KOMPRESSZOROK ÉS LÉGTARTÁLYOK RACIONÁLIS MÉRETEZÉSE ÜZEMEK SŰRÍTETT LEVEGŐVEL VALÓ ELLÁTÁSÁRA

RÉNYI ALFRÉD

ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozat a következő probléma megoldását tartalmazza: Egy üzemben több, sűrített levegővel működő gép működik, a gépek véletlenszerűen lesznek be-, illetőleg kikapcsolva. A sűrített levegőt egy kompresszor szolgáltatja, amely egy tartályt tölt fel; a fogyasztók a tartályból kapják a sűrített levegőt. Ha a tartályban egy bizonyos ν_1 határt meghalad a légnyomás, a kompresszor automatikusan kikapcsolódik és csak akkor kapcsolódik be, ha a nyomás egy bizonyos $\nu_2 < \nu_1$ határ alá süllyed. A feladat abban áll, hogy meghatározzuk, mekkorának kell lennie a kompresszor teljesítőképességének ahhoz, hogy a nyomás a tartályban gyakorlatilag soha ne süllyedjen egy bizonyos $\nu_0 < \nu_2$ határ alá, amely még elegendő a gépek zavartalan működésének biztosításához. A probléma megoldása valószínűségszámítási módszerekkel, mégpedig a Markov-féle láncok elméletének felhasználásával történik. — Az eredmények grafikus formában vannak ábrázolva, úgy, hogy adott fogyasztás- és tartályméret mellett a grafikonból számítás nélkül leolvasható, hogy a kompresszort hogyan kell méretezni.

Az ebben a dolgozatban tárgyalt problémával a Gépipari Tervező Intézet felkérésére foglalkozott az Intézet. A probléma jelentőségét az adja meg, hogy ha kompresszorok és légtartályok méretezésénél a valószínűségszámítás alkalmazásán alapuló pontos számításokat végzünk, ezáltal új üzemek létesítésénél jelentős megtakarításokat lehet elérni. A probléma elméleti szempontból ahhoz a problémakörhöz tartozik, amellyel az előző dolgozat [1] foglalkozik: itt is véletlen ingadozásokat mutató energiafogyasztásról van szó. A probléma speciális jellegét az adja meg, hogy egyrészt a sűrített levegővel dolgozó fogyasztók (döngölők, prések stb.) nem közvetlenül a kompresszorból kapják a sűrített levegőt, hanem egy légtartály van közbeiktatva, amelynek feladata éppen abban áll, hogy a fogyasztás véletlen ingadozásait kiegyensúlyozza, másrészt pedig, hogy bizonyos részleges automatikus szabályozás is történik,* amennyiben a kompresszor automatikusan kikapcsolódik, ha a nyomás a légtartályban egy bizonyos felső határt túlhalad és csak akkor kapcsolódik automatikusan újból be, ha a nyomás a légtartályban egy bizonyos alsó határ alá süllyed. Már itt felhívjuk a figyelmet arra, hogy műszakilag lehetségesnek látszik a berendezés teljes automatizálása, aminek kétségkívül nagy előnyei

* Ennek következtében lépnek fel a probléma tárgyalásánál sajátságos matematikai nehézségek, mégpedig, hogy a légtartály állapotváltozásai nem alkotnak egyszerű Markov-láncot, hanem csak ú. n. másodrendű Markov-láncot.

volnának.* Ezt a lehetőséget azonban itt csak felvetjük, a matematikai tárgyalásban csak a részleges automatizálás esetével foglalkozunk.

A tulajdonképpeni feladat, amivel a dolgozat foglalkozik, a következő: meghatározandó, hogy adott légtartályméret és adott fogyasztás mellett milyen teljesítőképességű kompresszorral lehet biztosítani, hogy a tartályban a légnyomás gyakorlatilag soha se süllyedjen azon határ alá, mely még elegendő a gépek működtetéséhez. Ezt a problémát bizonyos — gyakorlatilag megengedhető — egyszerűsítő feltevések mellett oldottuk meg.

A probléma műszaki vonatkozásait illetőleg értékes útmutatásokat kaptunk *Sors László* mérnöktől, a GÉTI munkatársától; ugyancsak ő volt az, aki felismerte, hogy a szóbanforgó kérdés pontos megoldásához matematikai módszerek alkalmazására van szükség, mindezért ezúton köszönetet mondunk neki. Köszönet illeti *Takács Lajost*, Intézetünk munkatársát, akivel ezen munka készítése közben a felmerült problémákat megvitattuk és ezek során több olyan megjegyzést tett, melyeket munkámban fel tudtam használni.

Az 1. § tartalmazza a probléma matematikai formába való öntését, és elvi megoldását, a 2. § a részletes számításokat. A számítások eredményét grafikonok formájában ábrázoltuk, úgyhogy az eredmények gyakorlati alkalmazása során a kívánt eredmény minden számítás nélkül a grafikonról leolvasható legyen. Ezeket a grafikonokat a dolgozat végén közöljük.

A 3. § néhány megjegyzést tartalmaz a dolgozatban tárgyalt problémával kapcsolatban.

1. §. *A probléma matematikai formában való megfogalmazása*

Tegyük fel, hogy egy üzemben N »fogyasztó« (döngölő, prés, stb.) működik sűrített levegővel, amelyek — amennyiben működnek — időegységenként ugyanannyi sűrített levegőt fogyasztanak. A fogyasztókat időnként bekapcsolják, majd kikapcsolják. Jelöljük a t időpontban működő gépek számát ξ_t-vel; ξ_t értékét csak t olyan értékeire fogjuk vizsgálni, amelyek egy időegység egészszámú többszörösei, vagyis a $t = 0, 1, 2, \ldots$ értékekre. Az időegység megválasztásával, amely itt igen lényeges, később fogunk foglalkozni. Feltesszük, hogy a gépek ki- és bekapcsolódásai csak a $t = 0, 1, 2, \ldots$ időpontokban történhetnek, vagyis a ki- és bekapcsolások időpontjait mindig egészszámmá kerekítjük; ha az időegységet elég kicsinyre választjuk, ez nem jelent lényeges elhanyagolást. Ugyanúgy, mint az előző dolgozatban [1], belátható, hogy az egyidejűleg működő fogyasztók száma binomiális eloszlást követ, mégpedig ha annak valószínűségét, hogy egyidejűleg n fogyasztó működik, P_n-nel jelöljük, úgy**

$$V(\xi_t = n) = P_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \quad (n = 0,1,\ldots,N). \tag{1.1}$$

* Erre a lehetőségre *H. Steinhaus* lengyel matematikus hívta fel figyelmemet amikor 1952 szeptemberében Wroclawban a sztochasztikus folyamatokra vonatkozó konferencián tartott előadásomban többek között jelen dolgozat eredményeit is ismertettem.

** $V(A)$-val az A esemény valószínűségét jelöljük.

ahol $p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$, λ jelenti egy fogyasztó bekapcsolásának időbeli valószínűség-sűrűségét és $\frac{1}{\mu}$ az átlagos működési időt. Ha feltesszük, hogy a működési idők exponenciális eloszlásúak, úgy a $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_t, \ldots$ valószínűségi változók Markov-féle láncot alkotnak, vagyis, ha ismerjük ξ_t értékét, úgy $\xi_{t+\tau}$ feltételes valószínűségeloszlása független attól, hogy $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{t-1}$ milyen értéket vettek fel. Ez abból következik, hogy exponenciális eloszlás esetén annak a valószínűsége, hogy egy gép, amely t időpontban működött, $t + \tau$ időpont előtt ki legyen kapcsolva, nem függ attól, hogy a t időpontot megelőzően a gép mennyi ideig működött. Ugyanis ha $F(t)$ jelenti a működési idő valószínűségeloszlását és a gép a $t_0 < t$ időpontban kezdett működni, úgy a keresett valószínűség

$$\frac{F(t + \tau - t_0) - F(t - t_0)}{1 - F(t - t_0)} \tag{1.2}$$

és ha $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$ úgy ez a kifejezés $1 - e^{-\mu\tau}$-val egyenlő, vagyis nem függ $(t - t_0)$-tól ; ezzel szemben minden más esetben ez a kifejezés függeni fog $(t - t_0)$-tól, ennélfogva a valószínűségi változók akkor és csak akkor alkotnak Markov-láncot, ha a működési idők exponenciális eloszlásúak.

Tegyük fel, hogy minden fogyasztó, ha működik, ugyanannyit fogyaszt, mégpedig időegységenként α liter levegőt,* feltesszük továbbá, hogy a fogyasztás független a tartályban lévő levegő nyomásától. Mivel a gyakorlatilag előforduló nyomásingadozások nem túl nagyok, ez a feltevés nem jelent lényeges elhanyagolást. Feltesszük továbbá, hogy ha a tartályban lévő levegő nyomása egy bizonyos ν_1 atmoszféra határt túlhalad, a kompresszor automatikusan kikapcsol és csak akkor kapcsol be újra, ha a nyomás bizonyos $\nu_2 < \nu_1$ határ alá süllyed. A gyakorlatban általában megadják a tartály normál nyomását, amelyet ν-vel jelölünk és a szabályozó berendezést úgy építik, hogy v_1 kb. 10%-kal vagy még kevesebbel legyen nagyobb, ν_2 pedig 10%-kal vagy még kevesebbel legyen kisebb, mint ν. A ν normál nyomásértéke a gyakorlatban 7—8 atmoszféra, mi a $\nu = 8$ atmoszféra esetre végeztük el a numerikus számításokat. A tartály űrtartalmát köbméterekben jelöljük W-vel, ez esetben tehát a kompresszor kikapcsol, ha a tartályban lévő levegő mennyisége eléri az $1100\,\nu W$ litert és bekapcsol, ha $900\,\nu W$ literre süllyed. Nevezzünk α liternyi levegőt 1 *adag*nak, így tehát a kompresszor kikapcsol, ha a tartályban $\frac{1100\nu W}{\alpha} = H_1$-nél több »adag« levegő van, és bekapcsol, ha a tartályban lévő levegő kevesebb, mint $H_2 = \frac{900\nu W}{\alpha}$ adag. Tegyük fel, hogy a kompresszor — ha működik — időegységenként $k\alpha$ liter levegőt nyom be a tartályba.**

Jelentse η_t a t időpontban a tartályban lévő levegő*adagok* számát (tehát a tartályban lévő levegő mennyisége a t időpontban $\eta_t\alpha$ liter). Az η_t valószínűségi változók által alkotott (diszkrét) sztochasztikus folyamat nem egyszerű,

* 1 liter levegőn itt és a következőkben mindig 1 liter 1 atmoszféra nyomású levegőt értünk.

** A következőkben a számítások egyszerűsítése céljából feltesszük, hogy k egész-szám; ez nem jelent lényeges megszorítást.

hanem *másodrendű* Markov-lánc: ez teszi a problémát matematikai szempontból bonyolulttá. A következőkben ugyanúgy, mint ξ_t esetében, az η_t változót is csak t *nem* negatív egészszámú értékeire vizsgáljuk, vagyis a $t = 0, 1, 2, \ldots$ időpontokban. Mivel az időegységet általában igen rövidre választjuk, (általában néhány másodpercnek, de legfeljebb 1 percnek) gyakorlatilag ez megengedhető. Ez esetben tehát az $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ valószínűségi változók sorozatával foglalkozunk csak; feltesszük, hogy $\eta_0 = H = \frac{1000 \nu W}{\alpha}$ egész szám. Ami az automatikus szabályozást illeti, ezt a matematikai elméletben a következőképpen vesszük figyelembe: Feltesszük, hogy a kompresszor a t időpontban ($t = 1, 2, \ldots$) kikapcsol, ha $\eta_{t-1} \leqq H$, de $\eta_t > H$, továbbá, hogy a kompresszor a t időpontban bekapcsol, ha $\eta_{t-1} > H$, de $\eta_t \leqq H$. Mivel feltevésünk szerint k egész szám, tehát η_t egy időegység alatt mindig egész számmal változik meg és $\eta_0 = H$ is egész, tehát η_t csak egész számú értékeket vehet fel; ilyen módon tehát, ha $\eta_{t-1} \leqq H$ és $\eta_t > H$, úgy η_t lehetséges értékei $H + 1, H + 2, \ldots, H + k$, míg ha $\eta_{t-1} > H$ és $\eta_t \leqq H$, úgy η_t lehetséges értékei $H, H - 1, \ldots, H - N + 1$.* Az egyidejűleg működő gépek átlagos száma (1) szerint $\frac{N\lambda}{\lambda + \mu} = Np$, így tehát ha $\eta_{t-1} \geqq H$, úgy η_t várható értéke $\geqq H - Np$, míg ha $\eta_{t-1} \leqq H$, úgy η_t várható értéke $< H + k - Np$. Nyilvánvaló, hogy a kompresszor csak úgy tudja ellátni a fogyasztást, ha $k > Np$; a probléma éppen abban van, hogy meghatározzuk, hogy k értékét mennyivel kell nagyobbra választani Np-nél (azaz mekkora kell, hogy legyen az $\frac{Np}{k} < 1$ hányados), hogy a légnyomás a tartályban gyakorlatilag sohasem süllyedjen egy olyan ν_0 érték alá, amely alatt a nyomás már nem elegendő a gépek működtetéséhez.** Az $1 - \frac{Np}{k} = \varepsilon$ szám a *beépítendő kihasználatlan kapacitás:* ennek meghatározása a dolgozat célja. Mármost tehát az elmondottak értelmében a kikapcsolás időpontjában a tartályban lévő levegőadagok várható száma $H + k - Np$-nél nem nagyobb, míg a bekapcsolás időpontjában a tartályban lévő levegőadagok számának várható értéke $H - Np$-nél nagyobb. Látni fogjuk, hogy a gyakorlatban előforduló esetekben k értéket alig kell nagyobbra választani Np-nél és mindenesetre $k < 2Np$, tehát a kikapcsolás időpontjában $< H + Np$, a bekapcsolásnál $> H - Np$ adag levegő lesz a tartályban; *ha tehát az időegységet úgy választjuk meg, hogy* $Np \leqq \frac{H}{10}$ *legyen, úgy az automatikus szabályozást a választott matematikai modell hűen tükrözi vissza*, hiszen a kikapcsolás nagy valószínűséggel 1,1 H adag alatt, a bekapcsolás 0,9 H adag felett fog történni. Így például, ha a tartály űrtartalma $W = 40$ m^3, a normál nyomás 8 atmoszféra és a fogyasztók száma 200, egy fogyasztó másodpercenként 50 liter levegőt fogyaszt és a gépek általában 50%-nyira vannak kihasználva $\left(p = \frac{1}{2}\right)$, úgy $Np = 100$ és így az $Np < \frac{H}{10}$ feltétel

* Feltesszük, hogy $H > N$ azaz ha a tartályban normál nyomás van, úgy a tartály levegőmennyisége 1 időegységre még akkor is fedezi a fogyasztást, ha az összes fogyasztó működik és a kompresszor áll.

