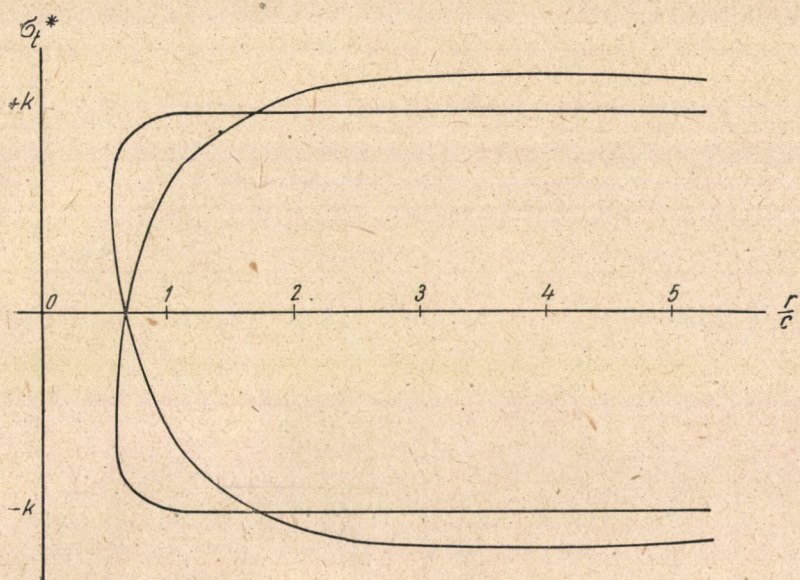
De akkor : $\sigma_t(r_1) = 0,98$

$$C_1 = 0,8k$$

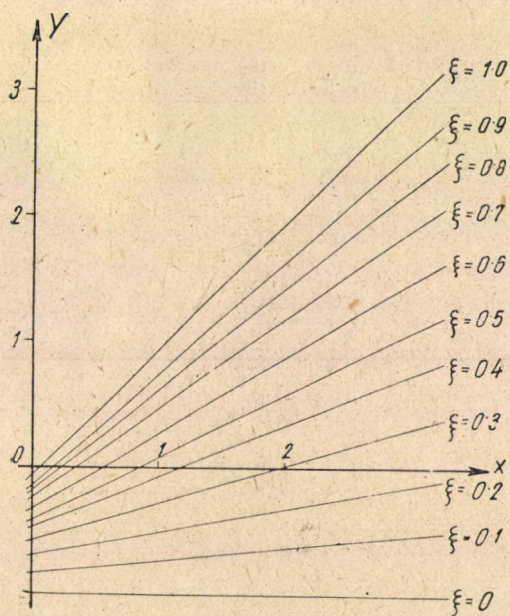
$$C_2 = 11,5k$$



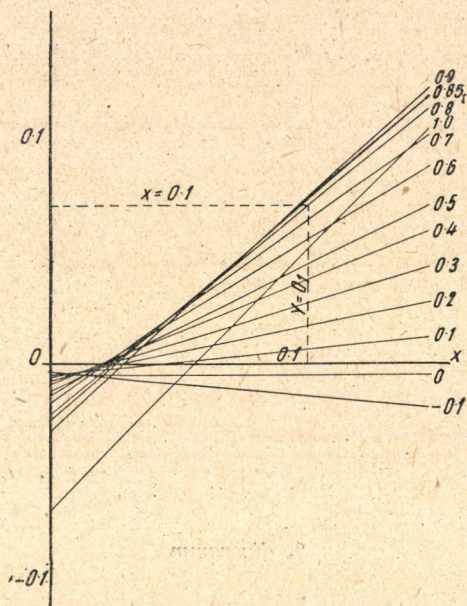
1. diagramm



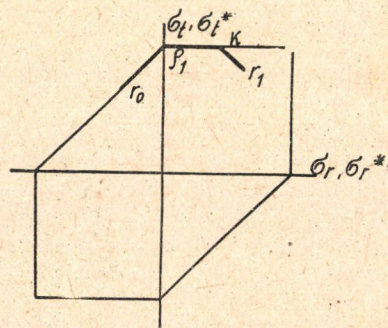
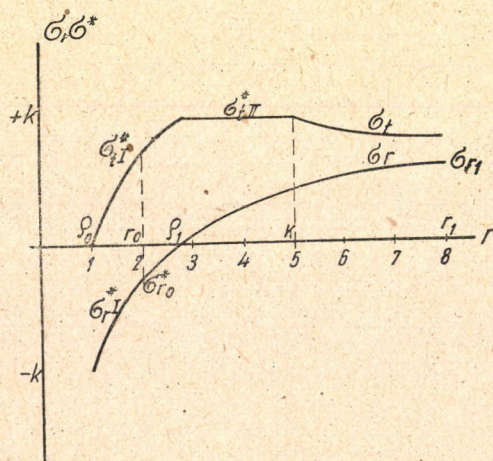
2. diagramm



