

2

A PLANIMÉTEREK MŰKÖDÉSI ELVE, KÜLÖNÖS TEKINTETTEL AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZET GÉPEIRE

FREY TAMÁS

ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk részletesen ismerteti a polár-, lineár- és radiálplaniméterek, valamint a Stieltjes-planiméterek működési elvét és konstrukcióját. — Rendszeresen és a szokásosnál részletesebben tárgyalja az $\int_a^b f[y(x)] dx$ és $\int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) dx$ alakú integrálok mérésére

alkalmas funkciós planiméterek és funkciós integriméterek elméletét; utóbbi feladat megoldására szolgáló planiméter-típusok konstrukciójára konkrét javaslatot is ad: a Lorenz-planiméter megfelelő átalakítások elvégzése után alkalmazható e célra.

Ismerteti a cikk a Nyström-féle Stieltjes-planiméter egy gyakorlatilag hasznosnak bizonyult alkalmazási lehetőségét többparaméteres határozott integrálok numerikus kiértékelésénél.

Ebben a cikkben a leggyakrabban alkalmazott matematikai műszerek — a különböző planiméterek — elvi kérdéseivel foglalkozunk; olyan általánosan, hogy helyenként a fejlődés lehetőségeire is rámutathassunk; ismertetjük eközben az Alkalmazott Matematikai Intézet gépeit és azokat a különleges alkalmazási lehetőségeket, amelyek eddig a munka során felmerültek.

A cikk ismerteti azon technikai gépelemek nagy részét, amelyeket a mechanikai elven felépülő matematikai gépekben felhasználnak.

Ismertetjük e cikkben az Intézet harmonikus analizátorát is; ez ugyanis tulajdonképpen Stieltjes-planiméter. A harmonikus analizátorokról általánosságban azonban csak egy későbbi cikkben szándékozunk beszámolni.

A cikk első részében a planiméterek feladatát, elvi alapjait, a használt mérőműszereket ismertetjük; a második részben részletesen tárgyaljuk az egyes típusokat; végül a planiméterek speciális alkalmazási lehetőségeit és a várható pontosságot vázoljuk.

1. §. A planiméterekről általában

1.1. Feladatuk, csoportosításuk

Planiméternek hívjuk összefoglalóan a változó, vagy állandó felső határral rendelkező határozott integrálokat gépi úton mérő műszereket. Grafikusan

adott $y = y(x)$, ill. $r = r(\varphi)$ egyenletű (g) görbe végigtapogatása alapján legáltalánosabban a

$$\int_{(g)} f[x, y(x)] dx \quad \text{ill.} \quad \int_{(g)} \Phi[r(\varphi)] d\varphi$$

alakú integrálok értékét tudjuk segítségével meghatározni.

Legegyszerűbb felépítésűek az ú. n. *körüljáró-planiméterek*, amelyek

$$\int_a^b y(x) dx; \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi) d\varphi \quad \text{és} \quad \oint \frac{r^2}{2} d\varphi$$

alakú integrálok meghatározására alkalmasak. Ennél összetettebbek a változó

felső határu, $\int_a^{b(x)} y(x) dx$ alakú integrálokat mérő *integríméterek*. Legáltalánosabbak a *funkciós-planiméterek* és *funkciós integríméterek*. Ezek — a grafikusan adott $y = y(x)$ vagy $r = r(\varphi)$ görbét végigjárva — felépítésüktől függően különböző

$$\int_a^b f[x, y(x)] dx; \quad \int_a^{b(x)} f[x, y(x)] dx \quad \text{ill.} \quad \int_a^{\beta} \Phi[r(\varphi)] d\varphi \quad \text{és} \quad \int_a^{\beta(\varphi)} \Phi[r(\varphi)] d\varphi$$

alakú integrálok értékét mérik. Külön tárgyaljuk az $\int_{H(a)}^{H(b)} y(x) \cdot d[H(x)]$

alakú Stieltjes-integrálokat meghatározó *Stieltjes-planiméterek* működési elvét.

Tárgyalásunk kiindulási alapja egy általános egyenlet lesz, amely kapcsolatot teremt a műszer által mért és az integrál által meghatározott mennyiség között. Az ú. n. radiál-planiméterek és a Stieltjes-planiméterek kivételével valamennyi műszer tárgyalásához ezen egyenlet alapján kezdünk. Mindenekelőtt azonban bizonyos elnevezésekben és jelölésekben állapodunk meg.

A *követőkar*; egyik pontja a műszer felépítése által meghatározott kényszerpályán mozog; ez a *követőkar vezetett pont-ja*. Az ebbe a pontba mutató helyvektort (amely természetesen valamely τ paraméter függvénye) $v(\tau)$ -vel jelöljük; rendezőit pedig v_1 -gyel, ill. v_2 -vel. A követőkar egyik végpontján a — grafikusan adott — görbe követését megkönnyítő fonalkeresztes nagyító vagy tú nyer elhelyezést. Ez a *követőpont*, amelynek a helyvektora $k(\tau)$, rendezői pedig: x és y . A követőkarnak az abszcisszatengellyel bezárt szöge: α .

A *mérőkar*; ezen helyezzük el a mérőműszert. A mérőkar egyik pontja ismert területet fut körül; ez a *tartópont*. Helyvektora a $t(\tau)$ vektor; rendezői: t_1 és t_2 . A másik jellemző pont, — amelynek pályagörbéjét a követőpont pályagörbéjével hozzuk kapcsolatba — az ú. n. *futópont*. Ebbe a pontba mutat az $f(\tau)$ vektor. Rendezői: X és Y . A mérőkar az abszcisszatengellyel μ szöget zár be.

Meg kell jegyeznünk, hogy a mérőkar gyakran fiktív, vagy legalább is materiálisan nem teljesen kiképzett. A körüljáró-planimétereknél pedig azonos a követőkarral.

1. 2. Az alapegyenlet

A planiméteren elhelyezett mérőműszer bizonyos vonalintegrál értékét méri. Ez kapcsolatban áll a futópont által meghatározott területtel. (Körüljáró és funkciós planimétereknél a futópont körülfutja a kérdéses területet, integriméter-típusú műszereknél viszont a futópont pályagörbéje és az abszcisszatenhely megfelelő szakasza — valamint a határoló ordináták — közé eső területről van szó.)

Az előzőekben rögzített jelölések mellett még az alábbiakat használjuk :

$\mathbf{l}(\tau) = \mathbf{k}(\tau) - \mathbf{v}(\tau)$ a követőkart jellemző vektor ; $|\mathbf{l}| = l$.

$\mathbf{m}(\tau) = \mathbf{f}(\tau) - \mathbf{t}(\tau)$ a mérőkart jellemző vektor ; $|\mathbf{m}| = m$.

A futópontba mutató \mathbf{f} helyvektor által — valamely τ_0 paraméterértékű kezdőhelyzettől τ_v paraméterértékű véghelyzetig — súrolt szektorszerű terület kétszeres területvektora :

$$2S_f = \int_{\tau_0}^{\tau_v} (\mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}) d\tau.$$

Ugyanezen paraméter-intervallumban a tartópontba mutató helyvektor által súrolt szektorszerű terület kétszeres területvektora :

$$2S_t = \int_{\tau_0}^{\tau_v} (\mathbf{t} \times \dot{\mathbf{t}}) d\tau.$$

(A pont τ -szerinti differenciálást jelent).

Felhasználjuk az $\mathbf{m} = \mathbf{f} - \mathbf{t}$ összefüggést :

$$\mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}} = (\mathbf{t} + \mathbf{m}) \times (\dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{m}}) = \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{t}} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{m}} + \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{t}} + \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}.$$

$$\text{De : } \frac{d}{d\tau} [\mathbf{m} \times \mathbf{t}] = \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{t} + \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{t}} = \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{t}} - \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{m}}.$$

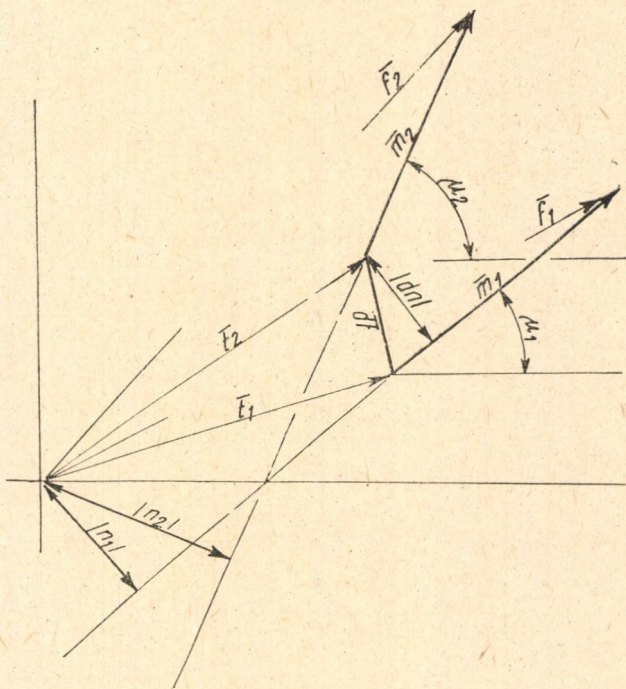
Ezt az előző egyenlet jobboldalán a második tagban felhasználva :

$$\mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{t}} + 2(\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{t}}) - \frac{d}{d\tau} [\mathbf{m} \times \mathbf{t}] + \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}.$$

Az ábrán a τ_1 paraméterértékhez tartozó mennyiségeket egyszerűen az 1 index-szel jelöltük ; hasonlóképp a τ_2 paraméterértékre vonatkozó mennyiségeknél a 2. indexet használtuk.

Egyenletünk jobboldalán valamennyi tagban egymással párhuzamos vektorok szerepelnek ; \mathbf{f} , \mathbf{t} , \mathbf{m} , továbbá $\dot{\mathbf{f}}$, $\dot{\mathbf{t}}$ és $\dot{\mathbf{m}}$ vektorok ugyanis konplanárisak, vektoriális szorzataik tehát az őket tartalmazó síkállás normálisába esnek. Jelöljük a normálisba eső — a szögek pozitív irányához jobbsavarnak megfelelően irányított egységvektort \mathbf{e} -vel. Használjuk fel a $\tau_2 - \tau_1 = d\tau$, továbbá az 1. ábra n és dn jelöléseit (n jelenti a \mathbf{t} , dn pedig $d\mathbf{t}$ -nek \mathbf{m} -re merőleges előjeles vetületét ; ha \mathbf{m} és \mathbf{t} , ill. \mathbf{m} és $d\mathbf{t}$ egymással bezárt szöge π -nél kisebb, a vetületnek

pozitív mértékszámot tulajdonítunk, ellenkező esetben negatívot.) Jelentse továbbá S_f az \mathbf{f} , S_t pedig a \mathbf{t} vektor által sűrolt szektorszerű terület előjeles



1. ábra

mértékét (pozitívnek tekintjük a területet, ha a kérdéses vektor azt pozitív irányban forogva sűrolja, negatív, ha negatív a forgás iránya). Legutolsó egyenletünket τ_0 -tól τ_v -ig integrálva, a következőt kapjuk :

$$\int_{\tau_0}^{\tau_v} (\mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_v} (\mathbf{t} \times \dot{\mathbf{t}}) d\tau + 2 \int_{\tau_0}^{\tau_v} (\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{t}}) d\tau - [\mathbf{m} \times \mathbf{t}]_{\tau_0}^{\tau_v} + \int_{\tau_0}^{\tau_v} (\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}) d\tau ;$$

felhasználva az $(\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{t}}) d\tau = \mathbf{m} \times d\mathbf{t} = m \cdot dn$ összefüggést :

$$e 2S_f = e \left[2S_t + 2 \int_{(g)} m dn + [m_0 n_0 - m_v n_v] + 2 \int_{(g)} \frac{1}{2} m^2 d\mu \right].$$

Tekintettel arra, hogy ezen egyenlet alapján csak olyan planiméterekkel foglalkozunk, amelyek mérőkarja állandó hosszúságú, alapegyenletünk az alábbi — végleges — formát ölti :

$$S_f = S_t + m \int_{(g)} dn + \frac{1}{2} (n_0 - n_v) m + \frac{m^2}{2} (\mu_v - \mu_0).$$

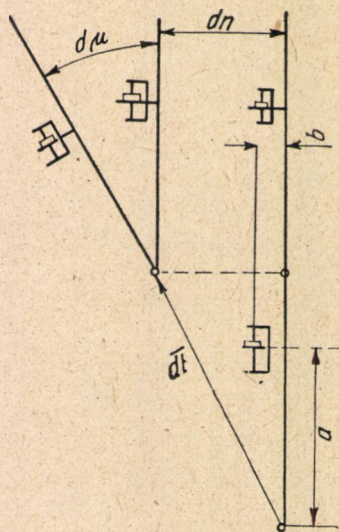
1. 3. A planiméterek mérőműszerei

Az alapegyenletben szereplő S_i értékét (általában) ismerjük, n_0 , n_v , μ_0 és μ_v értékét pedig — viszonylag egyszerű eszközökkel — szükség esetén mérni tudjuk. Mérőműszerre tehát az $\int dn$ integrál meghatározása céljából van szükségünk. A következőkben ezek felépítését és működését ismertetjük.