** Ezt a nyomást a következőkben 6.5 atmoszférának vesszük.

azt jelenti, hogy $H = \frac{320,000}{50\tau} > 1000$, ha τ jelenti sec-okban a választott időegységet; ez esetben tehát kell, hogy $\tau < 6{,}4$ sec legyen és így 6 sec-os időegység ez esetben megfelelő (ekkor $\alpha = 300$ liter). Hasonlóképpen lehet minden esetben a helyes időegységet megválasztani.

Mármost vizsgáljuk meg, milyen összefüggés áll fen ξ_t és η_t között. Nyilvánvaló, hogy

$$\eta_{t+1} = \begin{cases} \eta_t + k - \xi_t & \text{ha } \eta_t \leqq H \\ \eta_t - \xi_t & \text{ha } \eta_t > H. \end{cases} \tag{1.3}$$

Bevezetve az

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x + k & \text{ha } y \leqq H \\ y - x & \text{ha } y > H \end{cases} \tag{1.4}$$

kétváltozós függvényt, fennáll tehát a következő összefüggés:

$$\eta_{t+1} = f(\xi_t, \eta_t) \quad (t = 0,1,2,\ldots). \tag{1.5}$$

Mint már említettük, az η_t változók nem alkotnak egyszerű Markov-láncot, hanem ú. n. másodrendű Markov-láncot, vagyis adott η_t érték mellett η_{t+1} értékére η_{t-1} értéke befolyással bír, de $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{t-2}$ értékei már nem. Ezt a következőképpen láthatjuk be: mivel $\eta_{t+1} = \eta_t + K - \xi_t$ vagy $\eta_{t+1} = \eta_t - \xi_t$ aszerint, hogy $\eta_t \leqq H$ vagy $\eta_t > H$, tehát adott η_t mellett η_{t+1} értéke csak ξ_t értékétől függ. Mivel másrészt $\eta_t = \eta_{t-1} + k - \xi_{t-1}$, illetve $\eta_t = \eta_{t-1} - \xi_{t-1}$ aszerint, hogy $\eta_{t-1} \leqq H$ vagy $\eta_{t-1} > H$, tehát ha η_t és η_{t-1} adva vannak, úgy ezáltal ξ_{t-1} *egyértelműen* meg van határozva és így nem függ $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{t-2}$ értékeitől. De viszont a ξ_t változók Markov-láncot alkotnak és így ha ξ_{t-1} értéke adott, úgy ξ_t feltételes eloszlása nem függ $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{t-2}$ értékeitől, ennélfogva nem függhet $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{t-2}$ értékeitől sem. Másrészt különböző η_{t-1} értékeknek különböző ξ_{t-1} értékek felelnek meg, tehát η_{t+1} értékének feltételes eloszlása adott η_t mellett még függ η_{t-1} értékétől.

Figyelembevéve, hogy a $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ változók Markov-láncot alkotnak, könnyen belátható, hogy a $\zeta_t = \xi_t + i\eta_t$ komplex értékű változók ($i = \sqrt{-1}$) is Markov-láncot alkotnak.* Ugyanis, ha $\zeta_t = \xi_t + i\eta_t$ értékét ismerjük, úgy ismerjük külön-külön ξ_t és η_t értékét, ezek együtt egyértelműen meghatározzák η_{t+1} értékét, míg ξ_{t+1} különböző értékeket felvehet, de ezek valószínűségeire kizárólag ξ_t értéke bír befolyással, ξ_j ($j = 0, 1, \ldots t-1$) nem és így η_j ($j = 0, 1, \ldots t-1$) sem. [Hasonlóképpen Markov-láncot alkotnak a $\zeta_t^* = \xi_t + i\eta_{t+1}$ változók is, hiszen ha ζ_t^* értékét ismerjük, úgy ismerjük ξ_t és η_{t+1} értékét és így arra, hogy $\zeta_{t+1}^* = \xi_{t+1} + i\eta_{t+2}$ különböző lehetséges értékeit milyen valószínűségekkel veszi fel, $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \ldots \zeta_{t-1}^*$ értékei semmilyen befolyással nem bírnak, mivel ξ_{t+1} értékére csak ξ_t értéke bírhat befolyással, míg ha ξ_{t+1} ismeretes, úgy $\eta_{t+2} = f(\xi_{t+1}, \eta_{t+1})$ a szintén ismert η_{t+1} érték által egyértelműen meg van határozva.] Mivel $\eta_t = I(\zeta_t)$ ($I(z)$-vel a z komplex szám imaginárius részét jelöljük) tehát az η_t sztochasztikus folyamatot előállítottuk, mint egy komplex értékű Markov-lánc vetületét

* A $\zeta_t = \xi_t + i\eta_t$ változók helyett beszélhetünk a (ξ_t, η_t) koordinátákkal bíró (ξ_t, η_t) síkbeli változó pontról is.

az imaginárius tengelyen. Ez lehetőséget nyújt arra, hogy η_t vizsgálatánál — bár az η_t változók nem egyszerű, hanem másodrendű Markov-láncot alkotnak — az egyszerű Markov-láncok elméletére támaszkodjunk.*

A ζ_t változó lehetséges értékei az $x + iy$ komplex számok, ahol $x = 0, 1, 2, \ldots N$ és $y \leqq H + K$ szintén egész szám. ζ_t tehát minden esetben a komplex számsík valamely rácspontjának megfelelő komplex számmal egyenlő. A $\zeta_t = x + iy$, $0 \leqq x \leqq N$ $y \leqq H + K$ értékek a vizsgált rendszer egy-egy *állapotát* jellemzik.

A tartályban lévő levegőmennyiség nyilvánvalóan nem lehet negatív, ennek megfelelően a valóságban $\eta_t \geqq 0$. Gyakorlatilag természetesen még az sem engedhető meg, hogy $\eta_t = 0$ legyen, sőt, azt kell elérni, hogy $\eta_t \geqq H_0$ legyen ; ahol $H_0 = \frac{1000\nu_0 W}{a}$ és ν_0 jelenti a műszakilag megengedhető legkisebb nyomást, amely még elegendő a gépek működtetéséhez. A k számnak (azaz a kompresszor kapacitásának) megfelelő megválasztásával éppen azt kell elérnünk, hogy η_t értéke 1-hez igen közeli valószínűséggel ne süllyedhessen H_0 alá. A matematikai modell elvben nem zárja ki, hogy η_t H_0-nál kisebb értékeket (sőt negatív értékeket) is felvehessen, ennek azonban a mondottak értelmében olyan elenyésző kis valószínűsége lesz, hogy az semmilyen jelentőséggel nem bír.

A ζ_t $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ változókból álló Markov-lánc mint könnyen belátható, a következő tulajdonságokkal bír :

a) bármely állapotból bármely más állapotba megfelelő pozitív valószínűséggel el lehet jutni ; ebből következik, hogy a ζ_t Markov-lánc *irreducibilis.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\xi_t = x$ és $\eta_t = y$ és az $x + iy$ állapotból el akarunk jutni az $u + iv$ állapotba. Mivel $\xi_t = x$ feltétel mellett a $\xi_{t+1} = x'$ eseménynek x' minden számbajövő értékére pozitív valószínűsége van, ha $y' = f(x, y)$ úgy négy esetet kell megkülönböztetni :

1.) $$y' \leqq H\,, \quad v \leqq y' + k$$

ebben az esetben az átmenet pozitív valószínűséggel két lépésben megtörténhet, ugyanis pozitív valószínűsége van annak, hogy

$$\zeta_{t+1} = (y' + k - v) + iy' \quad \text{és} \quad \zeta_{t+2} = u + if(y' + k - v\,, y') = u + iv$$

legyen

2.) $$y' > H\,, \quad v \leqq y'$$

ebben az esetben is pozitív valószínűséggel lehetséges az átmenet két lépésben, ugyanis

$$\zeta_{t+1} = (y' - v) + iy' \quad \text{és} \quad \zeta_{t+2} = u + if(y' - v\,, y') = u + iv$$

pozitív valószínűséggel fordulhat elő.

3.) $$y' > H\,, \quad v > y'$$

* Ez a módszer igen sok más esetben is alkalmazható ; ha egy nem-Markov-típusú η_t sztochasztikus folyamat előállítható $\eta_t = F(\zeta_t)$ alakba, ahol ζ_t Markov-folyamat és $F(x)$ egy-egyértelmű transzformáció, ezt az illető folyamat *markovizálásának* nevezzük. Ennek a kérdésnek általános tárgyalásával más helyütt fogok foglalkozni. Magasabbrendű Markov-láncok tárgyalásának egyszerű Markov-láncokra való visszavezetését illetőleg lásd H. Wold munkáját [2].

ebben az esetben három lépésben lehetséges az átmenet, ugyanis két lépéssel átvihető a rendszer a $v - H - 1 + i(H + 1)$ állapotba, amelyből egy lépéssel elérhető az $u + iv$ állapot.

4.) $$y' \leqq H \quad v > y' + k.$$

Ebben az esetben van olyan r szám, hogy $v \leqq y' + rk$ és így $\xi_{t+1} = \xi_{t+2} = \ldots = \xi_{t+r} = 0$ esetben r lépésben a rendszer olyan állapotba kerül, amelyre az 1., 2. és 3. feltevések egyike már teljesül és így legfeljebb $r + 3$ lépéssel pozitív valószínűséggel elérhető az $u + iv$ állapot.

b) A rendszernek *nincsen periodikus állapota,* azaz olyan állapota, amelybe való visszatérés r lépésben csak úgy történhet meg, ha r osztható egy bizonyos $D > 1$ egész számmal (az állapot periódusával).

Bizonyítás : A $k + iH$ állapot azzal a tulajdonsággal bír, hogy pozitív valószínűsége van annak, hogy ha $\zeta_t = k + iH$, úgy $\zeta_{t+1} = \zeta_t$ legyen, mivel $f(k, H) = H$. Ha most a rendszer az $x + iy$ állapotból r lépéssel vihető a $K + iH$ állapotba és onnan s lépéssel vissza az $x + iy$ állapotba, úgy a $K + iH$ állapotba még egy lépésen át ott tartható és így $x + iy$ állapotba visszatérhet egyrészt $r + s$, másrészt $r + s + 1$ lépés alatt ; de akkor D osztója mind $r + s$-nek, mind $r + s + 1$-nek, tehát $D = 1$.

c) Ha $k > Np$, úgy *minden állapot rekurrens és nem nulla állapot* (azaz a rendszer bármely állapotból előbb-utóbb 1 valószínűséggel visszajut ugyanabba az állapotba és azon lépések számának várható értéke, ami alatt ez megtörténik, véges):

Ugyanis (l. [4]) általános tételekből következik, hogy elég kimutatni, hogy létezik egy rekurrens nem-nulla állapot. Ha ilyen állapot nem léteznék, úgy bevezetve a

$$P_{hjlm}^{(n)} = V(\zeta_n = l + im \mid \zeta_0 = h + ij)$$

e ölést* $\lim_{n\to\infty} P_{hjlm}^{(n)} = 0$ volna, h, j, l, m minden értékére. Azonban akkor fennállna, hogy

$$\varrho_n = \sum_{l=0}^{N} \sum_{m=H+1}^{H+k} P_{hjlm}^{(n)} \to 0. \tag{1.6}$$

Kimutatjuk azonban, hogy ez lehetetlen, ϱ_n ugyanis annak a valószínűségét jelenti, hogy a kompresszor nem működik a $t = n$ időpontban, feltéve, hogy a $t = 0$ időpontban $\xi_0 = h$ és $\eta_0 = j$ volt. Fennáll a következő összefüggés :

$$\mathbf{M}(\eta_{n+1}) = M(\eta_n) + \varrho_n(-Np) + (1 - \varrho_n)(k - Np), \tag{1.7}$$

ahol $M(.)$ a zárójelben álló valószínűségi változó *várható értékét* jelöli, és így (1.6)-ból következnék, hogy

$$\lim_{n\to\infty} [M(\eta_{n+1}) - M(\eta_n)] = k - Np > 0$$

* $V(A/B)$ az A esemény feltételes valószínűségét jelenti a B feltételre vonatkozólag.

azaz, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(\eta_{n+1})}{n+1} = k - Np > 0$$

ehát hogy

$$\lim_{n\to\infty} M(\eta_{n+1}) = +\infty .$$

Ez azonban lehetetlen, hiszen $\eta_{n+1} \leqq k + H$ tehát $M(\eta_{n+1}) \leqq k + H$. Ily módon az (1.6) feltevés ellentmondásra vezetett; ezzel viszont be van bizonyítva, hogy van rekurrens nem-nulla állapot, amiből — mint már említettük — következik, hogy minden állapot ilyen. Ebből megint csak ismert tételek segítségével (lásd [4]) következik, hogy *a ζ_n Markov-lánc minden állapota ergodikus*, tehát léteznek a

$$\lim_{n\to\infty} P_{hjlm}^{(n)}$$

határértékek, h, j, l, m minden számbajövő értékére és ezek a határértékek nem függnek h és j értékétől, azaz írhatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P_{hjlm}^{(n)} = \Pi_{lm} . \tag{1.8}$$

De akkor léteznek a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{N} P_{hjlm}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} V(\eta_n = m \mid \zeta_0 = h + ij) = \sum_{l=0}^{N} \Pi_{lm} = \Pi_m \tag{1.9}$$

határértékek is, azaz az η_n másodrendű Markov-lánc minden állapota is ergodikus. Éppen ebben áll a nem-egyszerű Markov-láncok markovizálásának a jelentősége: ezzel a módszerrel ki lehet mutatni az állapotok ergodikus jellegét. Feladatunk ma̋rmost a Π_m valószínűségek meghatározása. Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $\xi_0 = 0$ és $\eta_0 = H$, ez nem jelent lényeges megszorítást, ez a feltevés azt jelenti, hogy a $t = 0$ időpontban a tartályban a nyomás a normál szinten áll és egy gép sem működik. A következőkben ezt hallgatólagosan feltesszük, anélkül, hogy külön hangsúlyoznánk.

