KŐTÖRÉS ENERGIASZÜKSÉGLETÉNEK MINIMALIZÁLÁSA AZ ELŐ- ÉS UTÁNTÖRŐK LEGCÉLSZERŰBB BEÁLLÍTÁSÁVAL

SZÉKELY GÁBOR

ÖSSZEFOGLALÁS

Ismeretes, *A. N. Kolmogorov* [1] eredményeiből, hogy a zúzott anyag szemcséinek nagyságszerinti eloszlása logaritmikusan normális. Szerző fenti eredményeket felhasználva pofástörőkkel való zúzás kétfázisban való lefolytatásához ad nomogrammot, amelynek segítségével a pofanyílások olymódon állíthatók be, hogy a törők hatásfoka maximális legyen.

A. N. Kolmogorov szovjet matematikus 1941-ben megjelent dolgozatában [1] aprítási folyamatoknál keletkező szemcsék szemnagyság szerinti logaritmikus normális eloszlását igazolta. Ugyanezzel a kérdéssel foglalkozott *Rényi Alfréd* is [2] dolgozatában, ahol az említett problémának egy részletesebb tárgyalását adta, különböző feltételek mellett elemi eszközökkel bebizonyította a Kolmogorov-féle logaritmikus normális eloszlástörvény érvényességét és megadta az aprításhoz szükséges energia kifejezését. Röviden összefoglaljuk a cikk eredményeit.

Aprításnál keletkező szemcsék szemnagyság szerinti (szemnagyságon a szemcse átmérőjét értjük ; ezt indokolja az, hogy a szemnagyság szerinti megoszlást a gyakorlatban szitálással vizsgálják) eloszlásának sűrűségfüggvénye

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x b}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \log a}{b}\right)^2}$$

A valóságban azonban nem az egyes szemnagyság-kategóriákhoz tartozó szemcsék számát, hanem azok súlyát ismerjük. A súly szerinti eloszlás sűrűségfüggvénye

$$(2) \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b a^3 e^{\frac{9b^2}{2}}}\, x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \log a}{b}\right)^2}$$

A szemcsék súlya és száma között az (1) és (2) sűrűségfüggvényekből származó egyszerű összefüggés áll fenn

$$(3) \qquad S = f N a^3 e^{\frac{9b^2}{2}}$$

ahol S a szemcsék súlyát, N a számát jelenti, a és b az eloszlásban szereplő paraméterek, f pedig a fajsúly.

A (2) sűrűségfüggvény első és második momentumait az

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \int_0^\infty x q(x)\, dx = a\, e^{\frac{7b^2}{2}} \\
M_2 &= \int_0^\infty x^2 g(x)\, dx = a^2 e^{8b^2}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

értékek szolgáltatják. Ezek segítségével meghatározhatók az a és b paraméterértékek.

Ismeretes, hogy a Rittinger [3] törvény szerint a zúzáshoz szükséges energia arányos a zúzás folyamán keletkezett felülettöbblettel. Az aprítás folyamán keletkezett felület pedig arányos (az arányossági tényező a zúzott anyagtól függ, ugyanis függ a szemcsék alakjától) az (1) sűrűségfüggvény második momentumával. A zúzáshoz szükséges energiára ilymódon,* felhasználva a (3) összefüggést, adódik, hogy arányos az

$$
E = \frac{cS}{a\, e^{\frac{5b^2}{2}}} = 6kNa^2e^{2b^2}
\tag{5}
$$

kifejezéssel, ahol c és k, a zúzott anyagtól függő állandó k.

A logaritmikus normális eloszlásnak az alkalmazása az eddig helytelenül használt Rosin—Rammler eloszlás helyett nem jelent számolásbeli nehézséget. A számításhoz szükséges fügkvényértékek táblázatából könnyen kikereshetők Indokolt ezt használni egyrészt azért, mert elméletileg megalapozott, másrészt mert alkalmas az energiaszükséglet meghatározására, szemben a Rosin—Rammler eloszlással [5], mely bizonyos esetekben ellentmondásra is vezet. (Bizonyos paraméterértéknél a Rosin—Rammler-eloszlás szerint végtelen energiára van szükség a zúzás lefolytatásához.)

Lázár Jenő [4] foglalkozott pofástörőknél keletkező zuzalék szemeloszlásával ; tapasztalati adatokkal igazolta, hogy az logaritmikus normális eloszlást követ, de továbbmenőleg azt a megfigyelést tette, hogy egyrészt a beállított pofanyílás nagysága, másrészt az (1) és (2) sűrűségfüggvényekben szereplő a és b paraméterek között függvényszerű kapcsolat áll fenn.