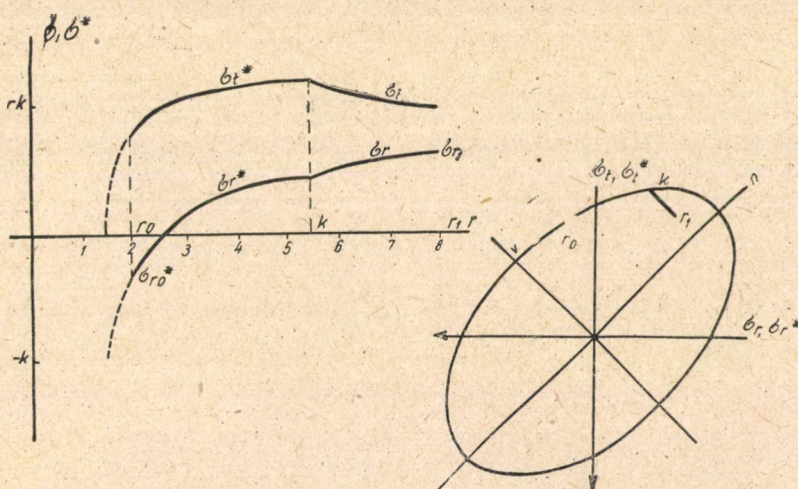
3/a. diagramm



3/b. diagramm



4. diagramm



5. diagramm

Így a plasztikus és elasztikus részeket elválasztó hengerfelület sugara : $x = 5,5$, vagyis az átmeneti sugár és a külső sugár aránya : $\frac{x}{r} = 5,5/8$. Tehát a Mises—Hencky-féle, bonyolultabb számítással adódó érték viszonylag nem sokat tér el az egyszerűbb St. Venant-féle elmélet alapján végzett számítás által nyert értéktől, mint várható is volt.

IRODALOM

1. Lásd : Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, IV. Band, 4. Teilband, 359 oldalán. (Th. Kármán: Festigkeitsprobleme in Maschinenbau.) Leipzig, 1907—1914.
2. Lásd pl.: H. Geiger—K. Scheel: Handbuch der Physik — Mechanik der elastischen Körper, Kapitel 6. (A. Nádal: Plastizität und Erddruck.) Berlin, 1928.
3. A t segédváltozót a σ_r^* -re vonatkozó differenciálegyenletben szereplő irracionalitás eltüntetése céljából vezettük be. Hasonló parametrizálást alkalmaz a plasztikus jelenségek tárgyalásánál B. B. Соколовский: Теория пластичности. с. könyvében, Moszkva—Leningrád, 1950.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАСТИЧНЫХ И ЭЛАСТИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ НАПРЯЖЕНИЯ В ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБКАХ

В. ЛОВАШ—НАДЬ

Резюме

В этой работе автор занимается математическим исследованием пластичных и сложных (частью пластичных, частью эластичных) состояний напряжения, устанавливающихся в толстостенных трубках, нагруженных большим гидростатическим давлением. К определению напряжений σ_r^* и σ_t^* , возникающих в случае нагрузок, превышающих границу течения, кроме известного, существующего в случае осесимметричной нагрузки, уравнения равновесия тел, ограниченных коаксиальными цилиндрами (и

читанных бесконечно длинным), они используют условия компатибиличности теорий пластичности Сен-Венан-Треска и Мизес-Генки.

После соответствующего обеим теориям пластичности определения функций, описывающих пластичное состояние напряжения, автор определяет в случае сложной (пластичной и эластичной) нагрузки радиус круглого цилиндра, разделяющего пластичные и эластичные части.

Настоящая работа — часть исчислений автора, выполненных в 1948 г. на основе наказа Электрической Фабрики им. Ганца, в качестве сотрудника академика Э. Эгервари.

SUR LES ÉTATS DE TENSION PLASTIQUES ET ÉLASTIQUES DANS LES TUYAUX À PAROI ÉPAISSE

V. LOVASS—NAGY

R é s u m é

Dans cet article l'auteur s'occupe de l'examination mathématique des états de tension plastiques et composés (partiellement plastiques partiellement élastiques) qui se présentent dans les tuyaux à paroi épaisse chargés d'une grande pression hydrostatique. Outre l'équation d'équilibre connue qui a lieu dans le cas d'une charge axiellement symétrique des corps limités par des cylindres circulaires coaxiaux (et considérés comme d'une longueur infinie) l'auteur fait usage pour déterminer les tensions qui se présentent au cas des charges dépassant la limite de *fluxion*, des conditions de compatibilité de la théorie de plasticité de Saint-Venant—Tresca, ainsi que de la théorie de plasticité de Mises—Hencky.

Après avoir déterminé les fonctions décrivant l'état de tension plastique conformément aux deux théories de plasticité, l'auteur détermine le rayon du cylindre circulaire qui sépare les parties plastiques des parties élastiques dans le cas d'un effort composé (plastique et élastique).

L'article présent forme une partie des calculs que l'auteur a effectués en 1948 sur la base d'un mandat reçu de la part de l'usine d'électricité Ganz, comme collaborateur de E. Egerváry.