A jelölések egyszerűsítése céljából a következőkben a tartályban lévő nyomást azáltal jellemezzük, hogy megadjuk, hogy hány adaggal van kevesebb levegő a tartályban, mint abban az esetben, ha a nyomás maximális, vagyis bevezetjük az $\eta_t^* = H + k - \eta_t$ új változókat, és a (stacionér állapotra vonatkozó)

$$A_m = \lim_{t\to\infty} V(\eta_t^* = m) = \lim_{t\to\infty} V(\eta_t = k + H - m) = \Pi_{H+k-m} \tag{1.10}$$

jelölést, (1.3) értelmében az η_t^* változókra a következő összefüggés áll fenn:

$$\eta_{t+1}^* = \begin{cases} \eta_t^* - K + \xi_t & \text{ha} \quad \eta_t^* \geqq k \\ \eta_t^* + \xi_t & \text{ha} \quad \eta_t^* < k . \end{cases} \tag{1.11}$$

Ebből következik, hogy fennáll a következő összefüggés :

$$(1.12)\quad V(\eta_{t+1}^{*}=m)=\sum_{l=0}^{k-1}V(\eta_t^{*}=l)\,V(\xi_t=m-l\,|\,\eta_t^{*}=l)+$$

$$+\sum_{l=k}^{m+k}V(\eta_t^{*}=l)\,V(\xi_t=m+k-l\,|\,\eta_t^{*}=l)$$

$$(m=0,1,2,\dots).$$

Ezen a ponton a matematikai tárgyalás egyszerűsítése céljából figyelmen kívül hagyjuk a ξ_t és η_t^* közötti (igen laza) sztochasztikus kapcsolatot. Abban az esetben, ha a ξ_t változók egymástól függetlenek volnának, úgy ξ_t és η_t^* is függetlenek volnának, hiszen η_t^* csak $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{t-1}$ értékeitől függ. Amennyiben az időegységet elég nagynak választjuk, úgy a ξ_t változók valóban majdnem függetlenné válnak, ugyanis mint azt később meg fogjuk mutatni, a ξ_t és $\xi_{t+\tau}$ változók korrelációs együtthatója rögzített τ és $t \to \infty$ mellett konvergál az $e^{-\mu\tau}$ értékhez, vagyis két időpontban vizsgálva a működő gépek számát az ezek közti korreláció a két időpont távolságának növelésével exponenciálisan csökken. Azonban ξ_t és η_t^* akkor is csak igen laza sztochasztikus kapcsolatban vannak egymással, ha az időegységet kicsinyre választjuk, és a hiba, amelyet azáltal követünk el, hogy a ξ_t és η_t^* közötti sztochasztikus kapcsolatot elhanyagoljuk, nem befolyásolja lényegesen eredményeinket. Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy első közelítésként kezdettől fogva feltehettük volna, hogy a ξ_t változók függetlenek egymástól : ez esetben az η_t változók egyszerű Markov-láncot alkotnak, és így az (1.9) határértékek létezésének bizonyítása lényegesen egyszerűbb lett volna ; ezt azonban azért nem tettük meg, hogy megmutassuk, hogy a rendszer ergodicitása nem függ ettől az egyszerűsítő feltevéstől.

Ezen a ponton azonban már szükségünk van — ha nem is erre a feltevésre, de legalábbis ennek azon következményére, hogy ξ_t és η_t^* függetlennek tekinthetők. Ezen feltevés mellett a $V(\xi_t=\eta|\eta_t^*=l)$ feltételes valószínűség nem függ l-től, és nem más, mint az (1.1) alatt szereplő $P_n = V(\ _t = n)$ valószínűség. Mivel továbbá (1.10) szerint $\lim\limits_{t\to\infty} V(\eta_{t+1}^* = m) = A_m$ és $\lim\limits_{t\to\infty} V(\eta_t^* = l) = A_e$, tehát nyerjük (1.12)-ből a következő összefüggéseket :

$$(1.13)\quad A_m=\sum_{l=0}^{k-1}A_l P_{m-l}+\sum_{l=k}^{m+k}A_l P_{m+k-l}\qquad (m=0,1,2,\dots)$$

(ha $n < 0$ vagy $n > N$, úgy definíciószerűen $P_n = 0$). Ilyen módon *az ismeretlen* A_m *számokra egy lineáris egyenletrendszert nyertünk*, amelynek segítségével ezen ismeretlenek meghatározhatók. Ez legegyszerűbben a generátorfüggvény bevezetésével történhet ; legyen

$$(1.14)\quad A(z)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m z^m \quad \text{és} \quad A_k(z)=\sum_{m=0}^{k-1}A_m z^m ;$$

szorozzuk be (1.13) mindkét oldalát z^m-el és összegezzünk m minden értékére, úgy nyerjük a következő összefüggést :

$$A(z) = P(z)[A_k(z) + z^{-k}(A(z) - A_k(z))], \tag{1.15}$$

ahol

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} P_n z^n. \tag{1.16}$$

Mivel (1.1) szerint

$$P(z) = (1 + p(z-1))^N \tag{1.17}$$

tehát (1.15)-ből következik, hogy

$$A(z) = \frac{A_k(z)(1 + p(z-1))^N (z^k - 1)}{z^k - (1 + p(z-1))^N}. \tag{1.18}$$

Az (1.18) összefüggés alapján az A_m ($m = 0, 1, 2, \ldots$) számok meghatározhatók. Első pillanatra úgy látszik, mintha ezen számokat az (1.18) összefüggés nem határozná meg egyértelműen, hiszen a jobboldalon szereplő $A_k(z)$ $(k - l)$-fokú polinom nem más, mint $A(z)$ első k tagjának összege és úgy tűnik, mintha ennek együtthatói, vagyis az A_0, A_1, ... $A_k - 1$ számok önkényesen volnának megválaszthatók, és ezek megválasztása után ezek megválasztásától függő értékeket kapnánk az A_m ($m \geqq k$) számokra. Ez azonban nincsen így : Az A_0, A_1, ... A_{k-1} számok is egyértelműen meg vannak határozva az (1.18) összefüggés által, ha figyelembe vesszük, hogy az A_m számok valószínűségeket jelentenek, tehát nem negatívok és összegük 1-el egyenlő. Utóbbi feltételből ugyanis egyrészt adódik, hogy $A(1) = 1$, és így — (1.18) jobboldalára alkalmazva a l'Hospital szabályt — következik, hogy

$$1 = A_k(1)\frac{k}{k - Np}. \tag{1.19}$$

Ez máris egy összefüggést jelent $A_k(z)$ együtthatói között, mégpedig azt, hogy

$$A_k(1) = \sum_{m=0}^{k-1} A_m = 1 - \frac{Np}{k} = \varepsilon. \tag{1.20}$$

Az (1.20) baloldalán álló összeg egyébként éppen annak valószínűségét fejezi ki, hogy a kompresszor ne működjék ; ez a valószínűség pozitív, mivel feltettük, hogy $k > Np$. Másrészt abból, hogy az A_m számok nem-negatívok és összegük 1-el egyenlő, következik, hogy az $A(z)$ hatványsor konvergenciasugara legalább 1, és így az $A(z)$ függvény a komplex számsík egységkörének belsejében reguláris függvény ; másrészt viszont a *Rouché-tételből* következik (lásd részletesebben a 2. §-ban), hogy a $z^k - (1 + p(z-1))^N = 0$ egyenletnek az egységkör belsejében pontosan $k - 1$ gyöke fekszik : legyenek ezek a gyökök z_1, z_2 ... z_{k-1}. Mivel az $A(z)$ függvény ezekben a pontokban is reguláris, kell, hogy az (1.18) számlálójában álló polinom is eltűnjék ezekben a pontokban : ez csak úgy lehetséges, ha a z_j számok ($j = 1, 2, \ldots (k-1)$) az $A_k(z) = 0$ egyenlet gyökei. Mivel $A_k(z)$ pontosan

$k-1$ fokú, és (1.20) szerint együtthatóinak összege $1-\frac{Np}{k}$, ezáltal $A_k(z)$ egyértelműen meg van határozva. Tehát a k, p és N számok megadása egyértelműen meghatározza $A_k(z)$-t, és ilyen módon A_m-et is m minden értékére.

A feladat ezekután a következőkre redukálódott: megvizsgálandó, hogy adott p és N értékek mellett melyik k-nak az a legkisebb értéke, amelyre az (1.18) összefüggés által meghatározott $A(z)$ hatványsor A_m együtthatóira fennáll a

$$\sum_{m=M}^{\infty} A_m < \delta \tag{1.21}$$

egyenlőtlenség, ahol M értékét úgy kell megválasztani, hogy az éppen a megengedhető legkisebb légnyomásnak feleljen meg a tartályban. Ha a megengedhető legkisebb nyomás v_0, úgy ez megfelel $1000\frac{\nu_0 W}{\alpha}$ adag levegőnek a tartályban, vagyis az $\gamma_t = \frac{1000\nu_0 W}{\alpha}$ és így az $\eta_t^* = H + k - \frac{1000\nu_0 W}{\alpha}$ értéknek: ezek szerint $H_0 = 1000\frac{\nu_0 W}{\alpha}$ jelöléssel — (1.21)-ben $M = H + k - H_0$ veendő. Ami δ megválasztását illeti, ez attól függ, hogy mekkora biztonságot kívánunk elérni: a következőkben δ értékét mindig úgy választjuk meg, hogy átlag 3 hetente legfeljebb egyszer forduljon csak elő, hogy a nyomás a megengedhető alsó határ alá süllyedjen. Ez azt jelenti, hogy δ megválasztása függ az időegység megválasztásától.

A következő fejezetben foglalkozunk a most megfogalmazott feladat numerikus megoldásával. Előbb azonban még egy módosítást végzünk. A számítások egyszerűsítése végett célszerű az (1.1) binomiális elosztást Poisson-féle eloszlással közelíteni; ez teljes mértékben jogosult, ha — amint ez a gyakorlatban teljesül — p igen kicsiny és N viszont nagy szám*. Bevezetve az $Np = P$ jelölést, az (1.1) binomiális eloszlást közelítjük a (1.22)

$$P'_n = \frac{P^n}{n!} e^{-P} \tag{1.22}$$

Poisson-féle eloszlással. Ezt a közelítést az egész eddig végzett számításon végigvíve a különbség csak abban fog állni, hogy az (1.17) alatti $P(z) = (1 + p(z-1))^N$ függvény — az (1.1) binomiális eloszlás generátorfüggvénye — helyett az (1.22) Poisson eloszlás generátorfüggvénye, azaz

$$P(z) = e^{P(z-1)} \tag{1.23}$$

helyettesítendő (1.15)-be, és így (1.18) helyett a következő egyenletet kapjuk az $A(z)$ generátorfüggvényre:

$$A(z) = A_k(z)\frac{e^{P(z-1)}(z^k-1)}{z^k - e^{P(z-1)}}. \tag{1.24}$$

* Ez esetben a ξ_t változók olyan Markov-láncot alkotnak, amelynél a lehetséges »állapotok« száma megszámlálhatóan végtelen. Erre az esetre elsőnek A. N. Kolmogorov szovjet matematikus terjesztette ki a Markov-láncok klasszikus elméletét (lásd [3].)

Az (1.24) egyenletre áll mindaz, amit (1.18)-ról mondottunk, és ugyanolyan meggondolással, mint (1.18) esetében belátható, hogy (1.24) egyértelműen meghatározza az A_m valószínűségeket. Ezt részletesebben a következő fejezetben mutatjuk meg, amely az (1.21) egyenlőtlenség fennállását biztosító k érték tényleges meghatározását tartalmazza.

2. §. *A számítások numerikus keresztülvitele*

Vizsgáljuk meg mindenekelőtt közelebbről az

$$A(z) = \frac{A_k(z)\,(z^k - 1)\,e^{P(z-1)}}{z^k - e^{P(z-1)}} \tag{2.1}$$

összefüggést. $z = 1$-et helyettesítve kapjuk, hogy

$$1 = A(1) = A_k(1)\frac{k}{k-P}$$

és így

$$A_k(1) = 1 - \frac{P}{k} \tag{2.2}$$

(2.2)-ből is nyilvánvaló, hogy a probléma megoldhatóságának előfeltétele, hogy $P < k$ legyen. Ezt szemléletesen is könnyen beláthatjuk, hiszen ha az átlagos fogyasztás meghaladná a kompresszor teljesítőképességét, úgy nem alakulhatna ki stacionér állapot.