1. 3. 1. *Az integrálkerék.* Jól csapágyazott, megfelelő recézéssel ellátott, nonius-leolvasású kerék, amelyet tetszés szerinti irányban eltolva, a síkjába eső elmozdulásösszetevőt gördülve, a rá merőlegeset csúsztatva követi. Tengelye általában párhuzamos a mérőkarral — attól technikai okok következtében bizonyos távolságra csapágyazva. Felfekvési pontja egybeeshet — különleges planimétereknél — a tartóponttal, de általában attól különbözik. (Előbbi esetben közvetlenül a keresett $\int dn$ értéket méri a műszer, utóbbi esetben azonban — a mérőkar elfordulásával arányos taggal — bővül a mért érték).

A 2. ábrából látható, hogy a tartópont dt elmozdulásának az integrálkerék tengelyével (tehát a mérőkarral) párhuzamos komponense hatástalan — t. i. csak csúszást okoz. A merőleges, dn nagyságú komponens viszont tiszta gördülést létesít a

$$dn = 2\pi \rho d\gamma_1$$



2. ábra

egyenletnek megfelelően; itt ρ az integrálkerék sugarát, γ pedig a szögelfordulását jelzi.

A kerék síkja a tartóponttól a (merőleges) távolságra van; így a mérőkar $d\mu$ szögelfordulása következtében az

$$a \cdot d\mu = 2\pi \rho d\gamma_2$$

egyenletnek megfelelő $d\gamma_2$ szöggel fordul el az integrálkerék. A teljes szögelfordulás :

$$d\gamma = d\gamma_1 + d\gamma_2 = \frac{1}{2\pi\varrho} [dn + ad\mu].$$

(A mért érték tehát nem függ b -től).

Ha tehát a tartópont t_0 -ból t_v -be jut, az integrálkerék teljes szögelfordulása :

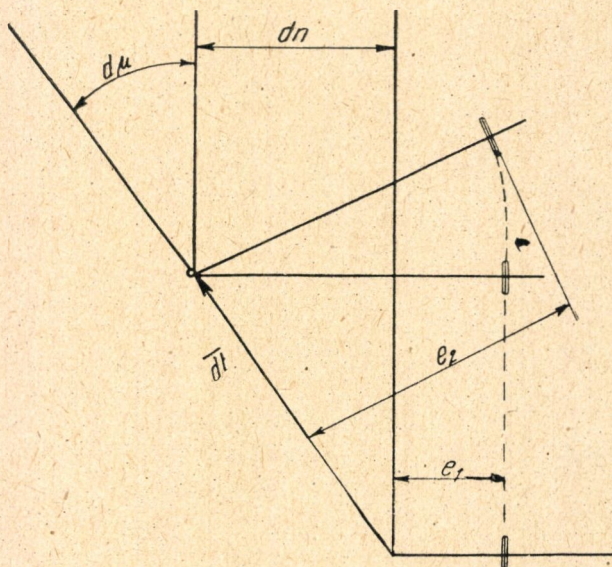
$$\gamma_v - \gamma_0 = \gamma = \frac{1}{2\pi\varrho} \left[\int_{(g)} dn + \int_{(g)} ad\mu \right] = \frac{1}{2\pi\varrho} \left[\int_{(g)} dn + a(\mu_v - \mu_0) \right].$$

Ezt az általános egyenletben az $\int_{(g)} dn$ integrál kiküszöbölésére használjuk fel :

$$S_f = S_t + \left(\frac{m^2}{2} - ma \right) (\mu_v - \mu_0) + \frac{1}{2} m(n_0 - n_v) + 2\pi\varrho\gamma m.$$

Alapegyenletünket ebben a formában használjuk fel az integrálkerékkel felszerelt planimétereknél.

1.3.2. *Az eltolható vágókerék* éles szélű tárcsa, amely saját síkja irányában gördülhet, de erre merőleges csúszásra képtelen. Csapágyazása viszont olyan, hogy az elmozdulás tárcsára merőleges összetevője a tengelyen eltolja a kereket. Az eltolás nagyságát a tengellyel párhuzamosan elhelyezett mércén olvashatjuk le. (L. a 3. ábra jelöléseit). A kerék tengelyét a tartópontban, a mérőkarra



3. ábra

merőlegesen szerelik fel. e_1 -el jelölve a τ_1 paraméterértékhez tartozó leolvasást, e_2 -vel a τ_2 -höz tartozót :

$$dn = e_2 - e_1, \quad \text{azaz :} \quad m \int_{\tau_0}^{\tau_1} dn = m(e_1 - e_0)$$

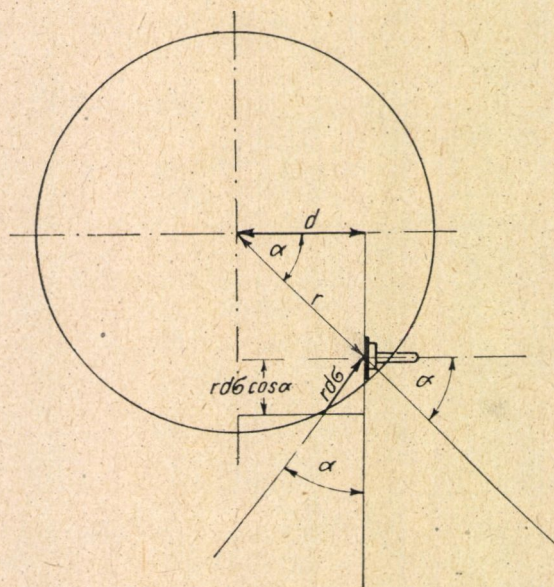
Ezt az alapegyenletben felhasználva :

$$S_f = S_t + \frac{m^2}{2} (\mu_v - \mu_0) + \frac{1}{2} m(n_0 - n_v) + m(e_v - e_0).$$

Vágókerékkel felszerelt planiméterek esetében az alapegyenlet itt megadott alakját használjuk.

1.3.3. *A késtárcsa* — ugyanúgy, mint a vágókerék — éles szélű (forgó) tárcsa, amely síkja irányában gördülhet ; az erre merőleges elmozdulást azonban megakadályozza, mert csapágyazása merev, nem csúsztatható. Ennek következtében a mérőkar csak önmagával párhuzamosan mozdulhat el (differenciális elmozdulásra gondolunk), azaz az alapegyenletben szereplő $\int dn$ tag azonosan 0. A késtárcsa tehát a tartópont elmozdulására vonatkozó kényszert jelent ; arra újabb kényszert már nem gyakorolhatunk. Így az alapegyenlet S_t -vel jelölt tagjának számítása jelenti a komoly nehézséget a késtárcsával felszerelt planimétereknél. Ezekre az u. n. »vágóplaniméterek«-re vagy »uszályplaniméterek«-re vonatkozóan az alapegyenlet az alábbi alakot ölti :

$$S_f = S_t + \frac{m^2}{2} (\mu_v - \mu_0) + \frac{1}{2} m(n_0 - n_v).$$



4. ábra

1. 3. 4. *A tárcsás kerék, vagy Gonella-kerék* lényegében — egy fix tengely körül forgó síktárcsán gördülő — integrálkerék. Az *integrálkerék szögelfordulását a tárcsa szögelfordulása és a kerék síkjának a tárcsa tengelyétől mért merőleges távolságának szorzata adja.* (L. 4. ábrát). r -rel jelölve az integrálkerék felfekvési pontjának a tárcsa tengelyétől mért távolságát, α -val az integrálkerék tengelye és a felfekvési pontot a tárcsa középpontjával összekötő egyenes által bezárt szöget, d -vel a kerék síkjának a tárcsa tengelyétől mért merőleges távolságát, végül $d\sigma$ -val a tárcsa (differenciális) szögelfordulását, a következő egyenlet adja az integrálkerék szögelfordulását :

$$2\pi r d\gamma = r \cdot \cos \alpha \cdot d\sigma = d \cdot d\sigma, \quad \text{mert } d = r \cos \alpha.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

1. 3. 5. Az integrálkerék, mint láttuk, csúszik és gördül egyszerre. A gördülésnek feltétele azonban bizonyos nagyságú súrlódóerő ébredése ; a mechanika szerint viszont a csúszásra merőleges irányban súrlódóerő nem ébredhet. Ez az oka annak, hogy — ha az integrálkerék tengelye kicsiny szöget zár be a tartópont elmozdulásának irányával — megbízhatatlanná válik a műszer. Ezen olyan gördülőelemek beiktatásával próbáltak segíteni, ahol dt -nek mindkét komponense gördülést létesít. A nagyszámú gömb, henger, tárcsa, félgömb stb. kombinációról nincs helyünk beszámolni, csak annyit kívánunk megjegyezni, hogy valamennyinek közös hibája : a megfelelő tapadást biztosító és ugyanakkor az elmozdulásokat megengedő csapágyazások bizonytalanok és rövid élettartamúak.

1. 4. *A planiméterek osztályozása*

A tartópontba mutató helyvektor, t által súrolt szektorszerű terület, S_t számításával kapcsolatban a következőképp osztályozzuk a planimétereket :

- a) Körpályán mozgó tartóponttal készülnek a *polárplaniméterek*.
- b) Egyenesen mozog a *lineár-planiméterek* tartópontja. Ezeknél S_t mindig zérus.
- c) Késtárcsával kényszerített — egyébként szabadon mozgó tartópontú konstrukciók a *vágó-planiméterek*.
- d) Csappal vezetett — általában görbevonalú — mérőkarral rendelkeznek a *radiál-planiméterek*.

Ezen felosztáson belül — a mérendő integrál és a futópont pályagörbéje közötti kapcsolatnak megfelelően — beszélünk *körüljáró, funkciós planiméterekről, integriméterekről és funkciós integriméterekről*.

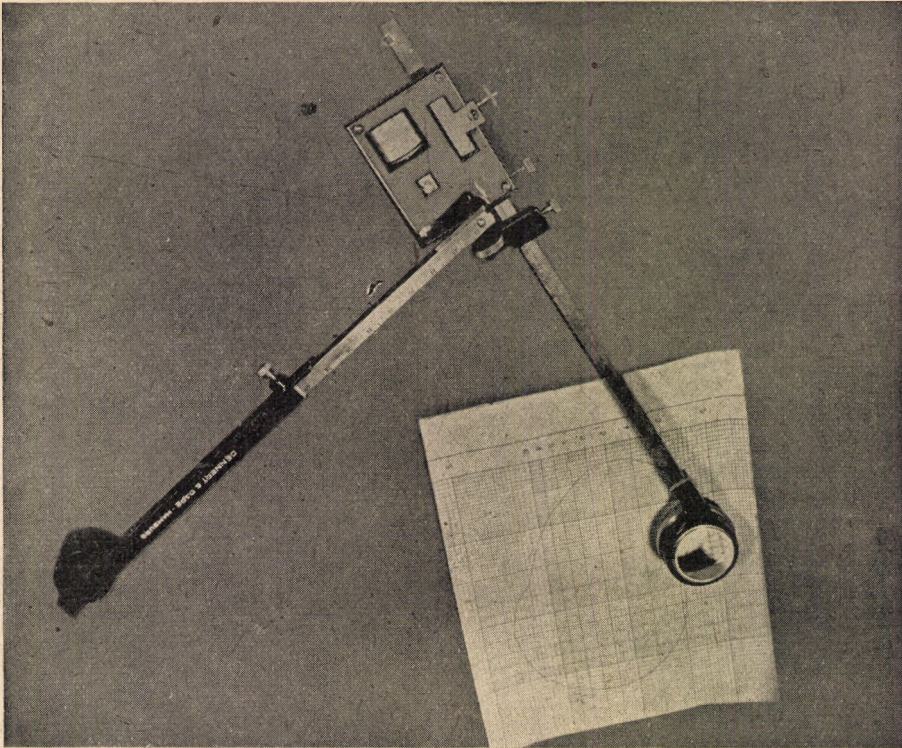
Az egyes típusok elvi kérdéseiről ezen felosztásnak megfelelően számolunk be ; a megismert kapcsolatokat konkrét műszertípusokkal illusztráljuk.

