SZÖVŐGÉPEK OPTIMÁLIS FORDULATSZÁMÁNAK VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI ALAPON VALÓ MEGHATÁROZÁSA, TÖBBGÉPES RENDSZER ESETÉN

SZÉKELY GÁBOR

ÖSSZEFOGLALÁS

Textilgépeknél a fordulatszám növelésével a gép működése közben többet termel, de ugyanakkor a fonalszakadás valószínűsége is növekszik, tehát a gépállások ideje is megnő. Az optimális fordulatszámot, tehát azt a fordulatszámot, amely mellett a termelt árumennyiség maximális, valószínűségszámítási módszerekkel lehet meghatározni. A cikk ismerteti azokat az elméleti számításokat és üzemi kísérleteket, amelyeket az Intézet ez irányban végzett.

A Könnyűipari Minisztérium megbízásából foglalkozott Intézetünk az optimális fordulatszám meghatározásával szövőgépeknél. A probléma a következő volt.

Több szövőgépet kezel egy munkás. Ha egy gépen fonalszakadás történik, a gép automatikusan leáll és a munkás hozzákezd a gép megjavításához. Azalatt azonban, míg dolgozik, újabb gépek leállnak és ezek mindaddig állnak, amíg a kezelő hozzá nem fog megjavításukhoz. Tehát nemcsak maga a javítás okoz termeléskiesést, hanem a javítások ideje alatti gépállás is. Feladat volt az egy munkás által kezelt gépek számának különböző értékei mellett meghatározni az optimális fordulatszámot, tehát azt a fordulatszámot, amely mellett az egy gépre eső termelés maximális.

Ilyen jellegű probléma valószínűségszámítási vizsgálatával elsőnek *A. J. Hincsin* szovjet matematikus foglalkozott [1].

A kérdés irodalmából kiemeljük *H. Ashcrofft* egy újabb dolgozatát [2], továbbá megemlítjük *Takács Lajos* egy munkáját [3], amely szintén tartalmaz a kérdésre vonatkozó eredményeket. Röviden tárgyalva van a probléma *W. Feller* könyvében is [4]. Ezen irodalmi forrásokra támaszkodhattunk munkánkban. Ezen munkák azonban nem foglalkoznak a fordulatszám változtatásának kérdésével. A következőkben közöljük a kapott elméleti és kísérleti vizsgálataink eredményeit.

Tekintsünk előbb egy gépet. Legyen a gép működése közben a fonalszakadás valószínűsége állandó, azaz független attól, mióta működik a gép. Ez a feltevés kézenfekvő, mivel a szakadás bekövetkezése csupán a fonal lokális tulajdonságától függ, ezért nem függ attól, mióta működik a gép. Legyen $\frac{\Delta t}{\lambda}$ annak a valószínűsége (Δt magasabb hatványait itt és a következőkben is elhanyagoljuk), hogy a fonal egy kis Δt időszakaszban elszakadjon, így tehát $\left(1-\frac{\Delta t}{\lambda}\right)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy Δt idő alatt ne történjék fonalszakadás. Jelentse $f(t)$ annak a valószínűségét, hogy legalább t ideig, $f(t+\Delta t)$ pedig azét, hogy legalább $t+\Delta t$ ideig ne legyen szakadás. Ez utóbbi azonban azt jelenti, hogy t ideig ne legyen szakadás, aminek a valószínűsége $f(t)$ és a következő Δt szakaszon se szakadjon el a fonal, aminek a valószínűsége $\left(1-\frac{\Delta t}{\lambda}\right)$. Mivel feltevésünk szerint utóbbi esemény független az előbbitől, következik, hogy

$$f(t+\Delta t)=f(t)\left(1-\frac{\Delta t}{\lambda}\right).$$

innen

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=-\frac{1}{\lambda}f(t).$$

Ha $\Delta t\to 0$ kapjuk, hogy $f'(t)=-\frac{1}{\lambda}f(t)$ és így

$$f(t)=c\,e^{-\frac{t}{\lambda}}.$$

Annak a valószínűsége, hogy t ideig ne történjék szakadás és a következő Δt szakaszon történjék, $c\,e^{-\frac{t}{\lambda}}\frac{\Delta t}{\lambda}$. Az ismeretlen c konstans könnyen meghatározható, ugyanis nyilvánvalóan