(2.1) segítségével az A_r ($r = k, k + 1, \ldots$) számok mind meghatározhatók, feltéve, hogy $A_0, A_1, \ldots A_{k-1}$ ismeretesek.

Az $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ számok látszólag önkényesen választhatók meg, valójában ez nem így van, hanem ezek a számok egyértelműen meg vannak határozva. Ugyanis könnyen be lehet látni, hogy az $A_k, A_{k+1}, \ldots$ számokat a (21) reláció szerint meghatározva, ezek a számok az $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ számoknak csak egyetlen lehetséges választása mellett jelenthetnek valószínűségeket. Ugyanis az A_n számok nem-negatívok kell hogy legyenek, akkor azonban a (2.1) baloldalán álló hatványsor — figyelembevéve, hogy — $A(1) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m = 1$ reguláris az egységkörben ; de akkor (21) jobboldalának is regulárisnak kell lennie ; ez pedig csak úgy lehetséges, ha a nevezőnek az egységkörben fekvő gyökei a számlálónak is gyökei. Mivel — mint ezt ki fogjuk mutatni — a $z^k - e^{P(z-1)} = 0$ egyenletnek pontosan $k - 1$ gyöke van az egységkör belsejében, tehát ezek a gyökök az $A_k(z) = 0$ egyenletnek is gyökei ; mivel $A_k(z)$ $(k - 1)$-fokú polinom, tehát gyökei által egy konstans faktortól eltekintve meg van határozva. Mivel pedig (2.2) fennáll, ez a konstans is egyértelműen meghatározható. Annak bizonyítása, hogy a

$$z^k - e^{P(z-1)} = 0 \tag{2.3}$$

egyenletnek pontosan $k - 1$ gyöke van az egységkör belsejében a *Rouché*-tétel segítségével történhet.

A (2.3) egyenletnek nyilvánvalóan egyszeres gyöke van a $z = 1$ pontban, ugyanis (2.3) baloldalának deriváltja az $z = 1$ helyen $k - P > 0$. Legyen most $f(z) = z^k$, $g(z) = -e^{P(z-1)}$, úgy ha $z = re^{i\vartheta}$, ahol $r > 1$, úgy $|g(z)| = e^{P(r\cos\vartheta - 1)} \leqq e^{P(r-1)} \leqq r^k$ feltéve, hogy $P(r-1) < k \log r$, utóbbi egyenlőtlenség viszont bizonyosan teljesül, ha $(r-1)$ elég kicsiny; ugyanis ha $0 < x \leqq 1$ úgy $\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2} = x\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ és így $k \log r > P(r-1)$,

$$\text{ha } 1 - \frac{P}{k} > \frac{r-1}{2}, \text{ tehát ha } r - 1 < 2\left(1 - \frac{P}{k}\right).$$

A Rouché-tétel szerint tehát a $|z| = r$ kör belsejében az $f(z) + g(z) = 0$ egyenletnek ugyanannyi gyöke van, mint az $f(z) = 0$ egyenletnek, azaz a $z^k = 0$ egyenletnek, tehát k gyöke van; mivel r tetszőlegesen közel választható 1-hez, ebből tehát következik, hogy a *zárt* egységkörben a (11) egyenletnek pontosan k gyöke van; az egységkör kerületén azonban a $z = 1$ ponton kívül más gyök nem fekhet, mivel ha $z = e^{i\vartheta}$, úgy $|e^{P(z-1)}| < 1 = |z^k|$, tehát (11)-nek $k - 1$ gyöke van az egységkör belsejében. Ezek a gyökök mind komplexek, ha k páratlan, míg ha k páros, egy gyök a negatív valós tengelyen fekszik. Ugyanis ha $h(z) = z^k e^{P(1-z)}$, úgy $h'(z) > 0$, ha $0 \leqq z \leqq 1$ és így mivel $h(0) = 0$ és $h(1) = 1$, tehát ha $0 < z < 1$, úgy $h(z) < 1$; ha k páratlan, úgy $h'(z) > 0$ a$(-1, 0)$ intervallumban is, míg ha k páros, úgy $h'(z) < 0$, ha $-1 < z < 0$ és $h(-1) = e^{2P} > 1$, tehát az $1 - h(z) = 0$ egyenletnek pontosan egy gyöke van a $(-1, 0)$ intervallumban. Az elmondottakból speciálisan következik, hogy ha $k = 1$, úgy a (2.3) egyenletnek nincsen gyöke az egységkör belsejében.

Az elmondottak szerint tehát

$$A(z) = \left(1 - \frac{P}{k}\right) \frac{(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{k-1})(z^k - 1)\, e^{P(z-1)}}{(1 - z_1)(1 - z_2)\ldots(1 - z_{k-1})(z^k - e^{P(z-1)})}, \tag{2.4}$$

ahol $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$ a (2.3) egyenletnek az egységkör belsejében fekvő gyökei. Ebből következik, hogy M_t-vel jelölve η_t^* várható értékét

$$M_t = A'(1) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{1 - z_j} + \frac{P-1}{2} + \frac{k}{2(k-P)}. \tag{2.5}$$

M_t kiszámításához tehát ismerni kellene a (2.3) egyenlet gyökeit. Feladatunk megoldásához azonban nem szükséges M_t pontos meghatározása. A $k = 1$ esetben ez igen könnyű, mivel

$$M_1 = A'(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-P} - (1-P)\right). \tag{2.6}$$

egyébként azonban meglehetősen fáradságos.

Az $A(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m$ hatványsor konvergencia-körének sugara az $A(z)$ függvénynek a $z = 0$ ponthoz legközelebbi szinguláris pontjának a 0 ponttól való távolsága. Ezt a távolságot nevezzük R-nek. Könnyen belátható, hogy R nem más, mint az $x^k e^{P(1-x)} = 1$. egyenlet egyetlen 1-nél nagyobb pozitív gyöke. Ugyanis az $f(x) = x^k e^{P(1-x)}$ függvény értéke az $x = 0$ és $x = +\infty$ pontokban 0, közben a függvény a maximumát azon pontban veszi fel, melyre

$(kx^{k-1} - Px^k)e^{P(1-x)} = 0$, azaz a függvény maximumát az $x = \frac{k}{P} > 1$ helyen veszi fel, a maximum értéke $\left(\frac{k}{P}\right)^k e^{P-k} = f\left(\frac{k}{P}\right)$ és mivel $(1 - x)e^x \leqq 1$ ha $0 < x < 1$, tehát $f\left(\frac{k}{P}\right) = \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{k-P}{k}\right) e^{\frac{k-P}{k}}\right]^k} > 1$. Mivel továbbá $f'(x) > 0$, ha $x < \frac{k}{P}$ és $f'(x) < 0$ ha $x > \frac{k}{P}$, tehát $f(x)$ az 1 értéket két helyen veszi fel, az egyik az $x = 1$ hely, amely $< \frac{k}{P}$, a másik hely, amelyet R-el jelölünk, tehát szükségképpen $> \frac{k}{P}$. Ha viszont $1 < |z| < R$, akkor $|f(z)| \geqq |z|^k e^{P(1-|z|)} > 1$ tehát az $f(z) = 1$ egyenletnek az $1 < |z| < R$ körgyűrűben nem lehet gyöke; ebből és az elmondottakból már következik, hogy az $A(z)$ függvény reguláris a $|z| < R$ körben, ahol R az

(2.7) $$R^k \cdot e^{P(1-R)} = 1$$

egyenlet egyetlen 1-nél nagyobb pozitív gyöke. A (2.7) egyenlet nyilván a következő alakra is hozható:

(2.8) $$\frac{P}{k} R \cdot e^{-\frac{P}{k}R} = \frac{P}{k} e^{-\frac{P}{k}}$$

vagyis $\varrho = \frac{RP}{k} = \frac{R}{\left(\frac{k}{P}\right)}$ (amelyről szintén tudjuk, hogy 1-nél nagyobb) gyöke a

(2.9) $$\varrho e^{-\varrho} = \frac{P}{k} e^{-\frac{P}{k}}$$

egyenletnek, még pedig az egyetlen 1-nél nagyobb gyöke ennek az egyenletnek. Az $y = \varrho e^{-\varrho}$ függvény maximumát a $\varrho = 1$ helyen veszi fel, a maximum értéke $1/e$. Ezen függvény inverz függvénye kétértékű; azt az ágát, amely *1-nél nagyobb* értéket vesz fel, $\sqrt{1 - ye}$ szerint haladó sorba fejthetjük:

(2.10) $$\varrho = 1 + c_1 \sqrt{1 - ye} + c_2(1 - ye) + c_3(1 - ye)^{\frac{3}{2}} + c_4(1 - ye)^2 + \cdots$$

Legyen $x = \sqrt{1 - ye}$, akkor tehát $y = \frac{1 - x^2}{e} = \varrho e^{-\varrho}$ és ha $\varrho \to 1$, úgy $x \to 0$. Legyen továbbá $u = \varrho - 1$, akkor $\frac{1 - x^2}{e} = (1 + u)\, e^{-(1+u)}$ és így $x^2 = 1 - (1 + u)\, e^{-u}$, azaz

(2.11) $$x = \sqrt{1 - (1 + u)\, e^{-u}}$$

(2.11)-ben a négyzetgyök azon ága veendő, amely pozitív u-ra pozitív értékeket vesz fel. A feladat tehát a (2.11) által definiált $x = x(u)$ függvény $u = u(x)$ inverz függvényének sorbafejtése x hatványai szerint, tehát az

$$u = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots \tag{2.12}$$

sorfejtés együtthatóinak meghatározása.

A (2.12) hatványsort (2.11)-be helyettesítve, a határozatlan együtthatók módszerével következik, hogy

$$c_1 = \sqrt{2}$$

$$c_2 = \frac{2}{3}$$

$$c_3 = \frac{11\sqrt{2}}{36}$$

$$c_4 = \frac{43}{135}.$$

Tehát

$$\rho = 1 + \sqrt{2(1-ye)} + \frac{2}{3}(1-ye) + \frac{11\sqrt{2}}{36}(1-ye)^{\frac{3}{2}} + \frac{43}{135}(1-ye)^2 + \cdots$$

és így

$$R = \frac{k}{P}\left[1 + \sqrt{2\left(1 - \frac{P}{k}e^{1-\frac{P}{k}}\right)} + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{P}{k}e^{1-\frac{P}{k}}\right) + \cdots\right] \tag{2.13}$$

A sorfejtés akkor konvergál, ha $\frac{P}{k}$ közel van 1-hez.

Legyen

$$k = \frac{P}{1-\varepsilon}$$

azaz

$$\varepsilon = 1 - \frac{P}{k} \tag{2.14}$$

akkor $0 < \varepsilon < 1$. ε *tehát a relatív kihasználatlan kapacitást jelenti, vagyis a ki nem használt kapacitás és a teljes kapacitás viszonyát;* 100 ε *tehát a kihasználatlan kapacitást százalékban adja meg.* A (2.13) sorfejtésből megkaphatjuk R-nek ε hatványai szerinti sorfejtést.

$$R = 1 + 2\varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon^2 + \frac{28}{9}\varepsilon^3 + \frac{469}{135}\varepsilon^4 + \cdots \tag{2.15}$$

Első közelítésben tehát

$$R \approx 1 + 2\varepsilon = 1 + 2\left(1 - \frac{P}{k}\right). \tag{2.16}$$

Fontos megjegyezni, hogy *ez a közelítés alsó becslést ad R-re*, azaz valójában $R > 1 + 2\varepsilon$. Ezt a következőképpen láthatjuk be:

A bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens azzal az állítással, hogy az $x^k e^{P(1-x)}$ függvény az $x = 1 + 2\varepsilon$ helyen 1-nél nagyobb értéket vesz fel; ez viszont azt jelenti, hogy

$$(1 + 2\varepsilon)\, e^{-2\varepsilon(1-\varepsilon)} > 1. \tag{2.17}$$

Utóbbi egyenlőtlenség viszont érvényes ε minden számbajövő értékére, azaz ha $0 < \varepsilon < 1$, ugyanis ha $c(\varepsilon) = (1 + 2\varepsilon)e^{-2\varepsilon(1-\varepsilon)}$, úgy $c(0) = 1$ és $c'(\varepsilon) = 8\varepsilon^3 e^{-2\varepsilon(1-\varepsilon)}$, vagyis $c(\varepsilon)$ monoton növekvő függvény.