E megfigyelés nyomán *Lázár Jenő* vetette fel azt a kérdést, hogy ha a zúzást két fázisban folytatjuk le (előtörő, utántörő), milyen pofanyílás beállítás mellett lesz a felhasznált energia minimális, illetve az aprítás hatásfoka maximális.

Az UVATERV-től kísérleti adatokat kaptunk, bizonyos kőzetféleségek különböző pofanyílás-beállítás mellett pofatörőkkel végzett zúzására vonatkozólag. A pofanyílást változtatták 10 mm-ként 30—150 mm-ig. Ilymódon a szitamaradék-görbékből 13 db empírikus eloszlásfüggvényt nyertek. Az 1.

* Az (5) képletben szereplő kifejezés nem dimenzió nélküli. Az energia dimenziója cm^2 gr sec^{-2}, a nevező (második momentum) dimenziója cm^2, tehát a számlálóban szereplő c konstans, illetve a k konstans gr sec^{-2} dimenzióval értendő.

táblázat adja ezeknek az eloszlásfüggvényeknek az első és második momentumait, melyeket grafikus úton határoztunk meg.

1. táblázat

Pofanyílás	M_1	M_2
30	15,06	322,67
40	20,90	504,63
50	26,20	696,25
60	31,54	1150,27
70	36,12	1449,36
80	40,34	1857,04
90	45,46	2309,32
100	50,26	3019,56
110	54,98	3672,21
120	59,54	4396,98
130	62,70	4747,35
140	66,68	5276,41
150	70,50	5918,64

A (4) összefüggések segítségével meghatároztuk az a és b paramétereket, majd meghatároztuk a p pofanyílás és az észlelt a és b értékek közötti kapcsolatot : Azt kaptuk, hogy a lineáris függvénye a p pofanyílásnak, b pedig közelítőleg konstans

$$a = 0,4908253\, p = \lambda p$$

$$b = 0,391$$

Ha az így kapott a és b értékeket behelyettesítjük az energiára nyert (5) képletbe, látjuk, hogy a zúzáshoz szükséges energia a pofanyílás függvényében egy hyperbolával ábrázolható, mely egyezik a tapasztalatokal.

A probléma a következő : valamely kőzetet akarunk p^* finomságúra aprítani ; itt p^* finomság alatt azt értjük, hogy a zuzalékban előforduló maximális szemnagyság p^*, a többi mind ennél kisebb. Két részletben törünk, előbb előtörővel, majd utántörővel. Kérdés, *hogyan kell a törők* p_1, *illetve* p_2 *pofanyílásait megválasztani, olymódon, hogy a zúzáshoz szükséges energiának és a zúzott kőzet súlyának hányadosa minimális legyen.**

Induljunk ki egy N szemcséből álló kőzetmennyiségből. Ezt p_1 pofanyílásbeállítás mellett aprítjuk. Az aprításhoz felhasznált energia

$$E_1 = 6N\lambda^2 p_1^2 e^{2b^9}$$

Szitával leválasztjuk a p^*-nál nagyobb szemcséket. Ezek száma

$$N_1 = N \int_{p^*}^{\infty} f(x, p_1)\, dx$$

* Ennek a problémának a megoldása jelentős energiamegtakarítást tesz lehetővé, aminek népgazdasági szempontból igen nagy jelentősége van, mivel az aprítási folyamatok általában rendkívül sok energiát igényelnek.

Másodszor aprítunk p_2 pofanyílás-beállítás mellett. A zúzáshoz felhasznált energia

$$E_2 = 6N \int_{p^*}^{\infty} f(x,p_1)\, dx\, \lambda^2 p_2^2 e^{2b^2} - 6N \int_{p^*}^{\infty} x^2 f(x,p_1)\, dx$$

ahol a jobboldalon álló kifejezés második tagja jelenti az első szitáláskor leválasztott és továbbtörésre kerülő anyag felületét. Ugyanis *Rittinger* törvénye szerint a zúzáshoz szükséges energia a keletkező felülettöbblettel arányos. Az első zúzásnál, a zúzás előtti kezdeti felületet elhanyagoltuk, ez kicsiny a keletkező felülethez képest. A második zúzás után is szitával leválasztjuk a p^*-nál nagyobb szemcséjű anyagot.