$$\int_0^\infty c\,e^{-\frac{t}{\lambda}}\frac{dt}{\lambda}=1$$

kell hogy legyen és innen $c=1$. Tehát a gép működési idejének eloszlása exponenciális típusú, sűrűségfüggvénye $y=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}$. A működési idő átlaga

$$\int_0^\infty t\,e^{-\frac{t}{\lambda}}\frac{dt}{\lambda}=\lambda.$$

Indokoltnak látszott azt feltételezni, hogy a javítási idők is exponenciális eloszlást követnek. Ez többek között azt jelenti, hogy rövid ideig tartó javítások gyakrabban és hosszabb ideig tartók, mind ritkábban fordulnak elő, ami megfelel a tapasztalatoknak. A kérdéses valószínűség-sűrűségfüggvény

$$y=\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{t}{\alpha}},$$

ahol α az átlagos javítási idő. Tehát annak a valószínűsége, hogy egy t időpillanatban folyó javítás a következő Δt szakaszban befeződjék, $\frac{\Delta t}{\alpha}$ lesz.

Most vizsgáljuk a gyakorlatban tényleg előforduló esetet, amikor egy munkás több gépet kezel. Jelöljük m-el a gépek számát. A_0 jelentse a géppark-nak azt az állapotát, amikor r gép áll, tehát $(m - r)$ működik. A_0 tehát azt az állapotot jelenti, amikor mindegyik gép működik. A géppark az idő folyamán különböző állapotba kerülhet, aszerint, hogy újabb gépek leállnak, vagy javítás után álló gépet elindítanak. Könnyen belátható az, hogy exponenciális eloszlású működési és javítási idők esetén a géprendszer állapotváltozásai Markov-láncot alkotnak, ugyanis a rendszer változása a véletlentől függ és annak valószínű-sége (a rövid felfutási idő után beálló stacionér állapotot feltételezve), hogy a rendszer az A_r állapotba kerüljön, kizárólag attól függ, hogy az előző állapot-változásnál melyik állapotban volt. Nyilvánvaló az is, hogy a rendszer átlagban ugyanannyiszor jut A_r állapotból A_{r+1} állapotba, mint ahányszor A_{r+1} állapotból A_r állapotba. Ugyanis az A_r állapotból A_{r+1} állapotba újból csak akkor mehet át a rendszer, ha előzőleg az A_{r+1} állapotból A_r állapotba került. Feltevéseink értelmében elhanyagolhatóan kicsiny annak a valószínűsége, hogy Δt idő alatt egyszerre két vagy több gépen történjék fonalszakadás. Nézzük először, mi annak a valószínűsége, hogy a rendszer a t időpontban A_r állapotban legyen és a t és $t + \Delta t$ időközben A_{r+1} állapotba menjen át.

Jelentse g_r annak a valószínűségét, hogy egy t időpillanatban r gép álljon. $m - r$ működő gépünk van; annak a valószínűsége, hogy ezek közül egy leálljon

$$\binom{m-r}{1}\frac{\Delta t}{\lambda}\left(1-\frac{\Delta t}{\lambda}\right)^{m-r-1} \approx (m-r)\frac{\Delta t}{\lambda}.$$

A A_r állapotból A_{r+1} állapotba való jutás keresett valószínűsége

$$V_{r,r+1} = g_r(m-r)\frac{\Delta t}{\lambda}. \tag{1}$$

Hasonlóképpen annak a valószínűsége, hogy t időpontban A_{r+1} állapotban legyen és t és $t + \Delta t$ közben A_r állapotba menjen át, a következő:

$$V_{r+1,r} = g_{r+1}\frac{\Delta t}{\alpha}. \tag{2}$$

Ugyanis ez csak úgy jöhet létre, hogy a t időpillanatban $r + 1$ gép áll, aminek a valószínűsége g_{r+1} és a következő Δt szakaszon egy gép javítása befejeződik, aminek a valószínűsége $\frac{\Delta t}{\alpha}$.

Az (1) és (2) valószínűségek egymással egyenlőek és így Δt-vel osztva — kapjuk

$$g_r(m-r)\frac{1}{\lambda} = g_{r+1}\frac{1}{\alpha} \qquad (r = 0,1,2,\dots m-1). \tag{3}$$

Ugyanerre az összefüggésre jut *Feller* is [3] bonyolultabb módon, mivel nem használja fel a (3) egyenlet közvetlen valószínűségszámítási jelentését.