Az elmondottak alapján most már gyorsan eljuthatunk a probléma teljes megoldásához. Feladatunkat megoldottuk, ha éles felső becslést adunk a $\sum_{n=M}^{\infty} A_m$ kifejezésére. Ebből a célból szükségünk lesz a Cauchy-féle együttható becslésre, amely szerint

$$A_m \leqq \frac{\operatorname*{Max}_{|z|=R_1} |A(z)|}{R_1^m} \qquad (m = 0,1,2,\ldots). \tag{2.18}$$

Ezt az egyenlőtlenséget bármely olyan R_1 értékre alkalmazhatjuk, melyre $A(z)$ az R_1 sugarú közben reguláris; speciálisan tehát alkalmazhatjuk az $R_1 = 1 + 2\varepsilon$ értékre. Mivel $A_k(1) = \varepsilon$, nyilvánvaló, hogy ha $|z| = 1 + 2\varepsilon$, úgy

$$|A(z)| \leqq \frac{\varepsilon(1 + 2\varepsilon)^{k-1}(1 + (1 + 2\varepsilon)^k)}{(1 + 2\varepsilon)^k e^{-2P\varepsilon} - 1}.$$

Másrészt azonban, ha $r > 1$, úgy $r^k - 1 \geqq k(r - 1)$

és így

$$(1 + 2\varepsilon)^k\, e^{-2P\varepsilon} - 1 \geqq k\left|(1 + 2\varepsilon)\, e^{-2\frac{P}{k}\varepsilon} - 1\right| = \frac{P}{1-\varepsilon}[(1 + 2\varepsilon)\, e^{-2\varepsilon(1-\varepsilon)} - 1]$$

Mivel

$$(1 + 2\varepsilon)\, e^{-2\varepsilon(1-\varepsilon)} - 1 = \int_0^{\varepsilon} 8x^2 e^{-2x(1-x)}\, dx$$

és ha $0 < \varepsilon < 1$, úgy $e^{-2x(1-x)} \geqq e^{-\frac{1}{2}}$, ha $0 \leqq x \leqq \varepsilon$ tehát

$$(1 + 2\varepsilon)\, e^{-2\varepsilon(1-\varepsilon)} - 1 \geqq \frac{8\varepsilon^3}{3\sqrt{e}}$$

és így

$$|A(z)| \leqq \frac{3\sqrt{e}}{4\varepsilon^2 P}(1 - \varepsilon)\,(1 + 2\varepsilon)^{2k-1}.$$

Tehát a Cauchy egyenlőtlenség szerint

$$A_m \leqq \frac{3\sqrt{e}(1-\varepsilon)}{4\varepsilon^2 P(1+2\varepsilon)^{m+1-2k}} \qquad (m = M, M+1, \dots)$$

és így

$$\sum_{m=M}^{\infty} A_m \leqq \frac{3\sqrt{e}(1-\varepsilon)}{8\varepsilon^3 P(1+2\varepsilon)^{M-2k}}. \tag{2.19}$$

A feladat megoldása azt kívánja, hogy igen kicsinnyé tegyük annak a valószínűségét, hogy $\eta_t < H_0$ legyen ; ennek valószínűsége viszont nem más, mint

$$\sum_{m=H+k-H_0}^{\infty} A_m$$

és így (2.19) szerint, azt kell elérni, hogy

$$\frac{3\sqrt{e}(1-\varepsilon)}{8\varepsilon^3 P(1+2\varepsilon)^{H-H_0-k}} < \delta \tag{2.20}$$

legyen, ahol δ egy igen kicsiny szám, pl. $\delta = 0{,}0001$. Ha az időegység 1 perc, ez azt jelenti, hogy általában 10 000 percenként, azaz — 8 órás munkanapokat számítva kb. 21 naponként egyszer fordul csak elő, hogy a nyomás a megengedett legkisebb nyomás alá süllyed. Természetesen δ értékét még kisebbre választva, a biztonság még növelhető.

Ezt k megválasztásával kell elérnünk.

Ha például $\delta = 0{,}0001$ értéket választjuk, (2.20)-ból ε-ra a következő egyenlőtlenséget nyerjük, figyelembe véve, hogy $k = \frac{P}{1-\varepsilon}$

$$\frac{\varepsilon^3(1+2\varepsilon)^{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon}}}{1-\varepsilon} \geqq \frac{3\cdot 10^4\cdot\sqrt{e}}{8P}. \tag{2.21}$$

Ha ε értékét (2.21)-nek megfelelően megválasztjuk, úgy a $k = \frac{P}{1-\varepsilon}$ összefüggésből adódik, hogy a kompresszor teljesítőképességét milyen nagyra kell megválasztanunk, hogy a fogyasztást fedezni tudja.

A numerikus megoldás tekintetében két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha $H - H_0$ nagy P-hez képest, úgy (2.21) általában ε-nak már kicsiny értékeire teljesül, és így (2.21) nevezőjében az $1-\varepsilon$ tényezőt elhagyva és a

$$B(\varepsilon) = P\varepsilon^3(1+2\varepsilon)^{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon}} \geqq 6200 = C \tag{2.22}$$

egyenlőtlenséget vizsgálva, ha (2.22) teljesül, úgy (2.21) is teljesül. A megoldás mármost úgy történhet, hogy keresünk egy felső becslést arra az ε-ra, amelyre

(2.22)-ben egyenlőség van, azaz egy ε-értéket, melyre már a (2.22) egyenlőtlenség biztosan teljesül ; legyen ez ε_1 ; akkor megoldjuk a

$$(2.23) \qquad P\varepsilon_1^3(1+2\varepsilon)^{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon_1}} = C$$

egyenletet ε-ra, vagyis vesszük az

$$(2.24) \qquad \varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{C}{P\varepsilon_1^3}\right)^{\frac{1}{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon_1}}} - 1\right]$$

közelítő értéket és ezt az eljárást még egyszer vagy még háromszor megismételjük; ugyanis az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ értékek váltakozva felülről, illetve alulról közelítik a helyes ε értéket, azaz ha $\varepsilon_1 > \varepsilon$, akkor $\varepsilon_2 < \varepsilon$, $\varepsilon_3 > \varepsilon$ s. i. t. és úgy ahhoz, hogy felső becslést kapjunk, páratlan indexű közelítő értéknél kell megállanunk.

Mielőtt az eljárás konvergenciáját megvizsgálnánk, állapítsuk meg, hogy milyen feltételek mellett elégíthető ki egyáltalán a (2.22) egyenlőtlenség? Ha feltesszük, hogy

$$(2.25) \qquad H - H_0 > 2P\left(1 + \sqrt{\frac{3}{P\log 3}}\right)$$

(ami biztosan teljesül, ha $H - H_0 > 2{,}8\,P$ figyelembe véve, hogy $P > 17$ amit fel fogunk tenni (lásd (2.26)], úgy a

$$B(\varepsilon) = P\varepsilon^3(1+2\varepsilon)^{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon}}$$

függvény monoton növekvő a $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{\frac{3}{P\log 3}}}{1+\sqrt{\frac{3}{P\log 3}}}\right)$ intervallumban és így

felvesz minden értéket 0 és $C_0 = B\left(\dfrac{\sqrt{\frac{3}{P\log 3}}}{1+\sqrt{\frac{3}{P\log 3}}}\right)$ között. Mivel könnyen belátható, hogy

$$C_0 \geqq \frac{1{,}8e^{2{,}45\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}$$

tehát a (2.22) egyenlőtlenség bizonyosan kielégíthető, ha $c_0 > c$, ami viszont teljesül, ha teljesül az $1{,}8\,e^{2{,}45\sqrt{P}} > 6200\sqrt{P}$ egyenlőtlenség :

utóbbi viszont fennáll, ha

$$(2.26) \qquad P > 17.$$

A következőkben feltesszük, hogy úgy (2.25), mint (2.26) teljesülnek.

Rátérünk ezek után a vázolt eljárás konvergenciájának vizsgálatára; az eljárás nem más, mint a közönséges iterációs eljárás, alkalmazva az $\varepsilon = \varphi(\varepsilon)$ egyenletre, ahol

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{C}{P\varepsilon^3}\right)^{\frac{1}{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon}}} - 1\right]. \tag{2.27}$$

Tehát a konvergencia biztosításához csak azt kell ellenőrizni, hogy teljesül-e a $|\varphi'(\varepsilon)| < 1$ feltétel. Könnyen belátható, hogy

$$\varphi'(\varepsilon) < 0 \tag{2.28}$$

ha

$$\varepsilon < \frac{\sqrt{\frac{3}{2P}}}{1-\sqrt{\frac{3}{2P}}}$$

és

$$|\varphi'(\varepsilon)| < \frac{9}{\log\frac{C}{P\varepsilon^3}}$$

tehát

$$|\varphi'(\varepsilon)| < 1 \quad \text{ha} \quad \varepsilon < \frac{0,92}{3\sqrt{P}}. \tag{2.29}$$

Mivel a (2.29) alatti egyenlőtlenség kevesebb megszorítást jelent, mint a (2.28) alatti, ha $P > 7,5$, tehát a fortiori, ha $P > 17$ következik, hogy ha

$$0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{\frac{3}{2P}}}{1+\sqrt{\frac{3}{2P}}} \quad \left(\text{ami teljesül, ha } \varepsilon < \frac{0,95}{\sqrt{P}}\right)$$

úgy

$$-1 < \varphi'(\varepsilon) < 0.$$

és így az iterációs eljárás konvergál.

Mielőtt eredményeinket összefoglalnánk, foglalkozzunk $H - H_0$ számértékének meghatározásával. Mivel a maximális nyomás, amelynél a kompresszor kikapcsolódik 8,8 atmoszféra, és a minimális, amelynél még működnek a gépek 6,5 atmoszféra, ha a tartály űrtartalma Wm^3, úgy tehát a tartály 8 atmoszféra nyomásnál 8000 W liter levegőt, 6,5 atmoszfera nyomásnál 6500 W liter levegőt tartalmaz, vagyis

$$H = \frac{8000\,W}{a} \quad \text{és} \quad H_0 = \frac{6500\,W}{a}$$

tehát a minket érdeklő $H - H_0$ különbség a következőképpen számítható ki:

$$H - H_0 = \frac{1500W}{\alpha}, \tag{2.30}$$

ahol tehát W jelenti a tartály űrtartalmát m³-ekben és α egy fogyasztó időegységenkénti fogyasztását literekben. A (2.30) alatti kifejezés felfelé kerekítendő, hogy egész szám legyen.

A (2.30)-ban szereplő α számszerű értéke az időegység megválasztásától függ. Mint arra már az 1. §-ban rámutattunk, az időegység megválasztását úgy kell végezni, hogy figyelembe vesszük azt, hogy a kikapcsolás a normál nyomást legfeljebb 10%-kal meghaladó nyomásnál, a bekapcsolás a normál nyomásnál legfeljebb 10%-kal kisebb nyomásnál történik. Ezt — mint arra már szintén rámutattunk — azáltal vehetjük figyelembe, hogy az időegységet úgy választjuk, hogy fennálljon az

$$Np = P < \frac{H}{10} \tag{2.31}$$

egyenlőtlenség. Ha α_1 jelenti egy fogyasztó egy perc alatti fogyasztását, és τ a választandó időegységet percekben, úgy $H = \frac{8000W}{\alpha_1\tau}$ és (2.31) szerint fenn kell állni a $P < \frac{800W}{\alpha_1\tau}$, vagyis a

$$\tau < \frac{800W}{\alpha_1 P} \tag{2.32}$$

egyenlőtlenségnek. Grafikonjainkat a következő időegységekre készítettük el: 1 perc, 30 sec, 12 sec és 6 sec. *Grafikonjaink használatához tehát először ki kell számítani a* $\frac{800W}{\alpha_1 P}$ *számot; ha ez 1-nél nagyobb, úgy 1 percet választunk időegységül; ha* $\frac{800W}{\alpha_1 P}$ *értéke 0,5 és 1 közé esik, úgy az időegységet fél percnek, ha 0,2 és 0,5 közé esik, úgy 12 másodpercnek, ha viszont 0,1 és 0,2 közé esik, úgy az időegységet 6 másodpercnek választjuk.* Természetesen lehet több különböző időegységnek megfelelően is elkészíteni a grafikont, azonban mivel a gyakorlatban úgyis csak bizonyos számú kompresszor-típus áll rendelkezésre, ez nem látszott egyelőre szükségesnek.

Eredményeinket tehát a következőkben foglalhatjuk össze: *Ha a sűrített levegőt N fogyasztó veszi igénybe, és a fogyasztók általában a munkaidő p-ed részében működnek, vagyis a sűrített levegővel dolgozó gépek kihasználási tényezője p-vel egyenlő és* $P = pN$, *továbbá ha a fogyasztók percenként* α_1 *liter levegőt fogyasztanak és a tartály űrtartalma W* m³, *úgy a kompresszor percenkénti teljesítménye* $\frac{P\alpha_1}{1-\varepsilon}$ *liternél nagyobb kell, hogy legyen ahhoz, hogy ne süllyedjen a nyomás 6,5 atmoszféra alá; itt* ε *az*

$$\varepsilon^3(1 + 2\varepsilon)^{\frac{1500W}{\alpha} - \frac{P}{1-\varepsilon}} = \frac{6200}{P\tau} \tag{2.33}$$

egyenlet gyöke, ahol $\alpha = \alpha_1 \tau$ és a τ időegység úgy van megválasztva, hogy teljesüljön a (2.32) egyenlőtlenség. Ha a P, W és α_1 adatok adva vannak, akkor tehát úgy járunk el, hogy először (2.32)-ből meghatározzuk a helyes τ időegységet, azután $\alpha = \alpha_1 \tau$ érték mellett megoldjuk ε-ra a (2.33) egyenletet, és az így kapott ε értékkel kiszámítjuk a $k = \frac{P\alpha_1}{1-\varepsilon}$ számot ez adja, hogy hány liter percenkénti teljesítményű kompresszorra van szükség.

Lássunk most egy számpéldát : *az üzem sűrített levegővel dolgozó gépeinek száma legyen $N = 100$, a gépkihasználás legyen $p = 0{,}5$, vagyis 50%-os és így*

$$P = Np = 50\,;$$

tegyük fel, hogy egy fogyasztó percenként 50 litert ($\alpha_1 = 50$) fogyaszt, és a tartály űrtartalma legyen 10 m^3 ($W = 10$); ez esetben $\frac{800W}{\alpha_1 P} = 3{,}2 > 1$, tehát az időegységet vehetjük egy percnek, vagyis $\tau = 1$, $\alpha = \alpha_1$, akkor tehát

$$H - H_0 = \frac{1500W}{\alpha} = 300\,.$$

Megoldandó tehát az

$$\varepsilon^3(1 + 2\varepsilon)^{300 - \frac{50}{1-\varepsilon}} = 124$$

egyenlet. Első közelítő értéknek válasszuk az $\varepsilon = 0{,}05$ értéket.