A két zúzás után súlyban keletkezett

$$S = S_1 + S_2 = fN \int_0^{p^*} x^3 f(x,p_1)\, dx + fN \int_{p^*}^{\infty} f(x,p_1)\, dx \int_0^{p^*} x^3 f(x,p_2)\, dx$$

összsúlyú zúzott anyag, ahol f az anyag fajsúlyát jelenti.

Energiában felhasználódott

$$E = E_1 + E_2 .$$

Meghatározandó az a p_1, p_2 értékpár ($p_2 \leqq p_1$), amely mellett az

$$(6) \qquad \frac{E}{S} = \frac{6N\left[\,{}^2 p_1^2 e^{2b^2} + \int_{p^*}^{\infty} f(x,p_1)\, dx\, \lambda^2 p_2^2\, e^{2b^2} - \int_{p^*}^{\infty} x^2 f(x,p_1)\, dx\right]}{fN\left[\int_0^{p^*} x^3 f(x,p_1)\, dx + \int_{p^*}^{\infty} f(x,p_1)\, dx \int_0^{p^*} x^3 f(x,p_2)\, dx\right]}$$

hányados minimális, ahol

$$f(x,p_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, xb}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \log \lambda p_1}{b}\right)^2}$$

$$f(x,p_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, xb}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \log \lambda p_2}{b}\right)^2}$$

Célszerűnek látszott a fenti kétváltozós függvény minimumát nomogramm segítségével meghatározni. Kisebb átalakításokkal a (6) függvény a következő alakra hozható:

$$(7)\ \frac{E}{S} = \frac{f(p_1) + g(p_1) f(p_2) - h(p_1)}{k(p_1) + g(p_1)\, k(p_2)} = \frac{\dfrac{f(p_1) - h(p_1)}{g(p_1)} + f(p_2)}{\dfrac{k(p_1)}{g(p_1)} + k(p_2)} = \frac{F_1(p_1) - F_2(p_2)}{G_1(p_1) - G_2(p_2)}$$

ahol

$$F_1(p_1) = \frac{f(p_1) - h(p_1)}{g(p_1)}$$

$$F_2(p_2) = f(p_2)$$

$$G_1(p_1) = \frac{k(p_1)}{g(p_1)}$$

$$G_2(p_2) = k(p_2),$$

továbbá a (6) függvényben szereplő integrálok átalakításával

$$g(p_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\ln \frac{p^*}{\lambda p_1}}{\sqrt{2}\, b}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt \qquad h(p_1) = \lambda^2 e^{2b^3} p_1^2 \int\limits_{\frac{\ln \frac{p^*}{\lambda p_1}}{\sqrt{2}\, b} - \sqrt{2}\, b}^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

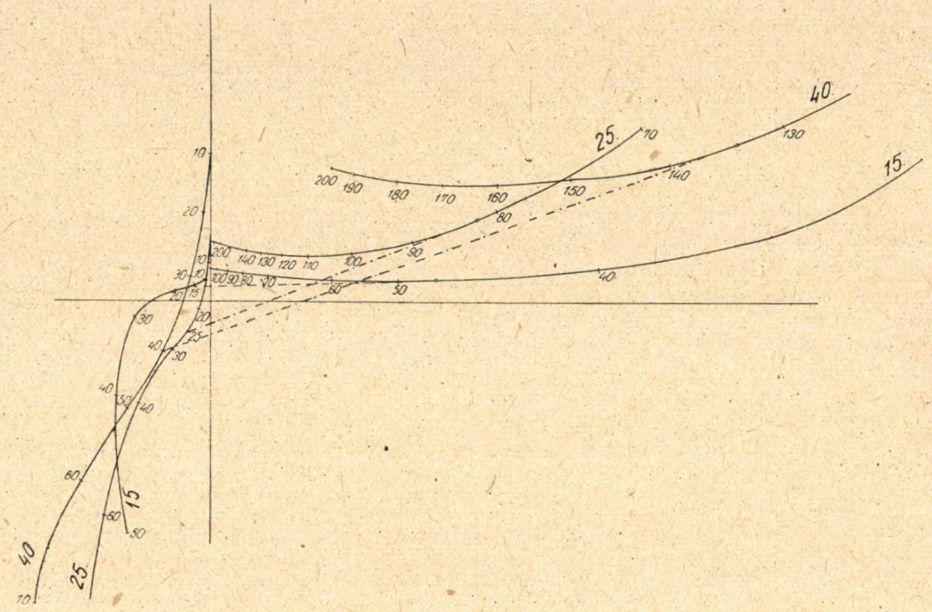
$$k(p_1) = \lambda^3 e^{\frac{9b^2}{2}} p_1^3 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\ln \frac{p^*}{\lambda p_1}}{\sqrt{2}\, b} - \frac{3\sqrt{2}}{2} b}^{\infty} e^{-t^2}\, dt \right.$$