A (3) egyenletrendszert a g_r ismeretlenre megoldva kapjuk, hogy

$$g_r = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^r \binom{m}{r} r!\, g_0.$$

Mindkét oldalon összegezve és figyelembevéve, hogy $\sum_{r=0}^{m} g_r = 1$ kapjuk, hogy

(4) $$g_0 = \frac{1}{\sum_{r=0}^{m} \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^r \binom{m}{r} r!}.$$

Az álló gépek átlagos számának meghatározásához a (3) egyenlet mindkét oldalát összegezzük:

$$m \sum_{r=0}^{m} g_r - \sum_{r=0}^{m} r g_r = \frac{\lambda}{\alpha} \sum_{r=0}^{m-1} g_{r+1}.$$

$b_m = \sum_{r=0}^{m} r g_{(r)}$ jelenti az álló gépek átlagos számát $a_m = m - b_m$ pedig a működő gépek átlagos számát. Mivel $\sum_{r=0}^{m-1} g(r+1) = 1 - g(0)$, tehát

(5a) $$a_m = \frac{\lambda}{\alpha} (1 - g_0)$$

és így

(5b) $$b_m = m - \frac{\lambda}{\alpha} (1 - g_0)$$

g_0 értékét (4)-ből behelyettesítve, következik

(6) $$a_m = \frac{\lambda}{\alpha} \left[1 - \frac{1}{\sum_{r=0}^{m} \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^r \binom{m}{r} r!} \right]$$

$$b_m = \frac{\lambda}{\alpha} \left[1 - \frac{1}{\sum_{r=0}^{m} \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^r \binom{m}{r} r!} \right].$$

A (3) egyenlet segítségével könnyen meghatározható az álló, illetve működő gépek számának szórásnégyzete is, mely mindkettőre

(7) $$\sigma^2 = \sum_{r=0}^{m} r^2 g_r - \left(\sum_{r=0}^{m} r g_r \right)^2 = \left(\frac{\lambda}{\alpha} - a_m \right) (a_m - m) + a_m \geqq 0.$$

Az (5a) és (7) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\frac{a_m}{m - a_m} \geq \frac{\lambda}{\alpha} - a_m > 0. \tag{8}$$

A (8) egyenlőtlenséget átalakítva kapjuk, hogy

$$\frac{\lambda}{\alpha} \geq \left(m - \frac{\lambda}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{\lambda}{\alpha} - a_m\right) + \left(\frac{\lambda}{\alpha} - a_m\right)^2. \tag{9}$$

Mivel λ az átlagos szakadásmentes időt és α az átlagos javítási időt jelentette, a kettő hányadosa az átlagos szakadásmentes idő alatt elvégezhető javítások száma, ez viszont nem más, mint a működő gépek átlagos száma, feltéve, hogy a munkás megállás nélkül dolgozik, azaz munkaideje teljesen ki van használva. Ebből már sejthető, hogy általában a_m igen közel lesz $\frac{\lambda}{\alpha}$-hoz, feltéve, hogy a munkás munkaideje jól van kihasználva. A $\frac{\lambda}{\alpha} - m$ különbségre (9)-ből egy felső becslést nyerünk, a következőképpen: A $\left(\frac{\lambda}{\alpha} - a_m\right)^2$ nemnegatív tagot elhanyagolva az egyenlőtlenség nyilván érvényes marad és így következik, hogy

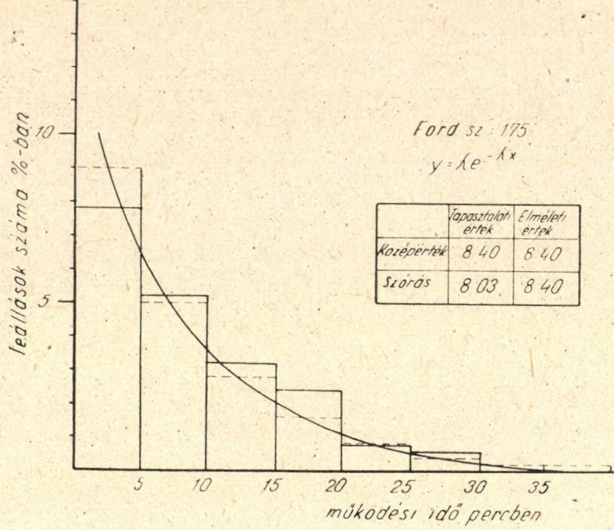
$$0 < \frac{\lambda}{\alpha} - a_m \geq \frac{\frac{\lambda}{\alpha}}{m - \frac{\lambda}{\alpha} + 1}. \tag{9}$$