2. §. Részletes ismertetés

2. 1. *Polárplaniméterek*

Körpályán mozgó tartóponttal csak körüljáró planimétereket készítenek. A gyakorlatban a körüljáró típusok között viszont ezek a legelterjedtebbek, azért kezdtük ezzel a felsorolást. A követő és mérőkar ezeknél a műszereknél — és általában minden körüljáró planiméternél — azonos.

2. 1. 1. *Csuklós polár-planiméternél* a vezetett (tartó) pont körpályára kényszerítéséről a vezetőkar gondoskodik, amely fix pont körül elfordulhat. A vezetőkar gömbcsuklóban illeszkedik a követőkarhoz. A követő (futó) ponttal a mérendő területet, ill. — ha $\int_a^b y(x)dx$ -ről van szó — a határoló ordinátákat, az $y = y(x)$ görbét és az abszcisszatengely megfelelő szakaszát teljesen körüljárjuk.



I. fénykép

A planiméternél használt műszer lehet integrálkerék vagy vágókerék. A vezetőkar fix pontját pólusnak nevezzük; ez súlyos alapon elhelyezett tűtengely, amely körül a kar fog. A pólus lehet a területet határoló zárt görbe belsejében vagy azon kívül. Az alapegyenlet egyes tagjaira eszerint más-más értéket kapunk — függetlenül attól, hogy az alkalmazott műszer integrálkerék vagy vágókerék. Amennyiben ugyanis a pólus belül van, — teljesen körüljárva a határgörbét —

$$S_t = v^2\pi; \mu_2 - \mu_1 = 2\pi; n_2 = n_1.$$

(v jelenti a vezetőkar hosszát).

Ha viszont a pólus a határgörbén kívül van :

$$S_t = 0; \mu_2 = \mu_1; n_2 = n_1.$$

Négy egyenletet írunk fel ; az első pár esetében a pólus belül, a második párnál a pólus kívül van a határoló görbén. Mindkét párban az előálló egyenlet integrálkerék használata, a második egyenlet pedig vágókerék használata esetén érvényes :

$$S_f = v^2\pi + 2\pi \left(\frac{m^2}{2} - ma \right) + 2\pi\varrho\gamma m = \pi(v^2 + m^2 - 2ma) + 2\pi\varrho\gamma m = \\ = \pi y^2 + 2\pi\varrho\gamma m.$$

$$S_f = v^2\pi + m^2\pi + m(e_2 - e_1) = \pi(v^2 + m^2) + m(e_2 - e_1).$$

$$S_f = 2\pi\varrho\gamma m.$$

$$S_f = m(e_2 - e_1).$$

Meg kell jegyeznünk a következőket :

Az $y = \sqrt{v^2 + m^2 - 2ma}$ sugarú kört — amelyet a követőpont akkor ír le, ha a követőkart olyan helyzetben forgatjuk körül, hogy az integrálkerék síkja állandóan tartalmazza a pólust (ekkor u. i. $d\gamma = 0$) — alapkörnek hívjuk ;

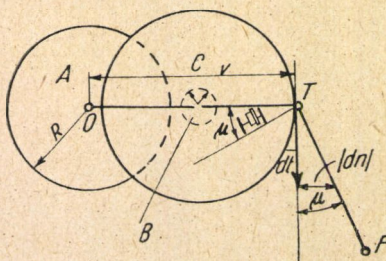
A mérési tapasztalatok szerint pontosabb a mérés, ha a pólus kívül van (a területet széttördelve vagy többszörösen összefüggővé alakítva mindig elérhetjük ezt a helyzetet) ;

A gyártott típusokon az integrálkerék sugara, a mérőkar hossza, ill. a vágókerék mércéjének beosztása olyan, hogy a leolvasott érték közvetlenül, négyzetcentiméterekben adja a mérendő terület mértékszámát. Néha azonban a mérőkar hossza változtatható, ilyenkor a beállításnak megfelelő faktort is figyelembe kell vennünk ;

Az alapkör sugarát, y -t a gyár négy tizedesjegy pontossággal megadja.

2. 1. 2. *A körgyűű ű-planiméter* elvileg nem különbözik a csuklós polárplanimétertől. Felépítése azonban eltér : A vezetett (tartó) pont körbenvezetésére köralakú sínrendszer szolgál. A követő (futó) pont olyan kiképzésű, hogy idomok (hengeres testek) körültaogatására alkalmas. A vonatkozó egyenletek természetesen ugyanazok, mint amelyeket a csuklós-polárplanimétereknél felírtunk ; a pólus azonban most szükségképpen belül van.

2. 1. 3. *Precíziós tárcsás-polárplaniméter*-t használunk nagyobb pontosság elérése céljából. Eltekintve ugyanis a legelemibb szubjektív hibáktól (a követőpont pontatlan irányítása stb.) az eddig ismertetett planimétereknél a leolvasás pontatlansága szabja meg nagyságrendben a hibát (különösen a noniusbeosztással sem rendelkező vágókerék használata, de még integrálkerék használata esetén is). A leolvasás pontosságának fokozásával csökkentjük a hibát precíziós tárcsás planiméter használata esetén. A műszer felépítésének alapja az *A*-val jelzett nagytömegű, rögzített fogaskerék ; ennek *O* középpontja a fix pólus. Ehhez kapcsolódik a *B*-jelű fogaskerék, amely a *C* tárcsával közös tengelyre van felékelve. A *B*-jelű fogaskerék és a *C* tárcsa működés közben a közös tengely körül együttesen elfordulhatnak, tengelyük pedig az *O* pólus körül körpályán elmozdulhat. (L. az 5. ábrát.) A mérőeszköz Gonella-kerék. Az ábrán látható, hogy az integrálkerék elhelyezése következtében a követőkár forgásának nincs gördülést okozó komponense (az integrálkerék síkja a *T* tartópontot tartalmazza, azaz $a = 0$). A planiméter-egyenlet egyes tagjai :



5. ábra

Ha a pólus a határoló görbe belsejében van (a határológörbét természetesen teljesen körülfutjuk a követőponttal)

$$S_t = v^2\pi; \quad n_2 = n_1 \quad \text{és} \quad \mu_2 - \mu_1 = 2\pi.$$

Ha viszont a pólus kívül van,

$$S_t = 0; \quad n_2 = n_1 \quad \text{és} \quad \mu_2 = \mu_1.$$

A fogaskerékáttétel következtében a tartópont dt differenciális elmozdulásához a C tárcsa $d\sigma$ szögelfordulása tartozik. Összefüggésük:

$$d\varphi = \frac{\pm |dt|}{v} \frac{R}{r}.$$

Az integrálkerék síkjának a tárcsa középpontjától mért távolsága:

$$[v - (R + r)] \sin \mu.$$

Így az integrálkerék szögelfordulását a következő egyenlettel jellemezhetjük

$$2\pi\varrho d\gamma = [v - (R + r)] \sin \mu d\sigma = \pm [v - (R + r)] \frac{R}{vr} \sin \mu \cdot |dt|.$$

A 4. ábra alapján azonnal belátjuk, hogy

$$\sin \mu \cdot \pm |dt| = dn \quad (dn \text{ előjeles távolságot jelent!})$$

Ezt felhasználva:

$$d\gamma = \frac{1}{2\pi\varrho} \frac{v - (R + r)}{v} \frac{R}{r} dn,$$

$$\gamma = \frac{1}{2\pi\varrho} \left[1 - \frac{R + r}{v} \right] \frac{R}{r} \int_{(g)} dn.$$

Alapegyenletünk tehát abban az esetben, ha a pólus belül van:

$$S_f = v^2\pi + m^2\pi + \frac{2\pi\varrho\gamma m}{1 - \frac{R + r}{v}} \frac{r}{R},$$

vagy a $v^2 + m^2 = y^2$ jelölést bevezetve :

$$S_f = \pi \left[y^2 + \frac{2\pi\rho\gamma m}{1 - \frac{R+r}{v}} \cdot \frac{r}{R} \right].$$

Ha viszont a pólus kívül van :

$$S_f = \frac{2\pi\rho\gamma m}{1 - \frac{R+r}{v}} \cdot \frac{r}{R}.$$

A formulákból látható, hogy γ mért értéke és ezzel a számított S_f pontossága nő az $\frac{R+r}{v}$ és az $\frac{r}{R}$ viszony csökkenésével. A leolvasás pontossága végeredményben

$$\frac{R}{r} \left(1 - \frac{R+r}{v} \right)$$

arányban nőtt a csuklós polár-planiméterhez viszonyítva.

2. 2. Lineárplaniméterek

Lineár-planiméterek esetében a vezetett (és a tartó) pont egyenesen mozog ; ezt az egyenest az abszcisszatengellyel párhuzamosan helyezzük el. Egyenesbenvezetésre vagy sínrendszer, vagy pedig súlyos, gördülés közben síkjukat tartó kerékpárok szolgálnak ; esetleg azonban a tartópont helyben marad és az $y = y(x)$ görbét mozgatják úgy, hogy az abszcisszatengely állandóan fedje a tartópontot.

Tekintettel arra, hogy a tartópont egyenesen mozog, teljes körüljárásnál $S_t = O$ (ha a fix egyenes maga az abszcisszatengely, akkor $S_t \equiv O$); emellett (teljes körüljárásnál)

$$\mu_2 = \mu_1 \quad \text{és} \quad n_2 = n_1.$$

általános egyenletünk tehát az

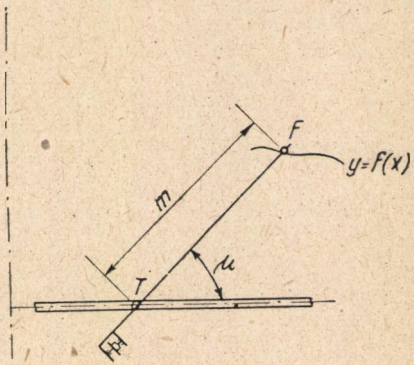
$$S_t = m \int_{(g)} dn$$

egyenletre redukálódik.

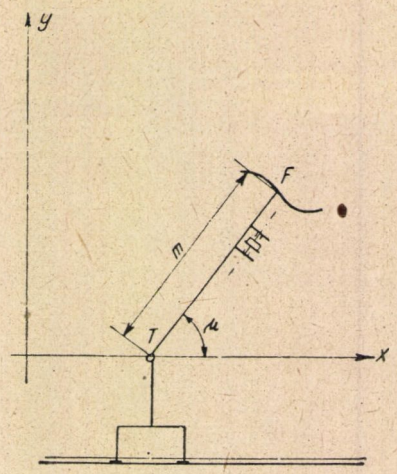
A következőkben külön tárgyaljuk a körüljáró planimétereket, a funkciós planimétereket, az integrimétereket és funkciós integrimétereket.

2.2.1 A körüljáró lineár-planimétereket egy-egy vázlat és néhány szó segítségével ismertetjük, hiszen a működési elv az eddig elmondottak alapján könnyen megérthető.

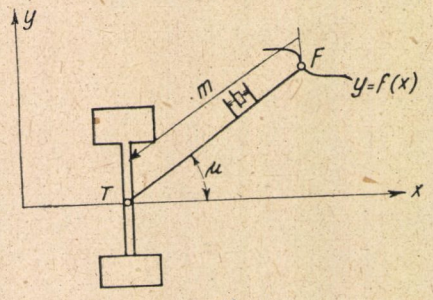
A 6. ábra a csapos sínvezetésű planimétert mutatja be. Ennél lényegesen könnyebben kezelhető a 7. ábrában bemutatott planiméter, mert itt a tartópont vezetésére egy kar szolgál, amely kerékpáron illeszkedik a sínhez ; a tartópont alatt görgő van.