Mivel

$$1 + 2\varepsilon = 1{,}1 \quad \text{és} \quad 1{,}1^8 > 2$$

tehát

$$(1 + 2\varepsilon)^{300 - \frac{50}{1-\varepsilon}} > 2^{30} > 8 \cdot 10^8$$

másrészt $\frac{124}{\varepsilon^3} < 10^6$, vagyis valóban ε_1 valamivel nagyobb a szükségesnél. Számítsuk ki a második közelítést :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{124 \cdot 10^6}{125}\right)^{\frac{1}{247}} - 1\right] = 0{,}029.$$

Ez valamivel kevesebb, mint amire szükség van, tekintve, hogy teljesül az

$$\varepsilon_1 < \frac{\sqrt{\frac{3}{2P}}}{1 + \sqrt{\frac{3}{2P}}} = 0{,}11$$

feltétel. Megjegyzendő, hogy az eljárás konvergál is, mivel teljesül a

$$\frac{9}{\log \frac{6200}{P\varepsilon^3}} < 1$$

feltétel.

Nézzük most a harmadik közelítést:

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{124 \cdot 10^9}{24 \cdot 500}\right)^{\frac{1}{249}} - 1\right] = 0{,}032.$$

Ez tehát kielégítő közelítés; a helyes ε érték 0,029 és 0,032 között van, ha a felső értéket fogadjuk el, ez csak növeli a biztonságot. Ez esetben tehát $k = \dfrac{P}{1-\varepsilon} = 52$ vagyis *a kompresszort úgy kell méretezni, hogy percenként* 43,5 *liter levegőt adjon.*

Abból a célból, hogy ne kelljen a számítást minden egyes esetre elvégezni, a következőképpen járhatunk el: ε különböző értékeire pl.

$$\begin{aligned}\varepsilon = 0{,}010,\ & 0{,}015,\ 0{,}020,\ 0{,}025\ \ 0{,}030,\ 0{,}035,\ 0{,}040,\ 0{,}045,\\ & 0{,}050,\ 0{,}060,\ 0{,}070,\ 0{,}080,\ 0{,}090,\ 0{,}1,\ 0{,}12,\ 0{,}14,\\ & 0{,}16,\ 0{,}18,\ 0{,}20,\ 0{,}25,\ 0{,}30,\ \text{értékekre}\end{aligned}$$

ábrázoljuk $\dfrac{W}{\alpha}$ értéket, mint p függvényét, azaz ábrázoljuk a

$$\frac{W}{\alpha} = \frac{1}{1500}\left|\frac{P}{1-\varepsilon} + \frac{\log \dfrac{6200}{\tau\varepsilon^3} - \log P}{\log(1+2\varepsilon)}\right| \tag{2.35}$$

függvényt, így egy görbe-hálózatot kapunk, amelyet $\tau = 1$ az 1. ábra szemlélteti. A 2., 3. és 4. ábra a 30, 12, ill. 6 másodpercnyi időegység esetére vonatkozik.

Adott P és $\dfrac{W}{\alpha}$ értékekhez a hozzátartozó ε-értéket úgy határozzuk meg ezen ábrák segítségével, hogy megkeressük az ábrán azt a pontot, amelynek abszcisszája P és ordinátája $\dfrac{W}{\alpha}$, és megnézzük, hogy mely ε-értéknek megfelelő görbe halad *közvetlenül* ezen pont alatt.* Így pl. a $P = 50$, $W = 10$, $\alpha = 50$ esetben az ezen értékeknek megfelelő pont az $\varepsilon = 0{,}030$ és $\varepsilon = 0{,}035$ értékeknek megfelelő görbék között fekszik (interpolációval nyerjük az $\varepsilon = 0{,}032$ értéket, megegyezésben az előbb végzett numerikus közelítő eljárással).

A görbék nagy ε-ra kezdettől fogva emelkedők, kisebb ε értékekre eleinte enyhén esnek, azután emelkednek.

Az elmondottak azt jelentik, hogy adott fogyasztás mellett minél nagyobb a légtartályok ürtartalma, annál kisebb teljesítőképességű kompresszor elegendő az üzem ellátásához, míg adott légtartályméret (W) és gépenkénti időegység alatti fogyasztás (α) mellett az ε szám általában p-vel együtt növekszik, de nagy $\dfrac{W}{\alpha}$ mellett, azaz igen nagy tartályméret mellett P növekedésével ε eleinte csökken és csak nagy P-re kezd növekedni. Ez tehát azt jelenti, hogy van egy meghatározott P-érték, amelynél ε minimális, azaz a kapacitás kihasználása optimális.

* Ha nagyobb pontosságot kívánunk, úgy interpolációt végzünk.

Minél kisebb ε, annál jobb a kompresszor kihasználása, annál kevesebb kapacitás van kihasználatlanul, tehát egy új üzem méretezésénél a leghelyesebb úgy eljárni, hogy előre rögzítjük ε értékét, (pl. $\varepsilon = 0{,}03$, vagy $\varepsilon = 0{,}05$-ben) és a várható P-hez megkeressük a hozzátartozó $\frac{W}{\alpha}$ értéket, és a $k\alpha = \frac{P\alpha}{1-\varepsilon}$ értéket és ennek megfelelően kell a kompresszort és a légtartályt méretezni. Amennyiben a kettő közül az egyik — pl. $\frac{W}{\alpha}$ — adott, úgy ε értéke már P által meg van határozva. Ha viszont úgy $\frac{W}{\alpha}$, mint $k\alpha$ adottak, úgy kiszámítható, hogy milyen fogyasztást bír a berendezés ellátni, mégpedig a következőképpen: megoldjuk P-re a

$$P\left(1-\frac{P}{k}\right)^3\left(3-\frac{2P}{k}\right)\frac{1500W}{\alpha} - k = \frac{6200}{\tau}$$

egyenletet.

Ilyen módon fenti eredmények segítségével bármilyen, a kompresszor és a légtartály méretezésére vonatkozó probléma, szabatosan megoldható. Ez lehetővé teszi a tervezésnél jelentős összegek megtakarítását, feleslegesen nagy beruházások elkerülésével. A szükséges számadatok a grafikonokról leolvashatók, és így szinte semmi fáradságot nem okoznak, ha egyszer a szükséges grafikonok elkészültek.

3. §. *Kiegészítő megjegyzések*

Ebben a §-ban néhány kiegészítő megjegyzést kívánok tenni az előző §-okban megoldott problémával kapcsolatban, amely megjegyzések a probléma megoldása során folytatott vizsgálatok olyan eredményeire vonatkoznak, amelyek — bár a fent ismertetett megoldás szempontjából nélkülözhetőknek bizonyultak — további ilyen irányú vizsgálatok esetében szükségesek lehetnek. Itt közlünk továbbá néhány olyan eredményt, amelyeket az előzőkben már felhasználtunk, azonban bizonyítás nélkül.

Ezen megjegyzések egyrésze a fogyasztás ingadozásainak további vizsgálatára, másrészt a légtartály-nyomásának középértékére, továbbá a probléma más lehetséges megoldásmódjára, végül pedig a (2.33) egyenlet gyökeinek meghatározására alkalmazott iterációs módszerre vonatkoznak.

A) *Megjegyzések a fogyasztás ingadozásaival kapcsolatban*

Az egyszerűség kedvéért először arra az esetre szorítkozunk, amikor p értéke kicsiny és N értéke nagy és a fogyasztók egyformák, vagyis amikor a t időpontban az egyidejűleg működő fogyasztók száma, amelyet az előbbiekben ξ_t-vel jelöltünk, a stacionér hatásesetben Poisson-eloszlásúnak vehető:

$$\text{(3.1)} \qquad P(\xi_t = n) = \frac{P^n e^{-P}}{n!},$$

ahol $P = pN$ és $p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$, továbbá λ jelenti egy gép bekapcsolásának valószínűségsűrűségét és $\frac{1}{\mu}$ az $1 - e^{-\mu t}$ exponenciális eloszlású működési idő várható értékét. Mivel feltevésünk szerint $p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ kicsiny, tehát λ is kicsiny μ-hez képest és így $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ közelítőleg $\frac{\lambda}{\mu}$-vel vehető egyenlőnek; bevezetve a $\Lambda = N\lambda$ jelölést, azt kapjuk tehát, hogy ξ_t eloszlása közelítőleg $\frac{\Lambda}{\mu}$ várható értékű Poisson-eloszlás. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha abból indulunk ki, hogy végtelen sok gép van, és a gépek bekapcsolásai Poisson folyamatot alkotnak Λ valószínűségsűrűséggel; ebben az esetben — mint azt egy előző dolgozatban [5] kimutattuk, — ha $t = 0$ időpontban egy gép sem működött, úgy a t időpontban működő gépek száma — amelyet továbbra is ξ_t-vel jelölünk — Poisson eloszlású $\frac{\Lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$ várható értékkel, azaz

$$V(\xi_t = n) = P_n(t) = \frac{\left[\frac{\Lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})\right]^n}{n!} e^{-\frac{\Lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})}. \tag{3.2}$$

Ha $t \to \infty$, úgy stacionér határesetként kapjuk a

$$P_n = \frac{\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^n}{n!} e^{-\frac{\Lambda}{\mu}} \tag{3.3}$$

valószínűségeloszlást.

Az 1. §-ban szó esett arról, hogy a $\xi_t = n$, $\xi_{t+s} = m$ »átmenetnek« m és n minden értékére pozitív valószínűsége van; ezt azonban ott nem bizonyítottuk. Számítsuk ezért most ki mindenekelőtt a

$$P_{m|n}(t,s) = V(\xi_{t+s} = m | \xi_t = n) \tag{3.4}$$

feltételes valószínűségeket, a ξ_t Markov-lánc *átmenet- valószínűségeit.* Egyszerű valószínűségszámítási meggondolással adódik (3.2) felhasználásával (feltételezve, hogy a működési idők exponenciális eloszlásúak), hogy

$$P_{m|n}(t,s) = \sum_{j=1}^{\min(m,n)} \binom{n}{j} e^{-\mu s j}(1 - e^{-\mu s})^{n-j} \frac{\left[\frac{\Lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu s})\right]^{m-j}}{(m-j)!} e^{-\frac{\Lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu s})} \tag{3.5}$$

Ennek alapján kiszámíthatjuk ξ_t és ξ_{t+s} együttes eloszlásának generátorfüggvényét: legyen $V(\xi_t = n, \xi_{t+s} = m) = P_{nm}(t, s)$

és $$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{nm}(t,s)\, x^n y^m = G(x,y,t,s),$$ akkor mivel $P_{nm}(t, s) = P_n(t) P_{m|n}(t, s)$, következik, hogy

$$(3.6)\qquad G(x,y,t,s) = \exp\Big[\frac{\Lambda}{\mu}(1-e^{-\mu s})(y-1) + \frac{\Lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})(x-1) + \frac{\Lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})e^{-\mu s}x(y-1).\Big]$$

A $G(x, y, t, s)$ generátorfüggvény segítségével kiszámíthatjuk ξ_t és ξ_{t+s} korrelációs együtthatóját ; mivel

$$(3.7)\qquad M(\xi_t \xi_{t+s}) = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{\Lambda}{\mu} e^{-\mu s}(1-e^{-\mu t}) + \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^2 (1-e^{-\mu t})(1-e^{-\mu(t+s)})$$

továbbá

$$(3.8)\qquad M(\xi_t) = \sigma^2(\xi_t) = \frac{\Lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})$$

tehát

$$(3.9)\qquad \varrho(\xi_t, \xi_{t+s}) = \frac{M(\xi_t \xi_{t+s}) - M(\xi_t) M(\xi_{t+s})}{\sigma(\xi_t)\sigma(\xi_{t+s})} = e^{-\mu s}\sqrt{\frac{1-e^{-\mu t}}{1-e^{-\mu(t+s)}}}$$

és így rögzített s mellett

$$(3.10)\qquad \lim_{t\to\infty} \varrho(\xi_t, \xi_{t+s}) = e^{-\mu s}.$$

Erre az eredményre is hivatkoztunk az 1. §-ban.