Ebből következik, hogy a $\frac{\lambda}{\alpha} - a_m$ különbség rögzített λ és α mellett a gépek számának m-nek — növekedtével minden határon túl csökken, vagyis nagy m esetén $\frac{\lambda}{\alpha}$ a_m-nek jó közelítő értékét szolgáltatja. A (9) összefüggés módot ad annak megállapítására is, hogy hány gépet kezelhet egy munkás, ha előírjuk, hogy munkaideje milyen mértékben lehet kihasználva. Ugyanis $100 \frac{a_m}{\frac{\lambda}{\alpha}}$ adja meg, hogy a munkás munkaideje hány $\%$-ában van kihasználva Ha pl. előírjuk, hogy ez a szám 90% legyen, úgy ez bizonyosan teljesül, ha $\frac{1}{m - \frac{\lambda}{\alpha} + 1} \approx \frac{1}{10}$, vagyis $m - \frac{\lambda}{\alpha} + 1 \approx 10$, tehát mivel $\frac{\lambda}{\alpha} = 7{,}05$, ha $m = 16$. Megfordítva, adott gépszám (m), λ és α mellett kimondhatjuk, hogy a munkás munkaideje milyen $\%$-ban van kihasználva.

A szakadási valószínűségnek a fordulatszámtól való függését kísérleti úton állapítottuk meg. A Kistextnél folytattuk le a kísérleti adatfelvételt, melyet *Kis Ottó* és *Környei Imre* alkalmazott matematikus szakos egyetemi hallgatók, valamint Intézetünk részéről *Bognár László* végeztek.

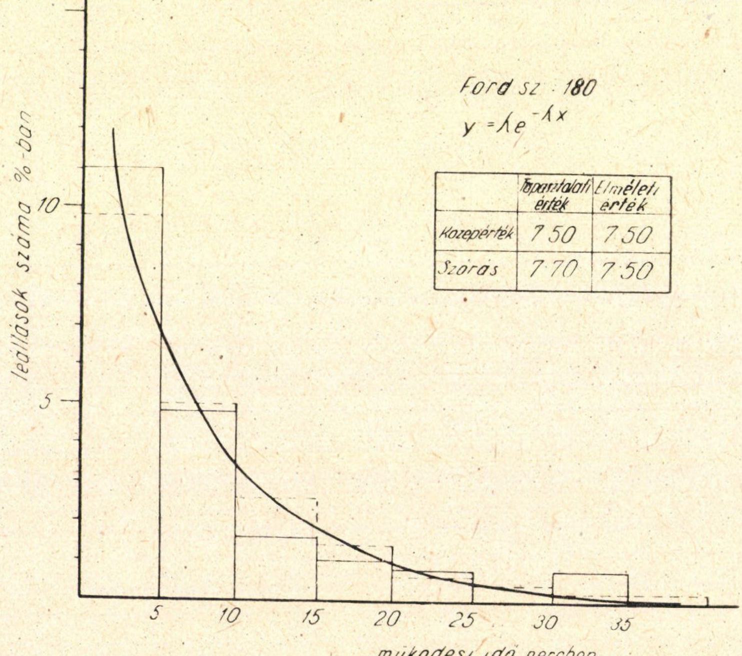
Kísérleteink során elsősorban vizsgáltuk a szakadásmentes idők eloszlását. Az 1.—4. ábrák mutatják ezt az eloszlást különböző fordulatszám mellett. A hystogrammon a szaggatott vonal jelzi az elméleti értéket, a másik