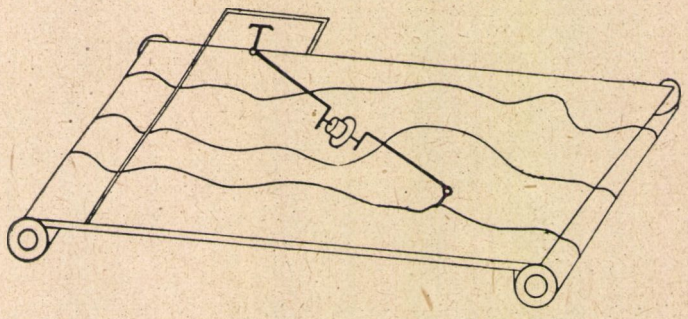
6. ábra



7. ábra



8. ábra



9. ábra

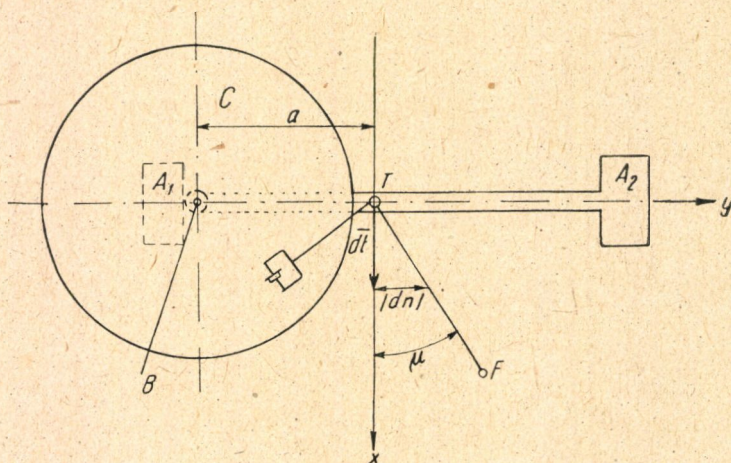
A 8. ábrán ismertetett planiméternél a tartópont egyenesbenvezetésére a súlyos, nagytömegű dobpar szolgál. A 6., 7. és 8. ábrán látható planiméterek csak a tartópont vezetésének módjában különböznek egymástól. A 9. ábrán viszont olyan planimétert mutatunk be, amelynél a tartópont helybenmarad, ehhez képest azonban az $y = y(x)$ görbét kell elmozgatnunk.

A 10. ábrán dobos vezetésű precíziós tárcsás lineár-planimétert ismertetünk. A mérés pontosságát itt ugyanazon elv alapján növeljük, mint a tárcsás polár-planiméter esetében. Az A—A dobpar itt nemcsak az egyenesbenvezetés feladatát látja el; az A_1 jelű dob ugyanis belső lapján fogazást hord: vagy homlokfogaskerékszerűen, vagy pedig kúposra csiszolva kúp fogaskerékszerűen. Ebben a fogazásban kapcsolódik a B jelű fogaskerék, amely a C tárcsával közös tengelyre van felékelve. Ezt a tengelyt — sem pedig a tengely csapágyazását a csapágyak tartószerkezetével — az ábrába nem rajzoltuk be.

A T tartópont dt elemi elmozdulásához az r sugarú, B jelzésű fogaskerék és a vele együtt felékelte C tárcsa

$$d\sigma = \mathbf{i} \cdot dt \cdot \frac{1}{r}.$$

nagyságú szögelfordulása tartozik. (A következőkben az x -tengely pozitív irányába mutató egységvektort mindig \mathbf{i} -vel, hasonlóképp az y -tengely irányába mutató egységvektort \mathbf{j} -vel jelöljük.)



10. ábra

Az integrálkerék síkja $a \sin \mu$ távolságra van a tárcsa középpontjától. Az integrálkerék elemi szögelfordulását tehát a

$$2\pi Q d\gamma = \frac{\mathbf{i} \cdot d\mathbf{t}}{r} a \sin \mu$$

egyenlettel jellemezhetjük. Mivel pedig

$$\mathbf{i} dt \sin \mu = dn$$

azért :

$$d\gamma = \frac{1}{2\pi\sigma} \frac{a}{r} dn.$$

Alapegyenletünk tehát az

$$S_f = m \frac{r}{a} 2\pi\sigma\gamma$$

alakot ölti. A leolvasás pontossága $\frac{a}{r}$ -szeresre nőtt az egyszerű körüljáró-típusú planiméterekhez viszonyítva.

2. 2. 2. *Funkciós lineár-planiméterek*

Feladatuk, hogy a grafikusan adott $y = y(x)$ egyenletű görbét (továbbá a két határolóordinátát és az abszcisszatengely megfelelő szakaszát) követve a követőponttal, az $\int_a^b f[y(x)] dx$, az $\int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) dx$ ill. legáltalánosabban az $\int_a^b f[x, y(x)] dx$ integrál értékét meg tudjuk határozni.

Ezeknél a planimétereknél már elvi jelentőségű különbség van a követő és a mérőkar között. Működési elvüket vázolva — eredeti megállapodásainknak megfelelően — m -el a mérő, l -lel a követőkar hosszát jelöljük, μ -vel, ill. κ -val pedig a megfelelő irányszögeket; a többi jelölést is megtartjuk. Továbbra is úgy választjuk meg a tartó és vezetett pont pályaegyenését — hacsak külön ki nem kötünk ettől eltérő feltételt — hogy az az abszcisszatengelybe esik.

A működés elvét elsősorban az $\int_a^b f[y(x)] dx$ integrál számítására alkalmas planiméterekre ismertetjük. Ennek alapján könnyen megértjük az ennél általánosabb $\int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) dx$ ill. $\int_a^b f[x, y(x)] dx$ integrálok számítására alkalmas készülékek működését is.

Az említett funkciós planimétereknél — megfelelő mechanikai kényszerek segítségével — gondoskodunk arról, hogy a futópont Y -al jelölt és a követőpont y -al jelölt ordinátája között az $Y = f[y]$ kapcsolat álljon fenn. Mivel pedig $Y = m \cdot \sin \mu$ és $y = l \cdot \sin \kappa$, azért az $Y = f[y]$ egyenletet

$$m \sin \mu = f[l \cdot \sin \kappa]$$

alakban írhatjuk. Utóbbi egyenlet a követőkar minden helyzetéhez a mérőkar meghatározott irányát rendeli (l t. i. állandó); az említett mechanikai eszközökkel éppen arról gondoskodunk, hogy a mérőkar irányszöge a fenti egyenletnek megfelelő μ szög legyen.

Megjegyzendő, hogy a futó- és a követőpont X , ill. x abszcisszái között semmiféle — levezetésünk szempontjából hasznosítható — kapcsolat nincs.*

A funkciós planiméterek legtöbbjénél gondoskodunk a tartó és a vezetett pont együttfutásáról — mechanikailag összekapcsolva őket. Ennek következtében fennáll a

$$t = v + ci$$

(c a két pont állandó távolságát jelöli), továbbá a

$$dt \equiv dv$$

egyenlőség.

Járjuk körül a követőponttal az $y(x)$ görbe, a szélső ordináták és az abszcisszatengely megfelelő szakasza által kijelölt zárt görbét. A körülfutást befejezve a követőkar és a mérőkar is eredeti helyzetébe kerül vissza, tehát $S_t \equiv 0$; $n_2 = n_1$; $\mu_2 = \mu_1$ és így

$$S_f = m \int_{(g)} dn.$$

Igazolni fogjuk, hogy

$$S_f = m \oint_{(g)} dn = \int_a^b f[y(x)] dx - (b-a) F,$$

ahol

$$F = f[0].$$

E célból térjünk egy pillanatra vissza a körüljáró-lineárpianiméterek elméletéhez. Láttuk ott, hogy az

$$S_f = \int_a^b y(x) dx (= l \oint dn = l \oint \sin \alpha \cdot i \cdot dv)$$

egyenlőség fennáll, annak ellenére, hogy

$$y(x) dx \neq l dn (= l \sin \alpha \cdot i \cdot dv). \quad **$$

Ezt megmagyarázandó, határozzuk meg a követőpont elemi elmozdulásának vízszintes (abszcisszatengellyel párhuzamos) vetülete és a vezetett pont elemi elmozdulása közti kapcsolatot! (L. a 11. ábrát.) A másodrendű kicsinyek elhanyagolásával adódik, hogy

$$dx = dv \cdot i + l \cos(\alpha + d\alpha) - l \cos \alpha \approx$$

* Képet alkotunk magunknak a futópont pályájáról, ha az

$$Y = Y(x) = f[y(x)]$$

görbét gumihártyára felrajzolva képzeljük; nyújtsuk meg a hártyát az abszcisszatengely irányában — különböző helyeken más-más arányban. Ezen transzformációt elvégezve kaphatjuk meg a futópont pályáját.

** Az eredeti levezetésekben mérőkarról volt szó, tehát l helyett m , α helyett μ , stb, szerepelt; ott szintén használhattunk volna fenti jelölést, mert körüljáró-pianimétereknél a követő és mérőkar azonosak. Itt lényeges fenti jelölésünk, hiszen az eredményeket funkciós planiméterrel akarjuk alkalmazni.

$$\begin{aligned} &\approx d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} + l [\cos \kappa + (-\sin \kappa) d\kappa] - l \cos \kappa = \\ &= d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} - l \sin \kappa d\kappa. \end{aligned}$$

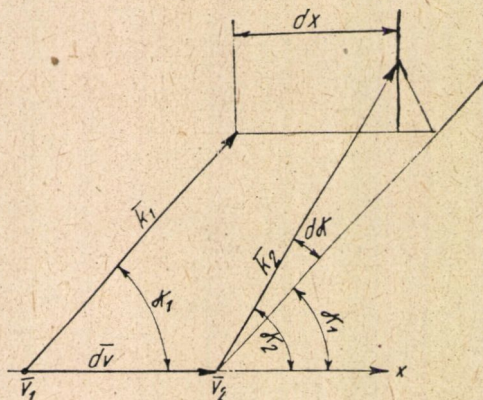
Ennek alapján :

$$y(x) \cdot dx = l \sin \kappa dx = l \sin \kappa \cdot d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} - l^2 \sin^2 \kappa d\kappa,$$

azaz valóban:

$$l dn = l \sin \kappa \cdot d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} \neq y dx.$$

Az integrálok egyenlősége viszont könnyen adódik, mert $\oint l^2 \sin^2 \kappa d\kappa = 0$.



11. ábra

Hasonló eredményre jutunk akkor is, ha az $y(x)$ függvény helyett valamely $f[y(x)]$ függvénnyel kapcsolatban végezzük el az előző vizsgálatot. Tegyük fel eközben, hogy létezik egy bizonyos m hosszúságú és μ irányszögű mérőkar ($m \sin \mu = f[y]$); ekkor tehát :

$$d\mathbf{t} \cdot \mathbf{i} \cdot \sin \mu = d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} \cdot \sin \mu = dn$$

(ha a $d\mathbf{t} = d\mathbf{v}$ feltétel teljesül!);

emellett legyen $f[0] = F$ és teljesüljön az a feltétel, hogy az $y = y(x)$ görbét, a két határoló-ordinátát és az abszcisszatengely megfelelő darabját körüljárva a követőponttal a mérő és követőkar is eredeti helyzetébe kerül vissza. Így

$$f[y] dx = f[y] (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} - l \sin \kappa d\kappa) = m \cdot \sin \mu (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} - l \sin \kappa d\kappa).$$

Tehát :

$$(m dn = m \sin \mu d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} =) f[y(x)] d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} \neq f[y(x)] dx$$

azaz

$$f[y(x)] dx \neq m dn,$$

$$\begin{aligned}
\text{viszont } \int_a^b f[y(x)] dx &= \int_a^b f[y(x)] dx + \int_b^a f[0] dx - (a-b) F = \\
&= \oint f[y] dx + (b-a) F = \\
&= \oint f[y] dv \cdot i - \oint f[y] l \sin \kappa dx + (b-a) F = \\
&= \oint m \cdot \sin \mu dv \cdot i + (b-a) F - \oint m \cdot l \sin \mu \sin \kappa dx = \\
&= \oint m \cdot dn + (b-a) F = \\
&= S_f + (b-a) F,
\end{aligned}$$

mert $m \cdot l \oint \sin \mu \cdot \sin \kappa dx = 0$. *

Eddigi kikötéseink értelmében funkciós planimétereknél a $dt = dv$ és $m \sin \mu = f[y] = f[l \sin \kappa]$ egyenlőségek fennállanak és a megfelelő zárt görbét körüljárva, a mérő és követőkar is eredeti helyzetébe kerül vissza.