Számítsuk most ki a t időponttól $t+s$-ig terjedő idő alatti összfogyasztás várható értékét és szórását.*

Ha ezt a fogyasztást $X_s(t)$-vel jelöljük, úgy

$$(3.11)\qquad X_s(t) = \alpha \int_t^{t+s} \xi_t \, dt$$

és így

$$(3.12)\qquad M(X_s(t)) = \alpha \int_t^{t+s} M(\xi_t)\, dt = \alpha \frac{\Lambda}{\mu}\left[s + \frac{e^{-\mu t}(1-e^{-\mu s})}{\mu}\right]$$

tehát

$$(3.13)\qquad \lim_{t\to\infty} M(X_s(t)) = \frac{\alpha \Lambda s}{\mu},$$

* Ebben a §-ban a t változót folytonos változónak tekintjük.

továbbá

$$\sigma^2(X_s(t)) = M(X_s^2(t)) - M^2(X_s(t)) \tag{3.14}$$

és mivel

$$M(X_s^2(t)) = \alpha^2 \int_t^{t+s}\int_t^{t+s} M(\xi_u \xi_v)\, du\, dv\,, \tag{3.15}$$

tehát

$$\lim_{t\to\infty} M(X_s^2(t)) = \frac{\alpha^2\Lambda^2 s^2}{\mu^2} + \frac{2\alpha^2\Lambda}{\mu^2}\left(s - \frac{(1-e^{-\mu s})}{\mu}\right) \tag{3.16}$$

és így

$$\lim_{t\to\infty} \sigma^2(X_s(t)) = \frac{2\alpha^2\Lambda}{\mu^2}\left[s - \frac{(1-e^{-\mu s})}{\mu}\right]. \tag{3.17}$$

Ezen eredmények alapján a Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazásáva becslést nyerhetünk annak valószínűségére, hogy az összfogyasztás s idő alatt meghalad egy bizonyos A értéket. A Csebisev-egyenlőtlenség szerint ugyanis (3.13)-ból és (3.17)-ből következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty} V\left(X_S(t) - \frac{\alpha\Lambda s}{\mu} > c\,\frac{\alpha\sqrt{2\Lambda}}{\mu}\right) < \frac{1}{c^2}. \tag{3.18}$$

Ezt az eredményt akkor alkalmazhatjuk, ha igen nagy tartályunk van, és azt kívánjuk tudni, hogy amennyiben a kompresszor nem működik, mi a valószínűsége, hogy a tartályban lévő készlet s ideig elegendő a fogyasztás fedezésére ; amennyiben a tartály befogadóképessége gyakorlatilag korlátlannak vehető, úgy ugyanez az eredmény működő kompresszor esetében is megadja annak valószínűségét, hogy a kompresszor fedezni tudja a fogyasztást :

B) *Megjegyzések a légtartály nyomásának középértékével kapcsolatban*

Amint azt a 2. §-ban megjegyeztük, η_t^* várható értékének kiszámításához ismernünk kellene a

$$z^k - e^{P(z-1)} = 0 \quad (0 < P < k\,,\ k \text{ egész}) \tag{3.19}$$

egyenletnek az egységkör belsejében fekvő $z_1, z_2, \ldots z_{k-1}$ gyökeit. Ezen gyökök segítségével ugyanis η_t^* várható értéke a következőképpen fejezhető ki :

$$M(\eta_t^*) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{1-z_j} + \frac{P-1}{2} + \frac{k}{2(k-P)}. \tag{3.20}$$

Hasonlóképpen a z_j gyökök ismerete szükséges η_t^* szórásának kiszámításához is.

Meg fogjuk mutatni, hogy a z_j gyökök explicit alakban kifejezhetők, a $W = ze^{-z}$ függvény, inverz függvényének sorfejtése segítségével. Könnyen belátható ugyanis, hogy a $W = ze^{-z}$ függvény $z = Z(W)$ inverz függvénye a következő sorfejtéssel állítható elő :

$$(3.22) \qquad z = Z(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n n^{n-1}}{n!}, \quad \text{amely hatványsor a } |w| \leq \frac{1}{e}$$

közben konvergens.

Mivel k feltevésünk szerint egész szám, tehát a $z_1, z_2, \ldots z_{k-1}$ gyökök — valamilyen sorrendben — a

$$(3.23) \qquad z = e^{\frac{2\pi i j}{k}} e^{\frac{P}{k}(z-1)} \qquad (j = 1,2,\ldots k-1)$$

egyenletek gyökei : számozzuk ezen gyököket éppen úgy, hogy z_j a (3.23) egyenletnek az egységkör belsejében fekvő — a *Rouché*-tétel értelmében egyetlen — gyöke legyen. Ez esetben tehát alkalmazva a (3.22) sorfejtést a $\left(\frac{Pz}{k}\right) e^{-\left(\frac{Pz}{k}\right)} = \frac{P}{k} e^{-\frac{P}{k}} \omega^j \left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)$ egyenletnek eleget tevő $z_j^* = \frac{Pz_j}{k}$ számra, nyerjük, hogy

$$(3.24) \qquad z_j = \frac{k}{P} z_j^* = \frac{k}{P} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{P}{k} e^{-\frac{P}{k}} w_j\right)^n n^{n-1}}{n!} \qquad (j = 1,2,\ldots k-1)$$

Ilyen módon a z_j gyököket sorfejtés alakjában kaptuk meg: ezek a sorok konvergálnak, mivel

$$\left|\frac{P}{k} e^{-\frac{P}{k}} w_j\right| = \frac{P}{k} e^{-\frac{P}{k}} < \frac{1}{e}$$

tekintve, hogy xe^{-x} maximumát az $x = 1$ helyen veszi fel, és ott $xe^{-x} = e^{-1}$; de ezek a sorok csak akkor konvergálnak gyorsan, ha $\frac{P}{k}$ kicsiny ; míg a minket érdeklő esetben $\frac{P}{k}$ éppen hogy közel van 1-hez. Éppen ezért választottunk az előző §-ban más utat.

C) *Megjegyzések a tárgyalásmód választásával kapcsolatban*

Azt a tényt, hogy a kompresszor akkor kapcsol ki, ha a nyomás a légtartályban kb. 10%-kal meghaladja a normál nyomást, és akkor kapcsol be, ha a nyomás kb. 10%-kal a normál nyomás alá süllyed, a probléma matematikai tárgyalásában oly módon vettük figyelembe, hogy bizonyos késleltetést vezettünk be azáltal, hogy a kompresszor be- és kikapcsolásai csak t egészszámú értékeinél következhetnek be : vagyis feltettük, hogy a kompresszor t időpontban kikapcsol, ha a nyomás $t - 1$ és t időpontok között túlhaladt a normál nyomáson : ez ugyanis valójában azt jelenti, hogy a kikapcsolódás valamivel a normál nyomás felett (és ennek megfelelően a bekapcsolás valamivel a normál nyomás alatt) következik be. Hogy a 10%-os túlhaladást ne lépjük túl, azt az időegység megfelelő választásával értük el. Ezt a tárgyalásmódot azért választottuk, mert ha a matematikai tárgyalásban közvetlenül vesszük figyelembe, hogy a be- és kikapcsolódás szintjei nem azonosak (és nem közvetve, ahogy tettük), akkor nemcsak hogy a tartály nyomásingadozásai, vagyis az η_t változók, nem alkotnak közönséges Markov-láncot, hanem még a tartály és a fogyasztás együttes állapota, azaz (ξ_t, η_t) sem, ellenben még hozzá kell venni a kompresszor állapotát is, vagyis egy ω_t változót, amelynek értéke 1 ha a kompresszor működik, és 0 ha nem. Ugyanis ha H_2 jelöli η_t azon értékét, amelynél a kikapcsolódás és H_1 azt, amelynél a bekapcsolódás történik, úgy ha η_t értéke H_1 és H_2 között van, lehetséges az is, hogy a kompresszor működik és az is, hogy nem működik, viszont ez befolyással bír η_{t+1} értékére. Ebben az esetben is lehetséges a tárgyalás az elmondottakhoz hasonló módon, azonban ezzel itt nem foglalkozunk bővebben, csak megjegyezzük, hogy ilyen felfogásban is megvizsgáltuk a problémát, és azt találtuk, hogy a gyakorlat szempontjából a két tárgyalásmód által kapott k-értékek között az eltérés nem lényeges.

D) *Megjegyzések a gyökközelítésnél alkalmazott iterációs eljárással kapcsolatban*

Az előzőkben az

$$\varepsilon^3(1+2\varepsilon)^{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon}} = \frac{C}{P} \tag{3.25}$$

egyenletet úgy oldottuk megközelítőleg, hogy $\varepsilon = \varphi(\varepsilon)$ alakra hoztuk, mégpedig a következőképpen :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{C}{P\varepsilon^3}\right)^{\frac{1}{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon}}} - 1\right] \tag{3.26}$$

és erre az egyenletre alkalmaztuk az iterációs eljárást. A (3.25) egyenletet azonban többféleképpen lehet $\varepsilon = \varphi(\varepsilon)$ alakra hozni, például a következőképpen is :

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{C}{P}(1+2\varepsilon)^{\frac{P}{1-\varepsilon}-H+H_0}}\,.$$

Azért választottuk éppen a (3.26) alakot, hogy az iteráció konvergenciája gyors legyen. Ugyanis általában, ha az $F(x, x, \ldots x) = c$ egyenletet kívánjuk $x = \varphi(x)$ alakra hozni és iterációval megoldani (vagyis egy olyan egyenletet, amelyben az ismeretlen *x több helyütt* (k-szor) fordul elő), úgy a következőképpen célszerű eljárni: megvizsgáljuk az $F(x_1, x_2, \ldots x_.)$ — k-változós függvény parciális deriváltjait az $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x$ helyen (illetve mivel az x értéket nem ismerjük, annak környezetében) és megvizsgáljuk, hogy a $\frac{\partial F}{\partial x_k}$ deriváltak közül melyik abszolút értékre a legnagyobb, vagyis hogy $F(x_1, x_2, \ldots x_k^*)$ melyik változójának megváltoztatására a »legérzékenyebb«: tegyük fel, hogy ez a változó éppen x_1, úgy kifejezzük x_1-et az $F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_k) = C$ egyenletből a többi változó segítségével $x_1 = G(x_2, x_3, \ldots x_k^*)$ alakban és vizsgáljuk az $x = \varphi(x) = G(x, x, \ldots x)$ egyenletet; mivel

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{\sum\limits_{j=2}^{n} \frac{\partial F}{\partial xj}}{\frac{\partial F}{\partial x_1}}\right)_{xj=x} \tag{3.27}$$

tehát ha a (3.27) jobboldalán álló függvény az $x_1 = x_2 = \ldots x_k = x$ hely környezetében abszolút értékben 1-nél kisebb, úgy az iterációs eljárás konvergálni fog. Persze előfordulhat, hogy a (3.27) jobboldalán álló szám abszolút értéke nagyobb 1-nél. Ebben az esetben és általában *bármely* egyenlet esetében a következő eljárás vezet célhoz: valamilyen módon $x = \varphi(x)$ alakra hozzuk az egyenletet, megállapítjuk, hogy $\varphi(x)$ milyen határok közé esik: tegyük fel például, hogy $\varphi(x)$ a és b közé esik, ahol $1 < a < b$, mivel az $x = \varphi(x)$ és $x = \psi_\alpha(x) = (1 - \alpha)x + \alpha\varphi(x)$ egyenletek gyökei azonosak, úgy választjuk meg az α konstáns értékét, hogy $|\psi_\alpha'(x)|$ már bizonyosan 1-nél kisebb legyen, ezt elérjük pl. $\alpha = -\frac{1}{b-1}$ választásával, ugyanis akkor

$$0 = 1 + \frac{1}{b-1} - \frac{b}{b-1} < \psi_\alpha'(x) =$$

$$= 1 - \alpha + \alpha\varphi'(x) < 1 + \frac{1}{b-1} - \frac{a}{b-1} = \frac{b-a}{b-1} < 1$$

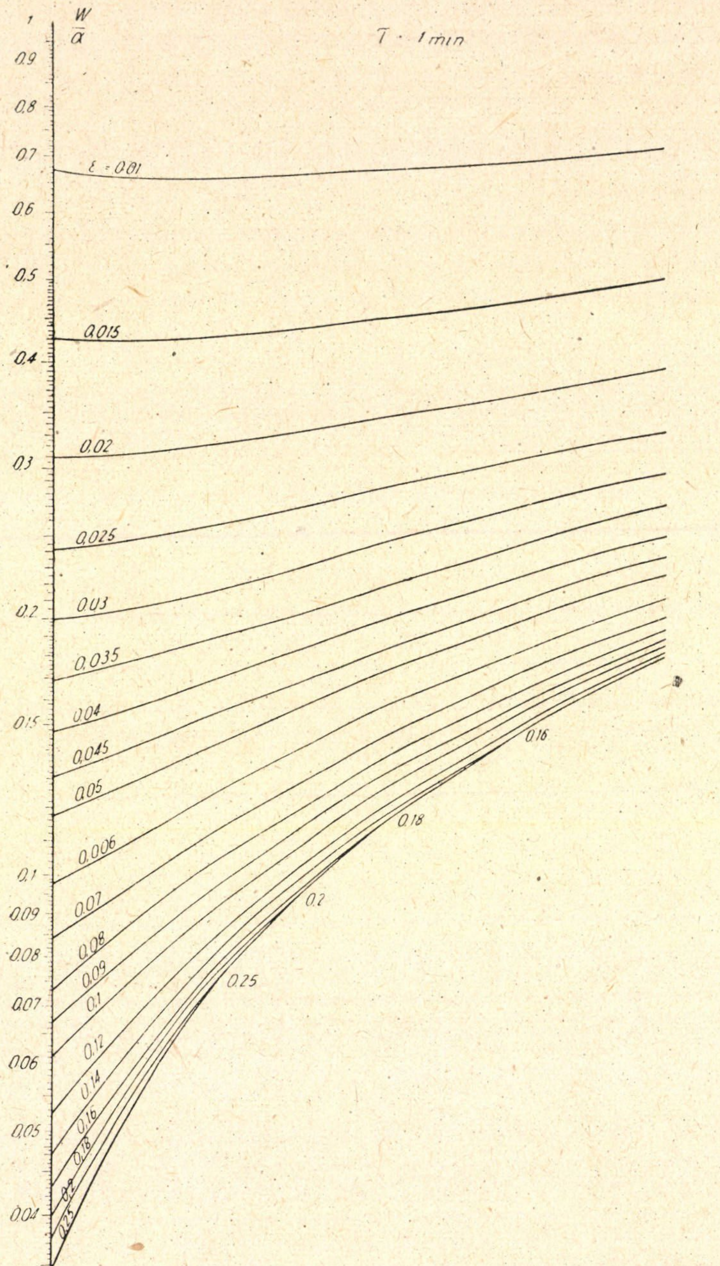
ezek után az $x = \psi_\alpha(x)$ egyenletre már alkalmazhatjuk az iterációs eljárást.