$$k(p_2) = \lambda^3 e^{\frac{9b^2}{2}} p_2^3 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\ln \frac{p^*}{\lambda p_2}}{\sqrt{2}\, b} - \frac{3\sqrt{2}}{2} b}^{\infty} e^{-t^3}\, dt \right]$$

A (7) kifejezés úgy fogható fel, mint egy iránytangens. Ha tehát az egyik skálán adott p^* mellett az $F_1(p_*)$ és $G_1(p_*)$ értékeknek megfelelő pontokat rakjuk fel, a másikon az $F_2(p_2)$ és $G_2(p_2)$ értékeknek megfelelőket, a két görbe egy-egy pontját összekötő egyenesnek az iránytangense éppen az illető p_1, p_2 értékpárnak megfelelő $\frac{E}{S}$ függvényértéket szolgáltatja. A függvénynek tehát azon p_1, p_2 értékpárnál van minimuma ($p_2 \leq p_1$ mellékfeltételt is figyelembe kell venni), amelynél a két görbe megfelelő pontjait összekötő egyenesnek az iránytangense minimális. A szélsőértékfeladat nomografikus úton való megoldásának gondolata *Pál Sándortól* származik. A nomogrammból (1. ábra) az derült ki, hogy a vizsgált esetben *leggazdaságosabban akkor járunk el, ha a második pofanyílás-beállítás magával p^*-al egyenlő.* A függvény szélső értékét egyébként a p^* pontból a másik görkéhez húzott érintő érintési pontjának megfelelő p pont szolgáltatja. Az így nyert p_1, p^* eıtékpár adja a kívánt minimumot.

11

Itt ki kell még hangsúlyoznunk azt, hogy az itt közölt eredmények csak a kísérletben szereplő kőzetféleségnek a felhasznált zúzógépekkel történt zúzására érvényesek. Más kőzetek és más zúzóberendezés esetén általában más lesz λ és b értéke. λ és b értékének meghatározása mindig kísérleti úton történik. A nomogramm változó λ és b értékre való kiterjesztésének nincs elvi akadálya, csak ismerni kell λ és b változásának értékhatárait. Ez esetben adott p^* értékhez nem két görbe, hanem két görbesereg tartozik.



1. ábra

IRODALOM

1. А. Н. Колмогоров: Доклад ч А. Н. СССР (1941)
2. *Rényi A.*: Építőanyag, 2. (1950) 177—183.
3. *P. R. Rittinger*: Aufbereitungskunde (1867) 19.
4. *Lázár J.*: Építőanyag 2. (1950) 57—71.
5. *Beke B.*: Aprítás-fajtázás. (Sajtó alatt)

МИНИМАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ РАЗДРОБЛЕНИЯ КАМНЯ ПУТЕМ НАЙБОЛЕЕ ЦЕЛЕСООБРАЗНОЙ УСТАНОВКИ ДРОБИЛОК ПЕРВИЧНОГО И ВТОРИЧНОГО ДРОБЛЕНИЯ

Г. СЕКЕЛЬ

Резюме

Из результатов А. Н. Колмогорова [1] известно, что распределение по величине зерен раздробленного материала логарифмически нормально. Применяя вышеуказанные результаты, автор дает номограмм для произведения двухстадиального измельчения щековыми дробилками, с помощью которого щековые отверстия регулиру ются так, что эффективность дробилок максимальна.

MINIMALISATION DU BESOIN D'ENERGIE DU CONCASSAGE PAR L'AJUSTAGE LE PLUS PRATIQUE DES CONCASSEURS PRELIMINAIRES ET DES CONCASSEURS POSTÉRIEURS

G. SZÉKELY

Résumé

Sur la base des résultats obtenus par *A. N. Kolmogorov* [1] on sait que la distribution des grains de la matière concassée selon leur grandeur est logaritmico-normale. Utilisant les résultats mentionnés, l'auteur donne un nomogramme, à l'aide duquel dans le cas de concassage en deux phases les ouvertures des joues peuvent être ajustées d'une telle manière que l'effet utile des concasseurs devienne un maximum.