Így tehát, előbbi levezetésünk alapján :

$$S_f = m \cdot 2\pi \rho \gamma = \int_a^b f[y(x)] dx - (b-a) F.$$

Épp ezt kellett azonban bizonyítanunk.

Az általánosabb $\int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) dx$ ill. $\int_a^b f[x, y(x)] dx$ integrálok számítására szolgáló funkciós planimétereknél — az eddig elmondottaknak megfelelően — az

$$Y = f[y] \cdot g(x) \quad \text{ill.} \quad Y = f[x, y(x)]$$

egyenletnek megfelelő kapcsolatot hozunk létre a követő és a futó pont ordinátája között. Ennek megfelelően kapjuk, hogy a mérőkar irányszöge az

$$m \sin \mu = f[y] \cdot g(x) \quad \text{ill.} \quad m \sin \mu = f[x, y(x)]$$

egyenletnek kell, hogy eleget tegyen. Emellett — itt is — gondoskodunk arról, hogy a tartó és a vezetett pont együtt fussanak, azaz a $dt = dv$ egyenlőség fennálljon. Ezek alapján pedig — a fenti levezetés gondolatmenetét szóról-szóra megismételve — ismét könnyen igazolhatjuk, hogy

$$S_f = \int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) dx - F \int_a^b g(x) dx$$

ill.

$$S_f = \int_a^b f[x, y(x)] dx - \int_a^b f[x, 0] dx.$$

* Ez csak akkor igaz, ha a követőkar planimetrálás közben nem fordul teljesen körbe, azaz $\kappa_v = \kappa_0$ és nem következik be, hogy pl. $\kappa_v = \kappa_0 + 2\pi$. Ezt azonban az $y(x)$ görbe pozitív és negatív ordinátájú szakaszainak külön-külön történő planimetrálásával könnyen elérjük.

Az eddig elmondottakat kissé még ki kell egészítenünk. Lehetséges ugyanis, hogy az $f[y]$ függvény előállítható ilyen alakban :

$$f[y] = f[l \cdot \sin \kappa] = A_1(l) \sin [a_1 \kappa + \alpha_1] + \dots + A_p(l) \sin [a_p \kappa + \alpha_p].$$

Akkor azonban

$$\int f[y] dx = \oint f[l \sin \kappa] i dv = \oint A_1(l) \sin [a_1 \kappa + \alpha_1] i dv + \dots \\ \dots + \oint A_p(l) \sin [a_p \kappa + \alpha_p] \cdot i dv.$$

Lehetőség van tehát olyan műszer alkalmazására, amely több mérőkart (és természetesen mindegyiken egy-egy mérőműszert) tartalmaz, amelyeket a következő adatokkal jellemezhetünk :

$$m_1 = A_1(l); \quad m_2 = A_2(l); \dots; \quad m_p = A_p(l) \\ \mu_1 = a_1 \kappa + \alpha_1; \quad \mu_2 = a_2 \kappa + \alpha_2; \dots; \quad \mu_p = a_p \kappa + \alpha_p.$$

Ilyen funkciós planiméternél az egyes műszerek által mért értékeket az

$$\int f[y(x)] dx = A_1(l) \oint \sin [a_1 \kappa + \alpha_1] i dv + \dots + A_p(l) \oint \sin [a_p \kappa + \alpha_p] i dv$$

egyenletnek megfelelően összesítve, kapjuk a keresett integrál értékét. Ennek az átalakításnak az az előnye, hogy az $m \sin \mu = f[l \sin \kappa]$ egyenlet által meghatározott $\mu = \mu(\kappa)$ függvényt mechanikai eszközökkel nagyon egyszerűen meg tudjuk valósítani, ha μ a κ -nak többszöröse, ill. ha $\mu = a\kappa + \alpha$.

Hasonló átalakításra az $\int_a^b f[y(x)] g(x) \cdot dx$ meghatározásával kapcsolatban is lehetőségünk nyílik, ahogy azt a 2.2.2.3. pontban látni fogjuk.

2.2.2.1. Funkciós planiméterek $\int dx, y^n$ alakú integrálok mérésére (momentum-planiméterek).

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor n pozitív egész szám. Ekkor $f[y] = y^n = l^n \cdot \sin^n \kappa$. Ez a függvény pedig, paritásának megfelelően, vagy $\sum_{k=n}^n c_k \sin k\kappa$ vagy pedig $\sum_k^{k=n} d_k \cos k\kappa$ alakú sorba fejthető. Több mérőkart használva, az egyes karokat a következő adatok jellemzik :

$$m_1 = l^n \cdot c_1; \dots; m_n = l^n c_n,$$

és

$$\mu_1 = (2 - \xi) \kappa; \quad \mu_2 = (4 - \xi) \kappa; \dots; \quad \mu_n = (n - \xi) \kappa,$$

vagypedig

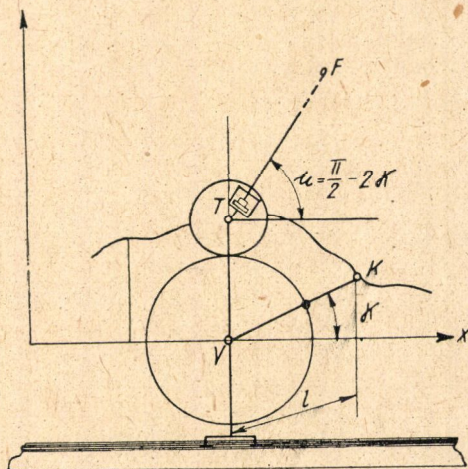
$$\mu_1 = \frac{\pi}{2} - (2 - \xi) \kappa; \quad \mu_2 = \frac{\pi}{2} - (4 - \xi) \kappa; \dots; \quad \mu_n = \frac{\pi}{2} - (n - \xi) \kappa.$$

ahol ξ az n paritásának megfelelően 0 vagy 1.

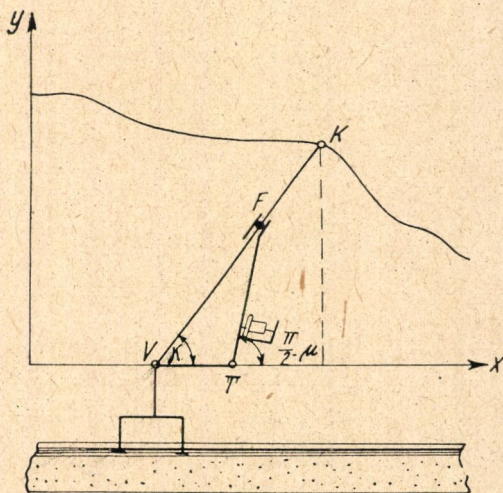
A κ szög egészszámu sokszorosait mechanikai eszközökkel igen egyszerűen elő tudjuk állítani; pl. megfelelő fogaskerékátvételekkel, vagypedig a kerületi és középponti szögek közötti egyszerű összefüggést felhasználva.

A viszonyok annyira egyszerűek, hogy a közölt vázlatokhoz részletes magyarázatot nem kell fűznünk.

A 12. és 13. ábrában pl. az $\int_a^b y^2 dx$ integrál számítására alkalmas két funkciós planimétert vázoltunk, azaz $n = 2$. Így :



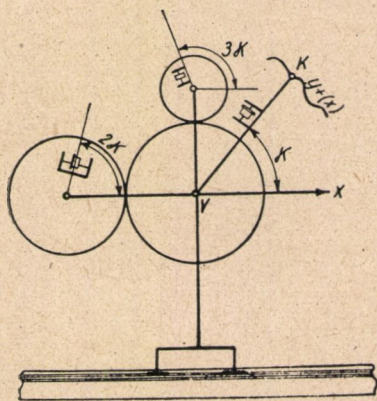
12. ábra



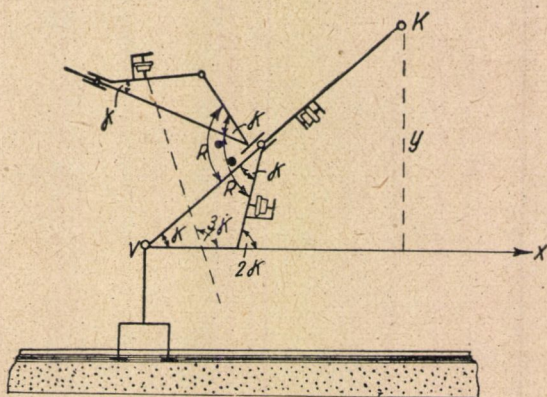
13. ábra

$$\int_a^b l^2 \sin^2 \kappa \, dx = \oint \frac{l^2(1 - \cos 2\kappa)}{2} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{t} = \oint \frac{l^2}{2} \mathbf{i} \, dv - \frac{l^2}{2} \oint \cos 2\kappa \mathbf{i} \, dv.$$

Tekintettel pedig arra, hogy $\oint \frac{l^2}{2} \mathbf{i} \, dv = 0$ és $f[0] = F = 0$, nyilván csak egy mérőkarra van szükségünk, amelynek irányszöge a követőkar-szög pót-szögének kétszerese. A szögkétszeresést a 12. ábrán azzal érjük el, hogy a fogáttétel 2 : 1, a 13. ábrán pedig azzal, hogy $\overline{VT} = \overline{TF}$, az F pont tehát olyan köríven mozog, melynek középpontja T és amely V -t is tartalmazza; ebből pedig már következik, hogy $TVF \sphericalangle = \frac{1}{2} xTF \sphericalangle$. Ami pedig κ pótösszegének előállítását illeti, a fogaskerékhajtás automatikusan létesíti ezt, a 13. ábrán bemutatott készüléknél viszont az integrálkerék tengelye — a szokásostól eltérően nem párhuzamos, hanem — merőleges a mérőkarra.



14. ábra



15. ábra

A 14. és 15. ábrán kombinált planimétereket mutatunk be, amelyek alkalmasak

$\int_a^b y(x) \, dx$; $\int_a^b y^2(x) \, dx$ és $\int_a^b y^3(x) \, dx$ egyszerre történő mérésére. $n = 1$ esetében

pl. egyszerűen a követőkarra szerelt planimétert kell leolvasni, $n = 2$ esetében

$$\int_a^b y^2 \, dx = -\frac{l^2}{2} \oint \cos 2\kappa \mathbf{i} \, dv, \quad n = 3 \text{ esetében pedig}$$

$$\int_a^b y^3(x) \, dx = \frac{3l^3}{4} \oint \sin \kappa \mathbf{i} \, dv - \frac{l^3}{4} \oint \sin 3\kappa \mathbf{i} \, dv.$$

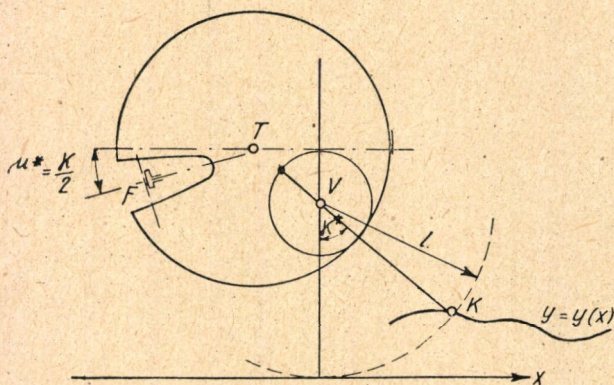
Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor $n = g + \frac{1}{2}$; g nemnegatív egész szám.