Szakadásmentes működési idők eloszlása



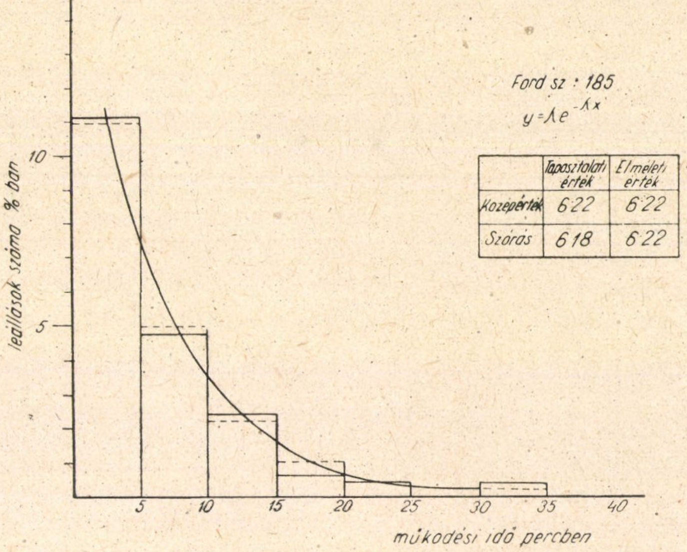
1. ábra

Szakadásmentes működési idők eloszlása



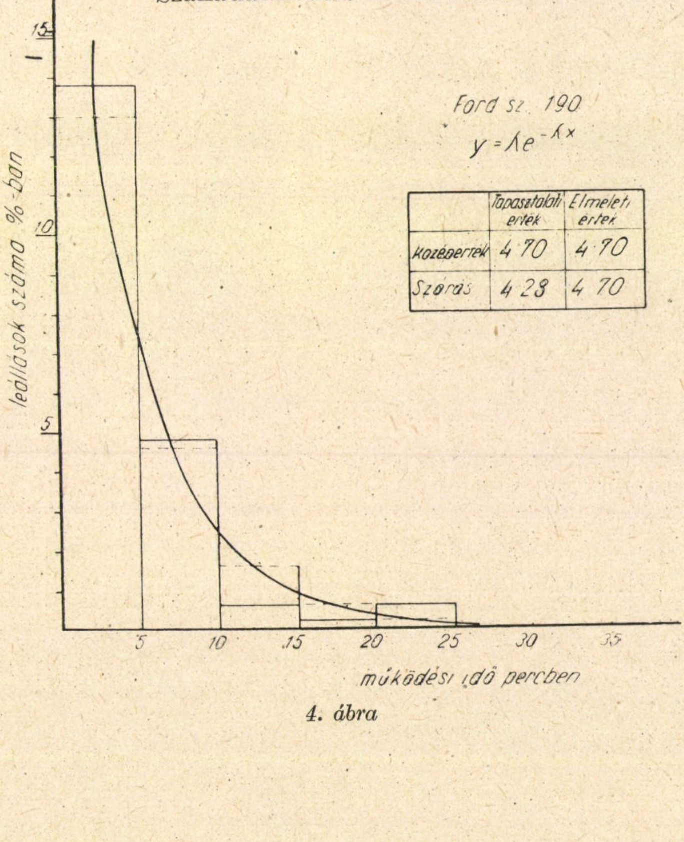
2. ábra

Szakadásmentes működési idők eloszlása



3. ábra

Szakadásmentes működési idők eloszlása



4. ábra

a ténylegesen észleltet. Az ábrákból kitűnik, hogy a kísérleti értékek az elméletiekkel kiválóan egyeznek. Különböző fordulatszámoknál az alábbi átlagos szakadásmentes időket és szakadási valószínűségeket észleltük :

Percenkénti fordulatszám	175	180	185	190
Átlagos szakadásmentes idő λ percben ...	8,40	7,50	6,22	4,70
Szakadási valószínűség $\frac{1}{\lambda}$	0,119	0,1333	0,1607	0,2128

A szakadási valószínűségeket az átlagos szakadásmentes idők reciprok értékeként számítottuk.

Ezúton mondunk köszönetet *Ajtai Miklós* könnyűipari miniszterhelyettesnek és a Kistext vezetőinek, hogy lehetőséget és segítséget nyujtottak az üzemi adatfelvétel elvégzéséhez.