A vizsgált esetben $F(x_1, x_2, x_3) = x_2^3(1 + 2x_1)^{H-H_0-\frac{P}{1-x_3}}$ és mivel az $x_1 = x_2 = x_3 = x$ helyen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \left(\frac{H - H_0 - \frac{P}{1-x}}{1+2x}\right)C, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{3C}{x} \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = -\frac{P \log(1 + 2x)C}{(1 - x^2)}$$

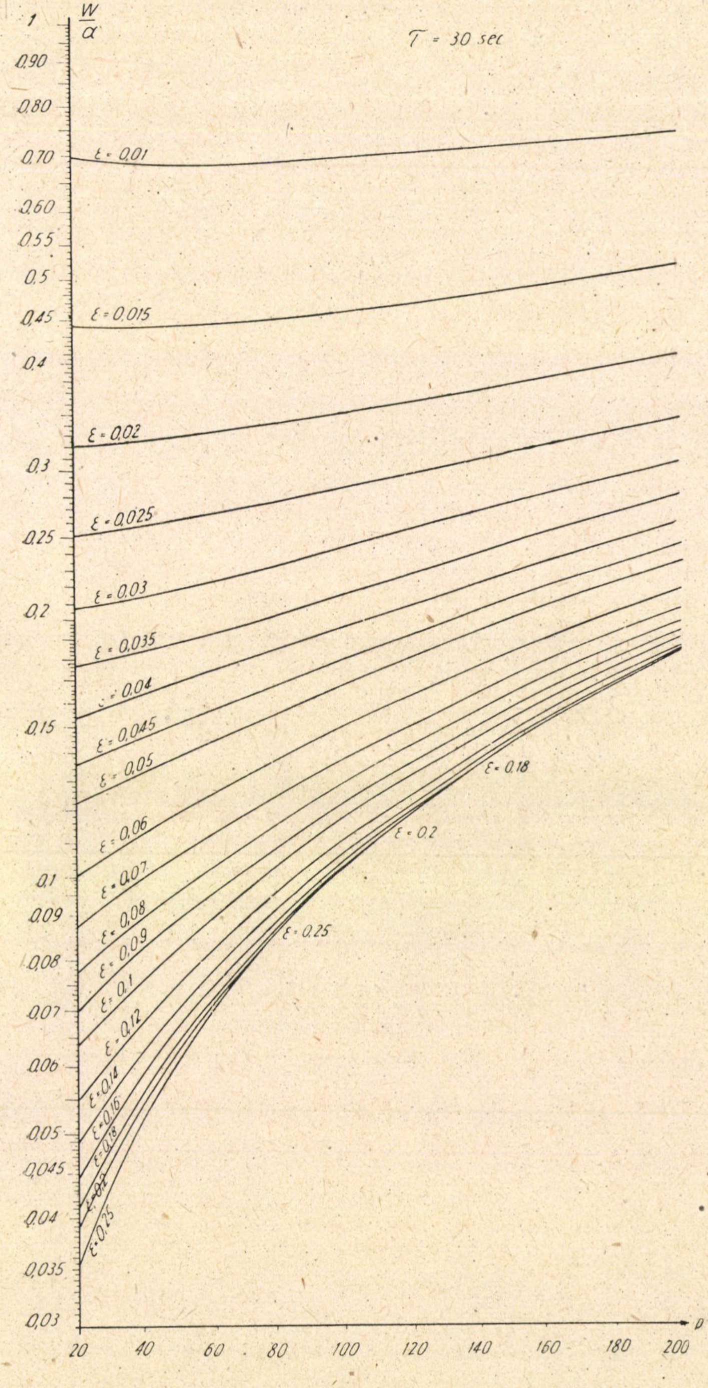
tehát — figyelembe véve, hogy $\frac{H - H_0}{P}$ általában igen nagy szám, — tehát az $F(x_1, x_2, x_3)$ függvény x_1 változtatására a »legérzékenyebb«, ezért alkalmaztuk az iterációt a (3.26) egyenletre.

Diagramm kompresszorok méretezéséhez



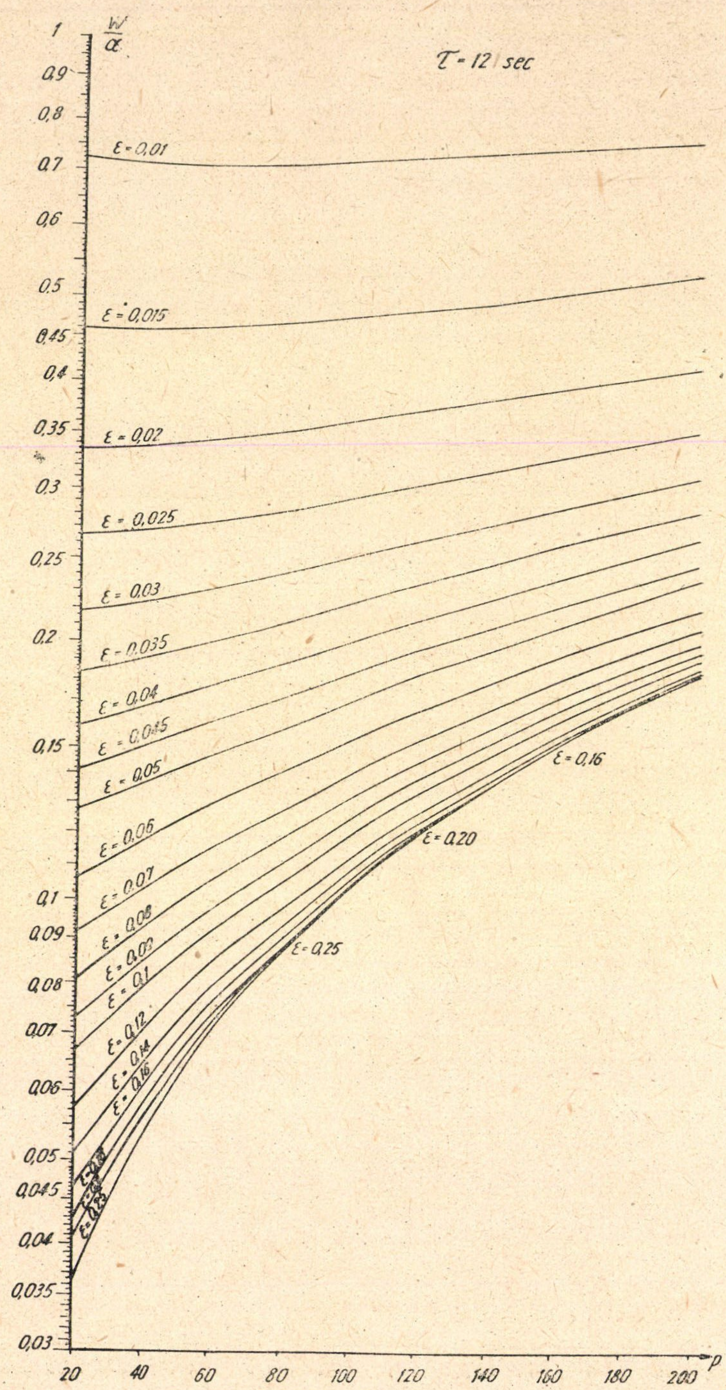
1. ábra

Diagramm kompresszorok méretezéséhez



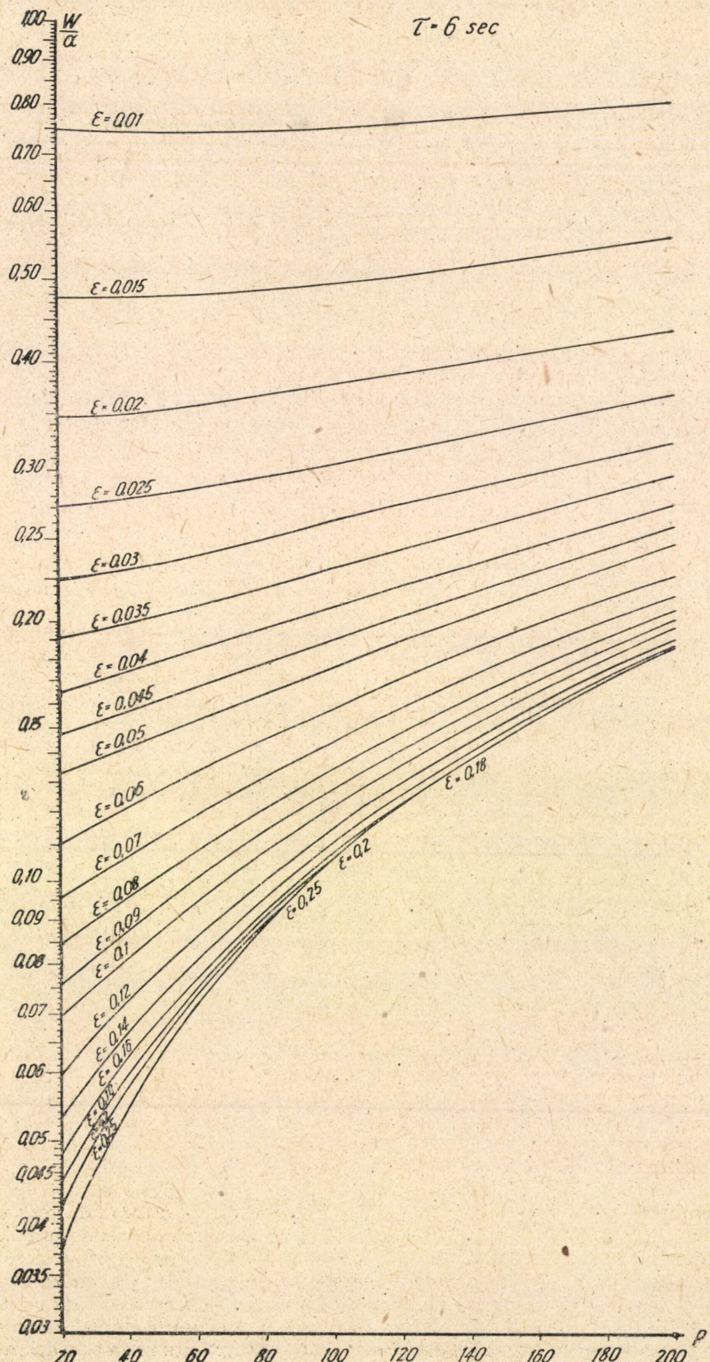
2. ábra

Diagramm kompresszorok méretezéséhez



3. ábra

Diagramm kompresszorok méretezéséhez



4. ábra

IRODALOM

1. *Rényi A.* és *Szentmártony T.:* Gépipari üzemek elektromos energiaszükségletének és egyidejűségi, illetőleg szükségleti tényezőjének valószínűségszámítási meghatározása. (Jelen kiadvány, 85. o.)
2. *H. Wold:* On stationary point processes and Markov-chains, Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1948. 229–240. o.
3. *A. N. Kolmogoroff:* Anfangsgründe der Theorie der Markofschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen, Математический Сборник 1(43)(1936), 607—610 o. lásd továbbá A. H. Колмогоров, Цепы Маркова со счётным числом возможных состояний, Бюлл Московского Университета (A) 1(1937) 1—16 o.
4. *W. Feller:* An introduction to probability theory and its applications, 1950. 15. fej. 307–344. o. Ebben a munkában megtalálhatók mindazok a Markov-láncokra vonatkozó ismert tételek, amelyeket a dolgozat felhasznál.
5. *A. Rényi:* Some problems concerning Poisson processes, Publicationes Mathematicae 2. (1951.) 66–73. o.

РАЦИОНАЛЬНЫЙ РАСЧЕТ КОМПРЕССОРОВ И ВОЗДУШНЫХ РЕЗЕРВУАРОВ ДЛЯ СНАБЖЕНИЯ ЗАВОДОВ С ЖАТЫМ ВОЗДУХОМ

А. РЕНЬИ

Резюме

Работа содержит решение следующей проблемы: В некотором заводе работают несколько машин, действующих со сжатым воздухом. Машины будут включены и выключены случайно. Сжатый воздух прибавляется компрессором, насыпающим резервуар, потребители получают сжатый воздух из резервуара. Если давление воздуха в резервуаре превысит некоторую границу v_2, компрессор выключается автоматически и включается только тогда, если давление понижается под некоторую границу v_1. Наша задача: определить мощность компрессора так, чтобы давление в резервуаре практически никогда непонижалось под некоторую нижную границу v_0, достаточную для обеспечения бесперебойной работы машин. Проблема решается с методами теории цепей Маркова. Результаты изображены графически так, что при данном потреблении и размере резервуара измерение компрессора отсчитывается без исчисления из графика.

DIMENSIONNEMENT RATIONNEL DES COMPRESSEURS ET DES RÉSERVOIRS D'AIR POUR FOURNIR AUX USINES L'AIR COMPRIMÉ

A. RÉNYI

Résumé

L'article contient la solution du problème suivant : Dans une usine plusieurs machines actionnées par air comprimé fonctionnent, la mise en service et hors service des diverses machines s'effectuant d'une manière aléatoire. L'air comprimé est fourni par un compresseur, qui remplit un réservoir. Les consommateurs reçoivent l'air comprimé de ce réservoir. Si la pression de l'air dans le réservoir dépasse une certaine borne v_2, le compresseur est mis hors fonctionnement automatiquement et n'est remis en fonctionnement qu'après que la pression sera tombée au-dessus d'une autre borne v_1. La tâche à résoudre est de déterminer quelle grandeur la capacité de la production du compresseur doit avoir pour assurer que la pression dans le réservoir ne tombe pratiquement jamais au-dessous d'une certaine borne inférieure v_0 qui suffit encore pour assurer le fonctionnement sans dérangements des machines. Le problème est résolu moyennant des méthodes probabilistiques, notamment moyennant les chaînes de Markov. — Les résultats sont réprésentés en forme graphique d'une telle manière qu'avec une consommation donnée et une grandeur du réservoir donnée on pourra sans autres calculs lire des représentations graphiques comment le compresseur devra être dimensionné.