A vezetett pont pályájául ekkor az abszcisszatengely helyett az $y = l$ egyenest választjuk. Jelölje κ^* , ill. μ^* a követő, ill. mérőkar irányszögének pót-szögét ($\kappa^* = \frac{\pi}{2} - \kappa$; $\mu^* = \frac{\pi}{2} - \mu$). Ezeknél tehát $m \cos \mu^* = f[l - l \cos \kappa^*]$ alakban írhatjuk fel az $Y = f[y]$ kapcsolatot.

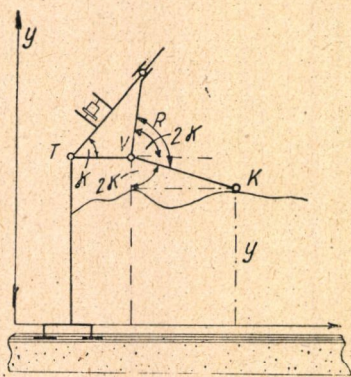
Tehát :

$$m \cdot \cos \mu^* = [l - l \cos \kappa^*]^{g+1/2} = \left[2l \sin^2 \frac{\kappa^*}{2} \right]^{g+1/2} = \\ = \left[\sqrt{2l} \sin \frac{\kappa^*}{2} \right]^{2g+1}.$$

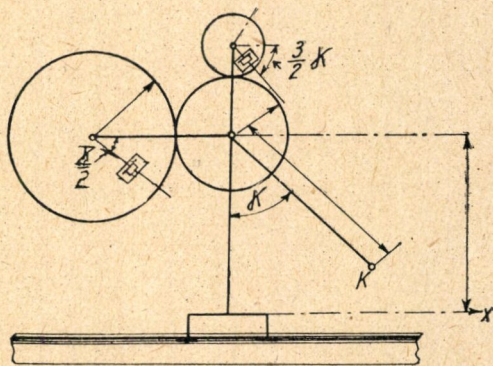
Eszerint több mérőkart használva, lényegében az előbb tárgyalt planiméterekhez hasonló gondolatmenettel és konstrukciók segítségével építhetjük fel a funkciós planimétereket, csak hogy jelen esetben $\frac{\kappa^*}{2}$ -nek többszöröseit kell előállítanunk. Az alábbi vázlatok részletesebb magyarázat nélkül is érthetőek :



16. ábra



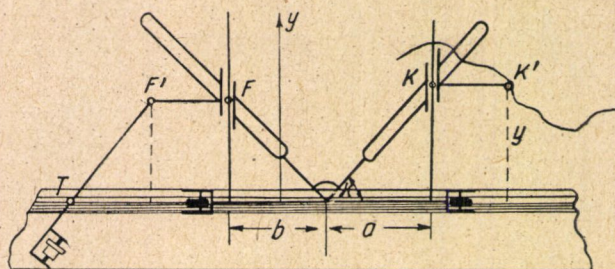
17. ábra



18. ábra

Az $\int_a^b \frac{1}{y(x)} dx$ integrál számítására olyan eszköz áll rendelkezésünkre, amelynek megértéséhez nincs szükségünk a funkciós planiméterekkel kapcsos-

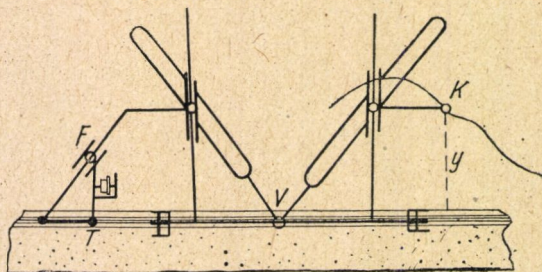
latban elmondottakra. Mechanikai úton el tudjuk érni ugyanis, hogy mialatt a követőpont az $y = y(x)$ görbén halad végig, a futópont az $Y(X) = \frac{d}{y(x)}$ görbevonalú pályát írja le (ahol $x = X + c$; c és d állandók). A 19. ábrán bemutatott egyszerű szerkezetet használjuk; az ábrából azonnal kiolvashatjuk, hogy $x = X + a + b$, azaz $c = a + b$, továbbá $\frac{y}{b} = \frac{a}{Y}$, azaz $d = a \cdot b$



19. ábra

(az is látható egyébként, hogy $dt \neq dv$. A fent elmondottakból következik, hogy erre most nincs is szükség).

$n = -g$ ill. $n = -g + \frac{1}{2}$ esetén (g pozitív egész) az eddig ismertetett szerkezetek megfelelő kombinációjával azonnal célhoz jutunk. Az elv ismét annyira kézenfekvő, hogy csak ábrát mutatunk be.



20. ábra

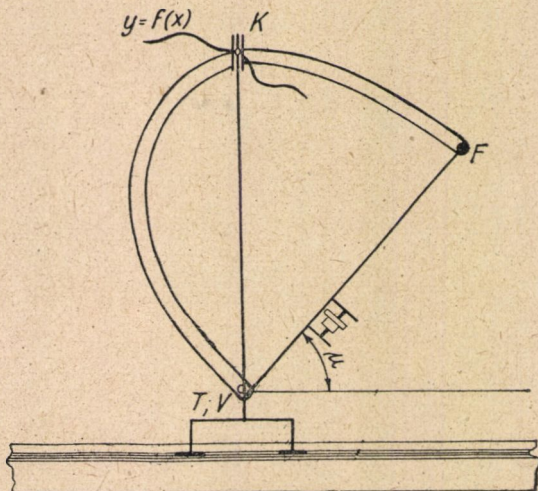
Tetszésszerűen kivéő esetében ugyanazokat a konstrukciókat használjuk, amit az általánosabb $\int_a^b f[y] dx$ alakú integrálok megállapításánál, így ezekre itt most nem térünk ki.

2.2.2.2.

Az $\int_a^b f[y(x)] dx$ alakú integrálok mérésére alkalmas planiméterek-

\overline{TV} távolságot. Utóbbi egyenesdarabhoz $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ szög alatt (a V pontból kiindulva) pedig az u távolságot. Így a vályúgörbe C_1 pontjába érünk. Megfelelő számú α szögérték felvételével tetszésszerűen sűrűsíthetjük a megszerkesztett C pontokat, ezeken át pedig a görbét megrajzoljuk.

A másik, Lorenz-féle konstrukció a 23. ábrán látható. A követő és egyben tartópontot a 23. ábrán T -vel jelöltük. A TK követőkar az x tengelyre merőleges; az abszcisszatengely irányában önmagával párhuzamos helyzetben maradván mozoghat el. A K követőpontban egy csappal felszerelt hüvely csúsztatható el a követőkar mentén. A csap az A vályúban csúszik. A vályúhoz az F pontban mereven van rögzítve az FT mérőkar, amely a T pont körül



23. ábra

fordulhat el. Figyelemreméltó, hogy a T tartópont ugyanarra az ordinátavonalra esik, mint a K követőpont. Ez annyit jelent, hogy ennél a konstrukciónál nemcsak a $dt = dv$, hanem a $dv \cdot i = dx$ egyenlet is fennáll. Erre egy későbbi pontban (2.2.3.) támaszkodni fogunk. Megjegyzendő még, hogy itt a követőkar nem forog ($\alpha \equiv \frac{\pi}{2}$), de nem is állandó hosszúságú.

A vályú kiképzése olyan, hogy az $Y = f[y]$, azaz az

$$m \cdot \sin \mu = f[y]$$

kapcsolatot biztosítja. Egyenletét egy, a mérőkarhoz rögzített R, Φ polárkoordinátarendszerben írjuk fel. T -t tekintve a koordinátarendszer kezdőpontjának, a K pontot pedig futópontnak, a 23. ábrából láthatjuk, hogy

$$\overline{KT} = y = R \text{ és } \mu = \frac{\pi}{2} - \Phi.$$

Ennek alapján :

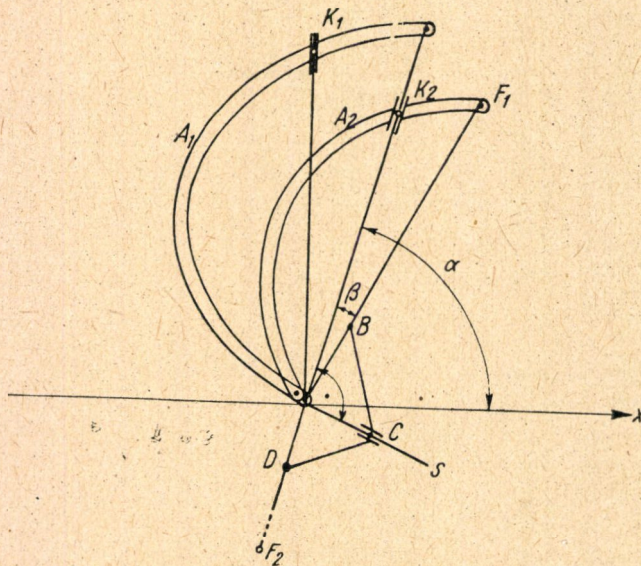
$$m \cdot \cos \Phi = f |R|$$

a vályúgörbe egyenlete.

2.2.2.3. Áttérünk olyan, még általánosabb funkciós planiméterek konstrukciós elképzelésének ismertetésére, amelyek az irodalomban még nem szerepeltek.

Az $\int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) \cdot dx$ alakú integrálok számítására a Lorenz-plani-

méter megfelelő átalakításával alkalmas műszert konstruálhatunk. A 24. ábrán láthatjuk a készülék vázlatát. Az eredeti (23.) ábra K -val jelölt pontja (most K_1 jelű) az adott $y = y(x)$ görbe követésére szolgál. A 23. ábra TF mérőkarja a 24. ábrán követőkar jellegű, K_2 -jelű (követő) pontjának távolsága T -től arányos T abszcisszájával : $x = X$ -szel. A K_2 -jelű pont egy a K_2T karon csúszó hüvely csapját jelzi, amely az A_2 -jelű második vályúban csúszik. A_2 -höz kapcsolódik most — merev kapcsolattal — az F_1 (futó) pontban az F_1T mérőkar, amely a T pontban csapágyazva van. A K_2T kar egy merőleges ST -jelű toldatot hord, közös forgáspontjuk a T tartópont. Ezen toldaton csúszik a C hüvely, amelyhez a BC - és a CD -jelű kar — mindkét kar C -ben és



24. ábra

B -s, ill. D -ben csuklósan — csatlakozik. A TDF_2 -jelű kar (második mérőkar) ugyanakkora szöget zár be a TC -karral, mint utóbbi a TB -vel. Ezt a

$$\overline{TB} = \overline{TD} \quad \text{és} \quad \overline{BC} = \overline{CD}$$

választás biztosítja.

mert a TF_1 mérőkar irányszöge épp μ_1 , a TF_2 -é pedig μ_2 . Ha tehát — a körüljárást befejezve — a TF_1 karon elhelyezett műszeren a γ_1 , a TF_2 karon elhelyezett műszeren pedig a γ_2 értéket olvassuk le, akkor

$$\begin{aligned} F \int_a^b g(x) dx + \int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) \cdot dx &= m \oint dn_1 - m \oint dn_2 = \\ &= m [2\pi\varrho\gamma_1 - 2\pi\varrho\gamma_2] = 2\pi m [\gamma_1 - \gamma_2] \end{aligned}$$

Az A_1 és A_2 vályúgörbék egyenletének meghatározása céljából a

$$Y = m \sin \mu = f[y] \cdot g(x)$$

egyenletből kiindulva :

$$\begin{aligned} \frac{f[y] \cdot g(x)}{m} = (\sin \mu =) \sin \mu_1 - \sin \mu_2 &= \sin(\alpha - \beta) - \sin[\pi + (\alpha + \beta)] = \\ &= \sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta, \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{f[y] \cdot g(x)}{m} = 2 \sin \alpha(y) \cdot \cos \beta(x).$$

Az A_1 - és A_2 -vályú polárkoordinátás egyenlete tehát :

$$f[R] = a \cdot \cos \Phi ; g(R) = b \cdot \sin \Phi ,$$

ahol a, b tetszőleges olyan számok, amelyekre $a \cdot b = 2m$.