A kísérlet időtartama alatt igyekeztünk a fordulatszámon kívül az összes többi, fonalszakadást befolyásoló tényező változatlanságát biztosítani (így pl. a fordulatszám változtatása esetén az ütőkar hosszának megfelelő változtatásával igyekeztünk az ütés erősségét megfelelően szabályozni stb.). Azonban voltak olyan tényezők — mint pl. a levegő relatív nedvességtartalma, hőmérséklet stb. — melyek konstans szinten tartására igyekeztünk, de ez nem sikerülhetett teljesen.

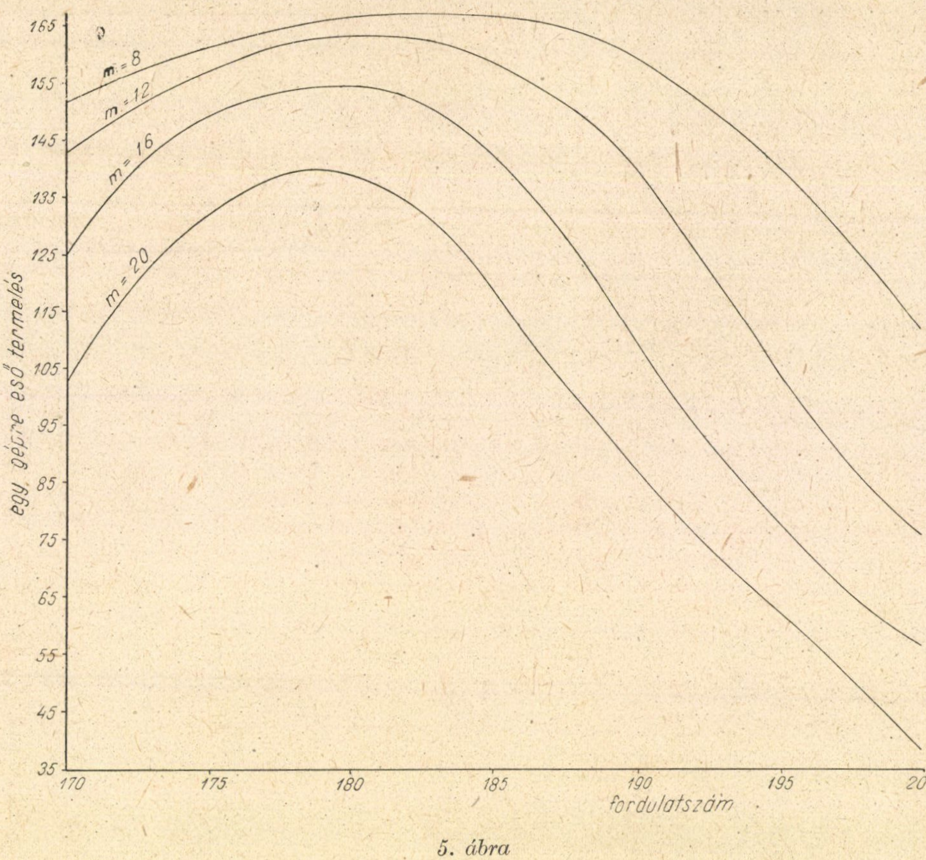
Megvizsgáltuk közelebbről, hogy a szakadási valószínűség hogyan függ a fordulatszámtól, azaz a szakadási valószínűséget a fordulatszámnak, n-nek valamilyen függvényeként akartuk előállítani.

Az észlelt szakadási valószínűségek másodfokú parabolával jól közelíthetőek voltak

Fordulatszám		175	180	185	190
λ	észlelt értéke	0,1190	0,1333	0,1608	0,2128
	közelítő értéke	0,1288	0,1253	0,1547	0,2171

Különböző gépszám esetén az optimális fordulatszámot a következőképpen határoztuk meg : A (4) képlettel adott a_m szolgáltatja az időegység alatt működő gépek átlagos számát (ez a kifejezés annyiban módosul, hogy a benne szereplő $p = \frac{1}{\lambda}$ szakadási valószínűség n-nek, a fordulatszámnak $p = an^2 + bn + c$ alakban adott függvénye. Ha adott n-nél a_m értékét meghatározzuk és az így nyert eredményt osztjuk a gépek számával egy gépre eső termeléssel arányos értéket kapunk, ez azonban könnyen átszámítható vetésszámra. Az 5. ábra különböző gépszám esetén az egy gépre eső termelés mennyiségét adja a fordulatszám függvényében. Az ábrán látható, hogy az optimális fordulatszám valamennyi gépszám esetében 180 körül mozog, továbbá, hogy nagyobb gépszámok esetén a fordulatszámnak az optimális fordulatszámtól való kis eltérése is már lényeges termeléscsökkenést okoz.