Az $\int_a^b f[x, y(x)] dx$ alakú integrálok planimétrálására alkalmas funkciós planiméterek gondolatát csak felvetjük, mert a konstrukció igen nagy nehézségekbe ütközik. Ezek onnan származnak, hogy a mérőkar irányszögét már nem tudjuk síkbeli kényszerek segítségével megszabni, kénytelenek vagyunk térbeli kényszert alkalmazni. A 2.2.2. pont bevezetésében elmondtuk alapján ugyanis a futópont ordinátája a

$$Y = f[x, y] ; \text{ azaz az } m \sin \mu = f[x, y]$$

egyenletnek kell, hogy eleget tegyen. Ha az $f[x, y]$ függvény két egyváltozós függvény szorzatára bontható, az előbb ismertetett módosított Lorenz-planiméter alkalmas a planimétrálásra, ha viszont az $f[x, y]$ ennél általánosabb kétváltozós függvény, az $m \sin \mu = f[x, y]$ összefüggést általában nyilván csak 3 dimenzióban mozgó mechanikai elemekkel tudjuk megvalósítani. Ilyen szerkezetek tervezése elvileg nem jelent különösebb nehézséget, a gyakorlati megoldás viszont nyilván sok nehézséggel jár.

2.2.3. Lineár integriméterek és lineár funkciós integriméterek.

Céljuk, hogy az $\int_a^x y(x) dx$ ill. általánosabban az $\int_a^x f[x, y(x)] dx$ integrál

értékét az $y = y(x)$ görbe követésekor bármely $x = x$ felső határnál közvet-

lenül — tehát a határoló ordináták és abszcisszatengely-szakasz körülfutása nélkül — leolvashassuk. Ezt pedig igen egyszerűen elérhetjük, egyes eddig tárgyalt planiméterek kis módosításával. A 2.2.2. pont bevezetésében láttuk, hogy a határolóordinátákat és az abszcisszatengely megfelelő darabját azért kell általában befutnunk lineárlaniméterek használata esetén a követőponttal, mert a $dx = i dt$, ill. $dx = i dv$ egyenlőséget nem biztosítottuk. Ennek biztosítása után azonban elég a követőponttal az $y = y(x)$ görbe $x = a$ és $x = x$ abszcisszájú pontjai közötti szakaszát befutnunk. A $dx = i dt$ egyenlőséget pedig legegyszerűbben az biztosítja, hogy a követő és a tartó pont abszcisszája egymással megegyezik.

Integrálkeréket használva mérőeszközként biztosítanunk kell azt is, hogy a kerék síkja tartalmazza a vezetett pontot; egyébként ugyanis a mérőkar irányszögét is minden leolvasásnál figyelemmel kellene kísérnünk.

(Ugyanis
$$2\pi \rho \gamma = \int_{(g)} dn + a \cdot [\mu_2 - \mu_1].$$
)

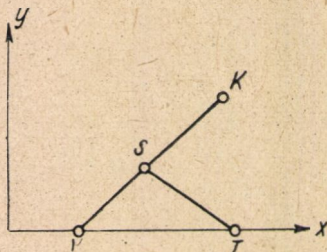
Integrimétereknél ezért az integrálkerék megfelelő elhelyezésével az $a = 0$ feltételt is biztosítjuk. (L. 1.3.1.)

Első (fontosabb és nehezebben teljesíthető) $dx = i dt$ feltételünk pl. a Lorenz-planiméternél és ennek $\int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) dx$ alakú integrálok planimétrálására alkalmazott változatánál teljesül. Ezeket egyszersmind integriméterként is használhatjuk tehát, ha az integrálkerék elhelyezésével az $a = 0$ feltételt is biztosítjuk. Az $\int_a^x y dx$ számítására szolgáló ú. n. alapintegrimétereknél pl. a vályúgörbe egyenlete :

$$R = m \cdot \cos \Phi$$

amely egy $\frac{m}{2}$ sugarú, a tartóponton átmenő kör egyenlete.

A Lorenz-planiméternek hibája, hogy az abszcisszatengelyre merőleges követőkart a követőpontban erővel támadva, az egyenesbenvezetésre szolgáló kerék-pár vagy csap-pár könnyen megszorulhat. Ezért a követőkart a 26/a ábrán látható szerkezettel pótolhatjuk. A V vezetett és T tartópontban csap vagy kerék kapcsolódik a sínbe, S -nél csukló van. Ezen szerkezetnél a $dx = i dv$



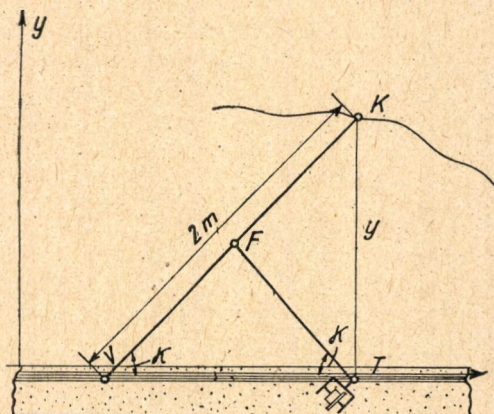
26/a. ábra

egyenlőség nem áll fenn (erre nincs is szükség) a $dx = i dt$ egyenlőséget viszont a

$$\overline{VS} = \overline{ST} = \overline{SK}$$

méretezéssel biztosítjuk.

A 26/b ábrán az ezen az elven alapuló alapintegríméért mutatjuk be. Itt az előbbieket alapján köralakú vályút kellene alkalmaznunk a Lorenz-planiméter használata esetén. Ha azonban a Lorenz-planiméter követőkarját a 26. ábrán látható szerkezettel pótoljuk, nincs szükség a vályúra. Az S csukló



26/b. ábra

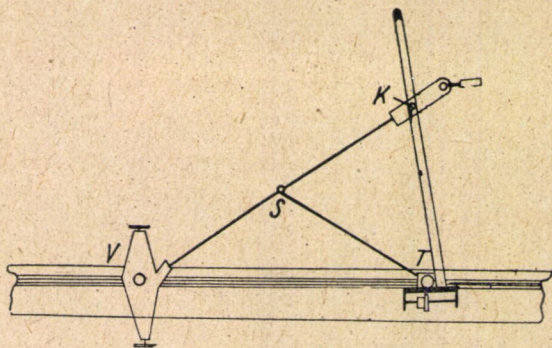
ugyanis futópontnak tekinthető ebben az esetben, mert így az $Y = \frac{y}{2}$ egyenlőség fennáll. Az ST kar ennek következtében mérőkar lehet; az integrálkereket az ábrán látható módon hozzáerősítve ST -hez ($a = 0$):

$$\begin{aligned} \int_a^x y dx &= \int_a^x l \sin \alpha i dt = 2m \int_a^x \sin(\pi - \mu) i dt = \\ &= 2m \int_a^x \sin \mu i dt = 2m \cdot 2\pi \rho \gamma = 4\pi \rho \gamma m. \end{aligned}$$

A 27. ábrán az $\int_a^x \frac{1}{y} dx$ alakú integrálok mérésére alkalmas funkciók lineárplanimétert mutatunk be. A vályú egyenlete

$$\frac{1}{R} = m \cdot \cos \Phi ;$$

az tehát a tengelyre merőleges, az origótól $\frac{1}{m}$ távolságra lévő egyenes.



27. ábra

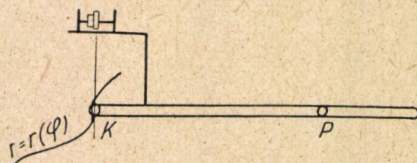
2.3. Radiálplaniméterek

Segítségükkel $\int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi} r(\varphi) d\varphi$ ill. $\int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi} \Phi[r(\varphi)] d\varphi$ alakú integrálokat tu-

dunk — a grafikusán adott $r = r(\varphi)$ görbét követve — meghatározni. Vályúszerűen kiképzett a követőkarjuk (amely egyszersmind mérőkar is), ennek egyik végpontja a görbe követésére használt követőpont, koordinátái: r és φ . A követőkar az origóban rögzített csapon csúszik és körülötte elfordulhat. (Az $\int r(\varphi) d\varphi$ integrálok mérésére alkalmas ú. n. alappaníméter tulajdonképp nem is planiméter, hiszen nem területdimenziójú mennyiséget mér. Ezért (1.2.) alapegyenletünk ezen a területen már nem használható.) Tárnyalni fogjuk az alap és funkciós radiálplanimétereket. Mindkettőt — esetleg kis módosítással — integriméterként is használjuk. A módosítást a megfelelő planiméterek tárgyalásánál ismertetjük. Valamennyi radiálplaniméter integrálkerékkel van felszerelve.

2.3.1. Az alapradiál-»planiméter«.

Az alapradiálplaniméter követőkarja vályúszerűen kiképzett egyenes; az integrálkerék tengelye párhuzamos a követőkaréval. (L. 28. ábra.) A követőpont a követőkar végén van. A követőpont elemi elmozdulása fel-



28. ábra

bontható radiális, dr nagyságú és erre mérőleges, $r d\varphi$ nagyságú összetevőre. Az integrálkerék az alapsíkra úgy fekszik fel, hogy a kerék síkja a követőpontot tartalmazza; az origótól (a csaptól) mért mérőleges távolsága eszerint: r .

Így tehát fennáll a következő egyenlőség (l. 1.3.4.):

$$2\pi \rho d\gamma = r d\varphi ;$$

a dr nagyságú elmozduláskomponensnek nincs hatásos összetevője. Ezért

$$\int d\gamma = \frac{1}{2\pi Q} \int r d\varphi,$$

azaz :

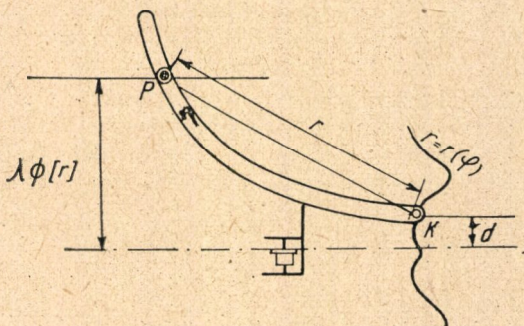
$$\gamma = \frac{1}{2\pi Q} \int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi} r d\varphi.$$

Ebből az egyenletből látható, hogy az alap-»planiméter« egyszersmind alap-integriméterként is használható.

2.3.2. Radiál funkciós-planiméterek

Feladatuk, hogy $\int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi} \Phi[r(\varphi)] d\varphi$ alakú integrálok értékét mérjük segítségükkel. Ez a dolgozat csak az általánosabb típussal foglalkozik, azaz azokkal a gépekkel, amelyek vályúszerű kiképzésű, csapon csúszó, görbevonalú követőkarral rendelkeznek; nem tesz említést azokról a konstrukciókról, amelyek — egészen speciális $\Phi[r]$ függvények esetében — a lineárlaniméternél megismert szögszorzóhoz hasonló elven alapulnak.

A 29. ábrán láthatjuk, hogy az említett általános típusnál, az integrálkerék mereven a követőkarhoz van rögzítve; a kerék síkjának merőleges távolságát a követőponttól d -vel jelöltük. Legtöbb konstrukciónál $d = 0$.



29. ábra

A követőkar olyan kiképzésű, hogy az integrálkerék síkjának az origótól mért távolsága :

$$\lambda \cdot \Phi[r]$$

(r, φ a követőpont koordinátái, λ a felépítés megszabta állandó).

A követőpont elemi elmozdulását [az $(r; \varphi)$ kezdőhelyzettől $(r + dr; \varphi + d\varphi)$ véghelyzetig] bontsuk fel egy radiális, dr nagyságú elmozdulásra és

egy, erre merőleges, $r d\varphi$ nagyságú forgásra. Utóbbi elmozdulás-komponens hatásaképpen az integrálkerék szögelfordulása :

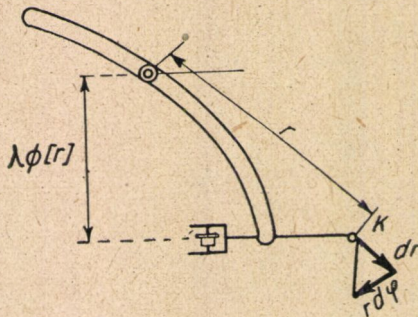
$$d\gamma_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varrho} \Phi[r] d\varphi$$

hiszen a kerék síkja a forgás középpontjától, az origótól $\lambda\Phi[r]$ távolságra van.