A közelítő parabolával nyert szakadási valószínűségek helyett a ténylegesen észlelt szakadási valószínűségekkel is el lehetett volna végezni a számítást, lényeges eltérést ez sem okozott volna. Összehasonlításként $m = 16$ gép esetére közöljük ezeket az értékeket :



5. ábra

a_{16} értéke:

Fordulatszám	175	180	185	190
a szakadási valószínűség észlelt értéke alapján	152,63	150,36	138,67	111,46
a szakadási valószínűség parabolikus közelítő értéke alapján	148,38	154,21	142,37	108,27

Hangsúlyoznunk kell itt mégegyszer azt, hogy kísérleteink félperces átlagos javítási idő mellett adott fonalminőségre, géptípusra és olyan más körülményekre (levegő relatív nedvességtartalma hőmérséklet stb.) vonatkoznak, melyek a kísérlet folyamán fennforogtak.

Ha ezek közül a tényezők közül bármelyik megváltozik és ennek a változásnak lényeges hatás tulajdonítható, a kísérletet meg kell ismételni és újból meg kell határozni az optimális fordulatszámot.

Vizsgálatunk végső konklúziója az volt, hogy célszerű emelni a fordulatszámot, mivel az üzem 170—175-el dolgozott addig. Bár más körülmények fennforgása esetén más az optimum — így pl. más üzemben 190-ig fel lehet menni a fordulatszámmal — az a tény, hogy a vizsgált esetben fordulatszám emelésének célszerűségét szabatos matematikai módszerekkel kimutattuk, tipikus. Valóban, azóta a Kistextben és más hazai textilgyáraknál a fordulatszámot lényegesen felemelték, elsősorban a szovjet tapasztalatok és útmutatások alapján, de az Intézet által végzett vizsgálatok, melyeket Rényi Alfréd, az Intézet igazgatója 1952. februárjában mérnöki továbbképző előadás keretében a textilmérnökök előtt részletesen ismertetett, szintén alátámasztották a fordulatszám emelésének célszerű voltát.

IRODALOM

1. *A. Ja. Hincsin:* Matematicseszkij Szbornyik 40 (1933) 119.
2. *Ashcrofft, H.:* Journal Roy. Stat. Soc. Ser. B. Vol. 193 (1950) 145—151.
3. *Takács Lajos:* Magyar Technika. 1950. 10. fl—19.
4. *Feller, W.:* Probability Theory and its Applications. 1950. 379—381.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ОБОРОТОВ ТКАЦКИХ МАШИН ПРИ ПОМОЩИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Г. СЕКЕЛЬ

Резюме

В случае повышения числа оборотов, работающая текстильная машина производит больше, а в то же время повышается и вероятность обрыва нити, следовательно, время простоя машин тоже повышается. Оптимальное число оборотов, т. е. число оборотов, при котором количество произведенных товаров максимально, можно определить методами теории вероятностей. Работа знакомит нас с теоретической работой и опытами на заводах, проведенными Институтом по отношению к этому вопросу.

DÉTERMINATION DU NOMBRE DE TOURS LE PLUS EFFICACE DES MÉTIERS À TISSER À L'AIDE DU CALCUL DES PROBABILITÉS

G. SZÉKELY

RÉSUMÉ

Dans le cas des machines textiles l'augmentation du nombre de tours par minute fait, que la machine produit une plus grande quantité de marchandise pendant son fonctionnement, mais la probabilité de la cassure du fils, augmente aussi et par ce fait la durée dans laquelle les la machines sont mises hors service, augmente. Le nombre de tours le plus efficace, c'est-à-dire le nombre de tours permettant d'obtenir une quantité maximum de marchandises produite, peut être déterminé moyennant des méthodes de la théorie des probabilités. L'article décrit les calculs théoriques et les expériences d'usine effectués dans ce but par l'Institut.