Tehát

$$\gamma_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varrho} \int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi} \Phi[r(\varphi)] d\varphi.$$

A 30. ábra alapján könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a radiális komponens hatása a φ szög értékétől független. (Forgassuk el a csap körül a követőkart; az integrálkerék vele fordul s az új helyzetben megtéve a dr nagyságú radiális elmozdulást, az integrálkerék szögelfordulása változatlan.) Az is látható, hogy r értékétől függ a kerék szögelfordulása, mert változó r -rel változik a komponens és a műszer tengelye által bezárt szög.



30. ábra

Világos tovább, hogy a szögelfordulás dr -rel egyenesen arányos (a másod rendű kicsinyeket nem tekintve); bizonyosan előállítható tehát, mint egy $f(r)$ függvény és a dr szorzata :

$$d\gamma_2 = \frac{1}{2\pi\varrho} f(r) dr$$

azaz

$$\gamma_2 = \frac{1}{2\pi\varrho} \int_{r=r_0}^r f(r) dr = F(r) - F(r_0)$$

$$\left[F(r) = \int_{r=0}^r \frac{f(r)}{2\pi\varrho} dr \right]$$

Maga az $F(r)$ függvény kísérletileg mérhető vagy számítással meghatározható.

Az eddigiek alapján az integrálkerék teljes szögelfordulása, mialatt a követőponttal az adott $r = r(\varphi)$ egyenletű görbén az $(r_0; \varphi_0)$ pontból az $(r_v; \varphi_v)$ pontba jutunk :

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1}{2\pi\varrho} \left[\lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi_v} \Phi[r(\varphi)] d\varphi + \int_{r_0}^{r_v} f(r) dr \right]$$

Amennyiben »planiméterként« akarjuk alkalmazni műszerünket, az adott (g) görbét kiegészítjük a radiális, az (r_v, φ_v) ponttól az (r_0, φ_0) pontig tartó (g_1) egyenesdarabbal. Így ugyanis az integrálkerék szögelfordulása :

$$\gamma = \frac{1}{2\pi\varrho} \left[\lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi_v} \Phi[r(\varphi)] d\varphi + \int_{r_0}^{r_v} f(r) dr + \int_{r_v}^{r_0} f(r) dr \right] = \frac{\lambda}{2\pi\varrho} \int_{\varphi_0}^{\varphi_v} \Phi[r(\varphi)] d\varphi ;$$

azaz a keresett integrál értékével arányos.

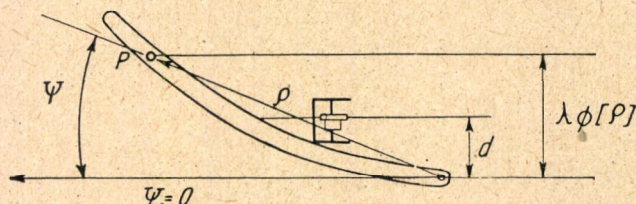
Ha viszont integriméterként akarjuk a műszert használni, fel kell azt szerelnünk egy további eszközzel (pl. egy fonalas nóniuszmércével), amelyről leolvashatjuk a követőpont r -koordinátáját. Rendelkeznünk kell ezenkívül a műszerhez »tartozó« $F(r)$ függvény grafikonjával. Ebben az esetben leolvassa a kezdőpontban az r_0 , egy tetszőszerinti pontban a γ és r értékét :

$$\gamma = \frac{\lambda}{2\pi\varrho} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \Phi[r(\varphi)] d\varphi + F(r) - F(r_0) ;$$

amiből

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \Phi[r(\varphi)] d\varphi = 2\pi\varrho \frac{\gamma - F(r) + F(r_0)}{\lambda} .$$

Ami mármost a követőkar alakját illeti, rögzítsük a leíráshoz szolgáló ϱ, ψ polárkoordinátarendszer kezdőpontját a követőpontban, a $\psi = 0$ egyenest pedig válasszuk úgy, hogy az parallel legyen az integrálkerék síkjával (l. 31. ábrán!). A (karon »végigfutó«) C csap koordinátáit ϱ - és ψ -vel jelöljük.



31. ábra

Mivel a C pont az integrálkerék síkjától $\lambda \Phi [\varrho]$, a K pont pedig d távolságban van, azért a C pont ordinátája :

$$\varrho \sin \psi = \lambda \Phi [\varrho] + d.$$

Ezzel rendelkezésünkre áll a következők egyenlete.

Meg kell említenünk, hogy f. nti elven felépíthetőek olyan funkciós radiál-»planiméterek« is, amelyek alkalmasak az $\int \Phi [r(\varphi)] d\varphi$ integrál számítására, abban az esetben, amikor az $r = r(\varphi)$ görbe általánosított polárkoordinátarendszerben van ábrázolva (pl. az $r = \text{const.}$ vonalak koncentrikus körök, de nem lineáris a paraméterezésük, a $\varphi = \text{const.}$ vonalak pedig origón átmenő, egymást megfelelő forgatással fedő görbék). Előbbi gondolatmenetünk változatlanul érvényes, csak a kar egyenletének felírásakor kell figyelembe vennünk a koordinátarendszer jellegzetességeit.

2.4. A Stieltjes-planiméterek

Feladatuk, hogy segítségükkel $\int_{H(a)}^{H(b)} y(x) \cdot dH(x)$ alakú Stieltjes-inte-

grálok értékét gépi úton mérhessük. Három típusa ismeretes. Az első típus gépei tulajdonképpen szorzat-planiméterek. Ha t. i. a $H(x)$ függvény véges-számú ($x_1; x_2; \dots; x_n$) hely kivételével differenciálható és a differenciáhányadost $h(x)$ -szel jelöljük, akkor a számítandó integrál

$$\int_{H(a)}^{H(b)} y(x) dH(x) = \int_a^{x_1} y(x) h(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} y(x) \cdot h(x) dx + \dots + \int_{x_n}^b y(x) \cdot h(x) dx.$$

alakban írható.

Mármost az első csoport gépei, a $h = h(x) = \frac{dH}{dx}$ görbe követése révén — mechanikus úton — előállítják az $y(x) \cdot h(x)$ szorzatot, melyet (legtöbb esetben Gonella-kerék segítségével) planimetrálunk.

A második csoportba tartozó gépek, a $H = H(x)$ görbe követése révén — mechanikus úton — az $y(x) \cdot dH(x)$ -szel arányos szorzat értékét állítják elő ívelemről-ívelemre egy integrálkerék tengelyén (legtöbb esetben itt is a Gonella-kereket használjuk).

Végül a harmadik csoportba tartozó gépeknél mechanikus eszközökkel úgy szabjuk meg a gép valamely mozgó pontjának pályáját, hogy az »lényegében« olyan görbét követ, amelynél bármely pont ordinátája $y(x)$ -szel, abszcisszája $H(x)$ -szel arányos. Ehhez a ponthoz planimétert kapcsolva — »lényegében« a keresett Stieltjes-integrál értékét mérhetjük.

A gépeken két követőpontot találunk; egyikkel az $y(x)$, másikkal a $H(x)$ (illetve a $h(x)$) görbét kell követnünk. Legtöbb konstrukciónál a két követőpont mechanikailag egymáshoz-kötött, azaz abszcisszáik csak együttesen változtathatók. Ennek komoly hátránya van : az $y(x)$ és $H(x)$ görbék felrajzolásánál szigorúan ügyelnünk kell arra, hogy az x -tengelyeken ugyanazt a léptéket használjuk.

2.4.1. Intézetünk egy *Nyström-féle Stieltjes-planiméterrel* rendelkezik, amely a harmadik típushoz tartozik. Ennél a két grafikon abszcisszatengelyén a léptékek — bizonyos határon belül — egymástól függetlenül állapíthatók meg. Mi itt csak ennek ismertetésével foglalkozunk.

Az ábrán K_1 -el jelöltük azt a követőpontot, amely az $y = y(x)$ görbén fut végi, K_2 -vel pedig a $H = H(x)$ -et követő pontot. Az S_1 szánkó a V_1 sínen elgördülhet, az S_2 szánkó pedig a sínhez és az S_1 szánkóhoz képest is változtathatja helyét. Mindkét szánkót vezeti azonban a sín, mindegyik csak a sínnel parallel mozoghat.

Az R pont körül fordulhat el a mereven derékszögű, a és b karokkal rendelkező emelő. Az F pont az S_3 szánon van, amelyet a V_2 sínrendszer vezet; utóbbi mereven az S_1 szánhoz van kötve.

A K_1 pont pályáját az x ; y , a K_2 pontot az x^* ; H , végül az F pontot a H^* ; y^* koordinátarendszerben vizsgáljuk.

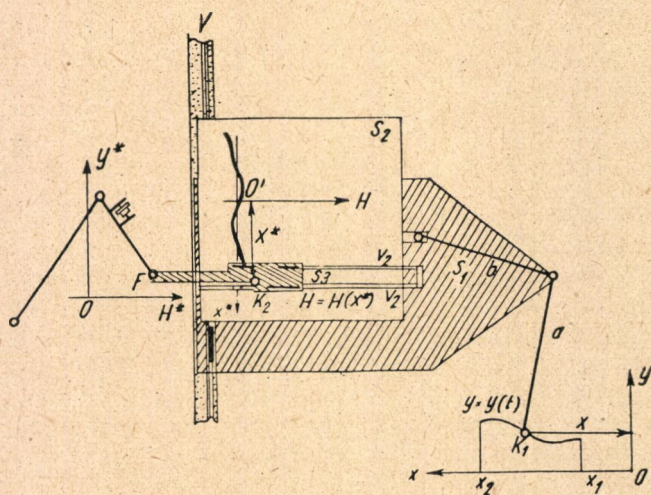
Mindhárom koordinátarendszer a V_1 sínhez rögzített. Az F pont szolgál a planiméter vezetésére.

Először az emelő rendeltetését vizsgáljuk meg. Az emelő biztosítja a K_1 pont x — és a K_2 pont x^* abszcisszájának egyenlőségét; ezenkívül a K_1 pont y ordinátájának megfelelően változtatja az F pont y^* ordinátáját.

Jelöljük az a kar irányyszögét α -val. Így az F pont y^* ordinátája :

$$y^* = y + a \sin \alpha + C$$

értékűnek adódik; C itt a készülék méreteitől függő állandó, amelyet az x



32. ábra

és a H^* tengelyek távolsága, továbbá az F és R pontok y koordinátáinak különbsége szab meg. α értéke csakis x -től függ, az $a \sin \alpha + C$ összeget tehát egy $s(x)$ függvénynek tekinthetjük.

Így :

$$y^* = y(x) + s(x).$$

Az F pont H^* koordinátáját a K_2 pont H koordinátája határozza meg egyértelműen :

$$H^* = H(x) + G_1,$$

amiből :

$$dH^* = dH.$$

Vigyünk most végig a K_1 pontot az x -tengelyen és kövessük K_2 -vel eközben az adott $H(x)$ görbét. Jelöljük eközben F ordinátáját y_0^* -al, akkor az előző egyenlet alapján :

$$y_0^* = 0 + s(x) = s(x)$$

Az $\int_{H(a)}^{H(b)} y dH$ integrált kiszámítandó, járjunk el a következőképp : állítsuk K_1 -et az $x = a$, $y = 0$ pontra, K_2 -t az $x^* = a$, $H = H(a)$ pontra. Fussuk be K_1 -el az $x = a$ ordinátavonal, az $y = y(x)$ görbe, az $x = b$ ordinátavonal és az x -tengely megfelelő darabja által meghatározott zárt utat. Az első és harmadik útszakaszon K_2 a V_2 sínhez képest helybenmarad, a második és negyedik útszakaszon pedig a $H = H(x)$ görbét követi. Így az F pont is zárt görbét ír le, amelynek területe :

$$\begin{aligned} T &= \oint y^* dH^* = \int_{H^*(a)}^{H^*(b)} (y^* - y_0^*) dH^* = \\ &= \int_{H(a)}^{H(b)} [y(x) + s(x) - s(x)] dH(x) = \int_{H(a)}^{H(b)} y dH ; \end{aligned}$$

az F ponthoz kapcsolt planiméter, tehát a keresett integrál értékét méri.

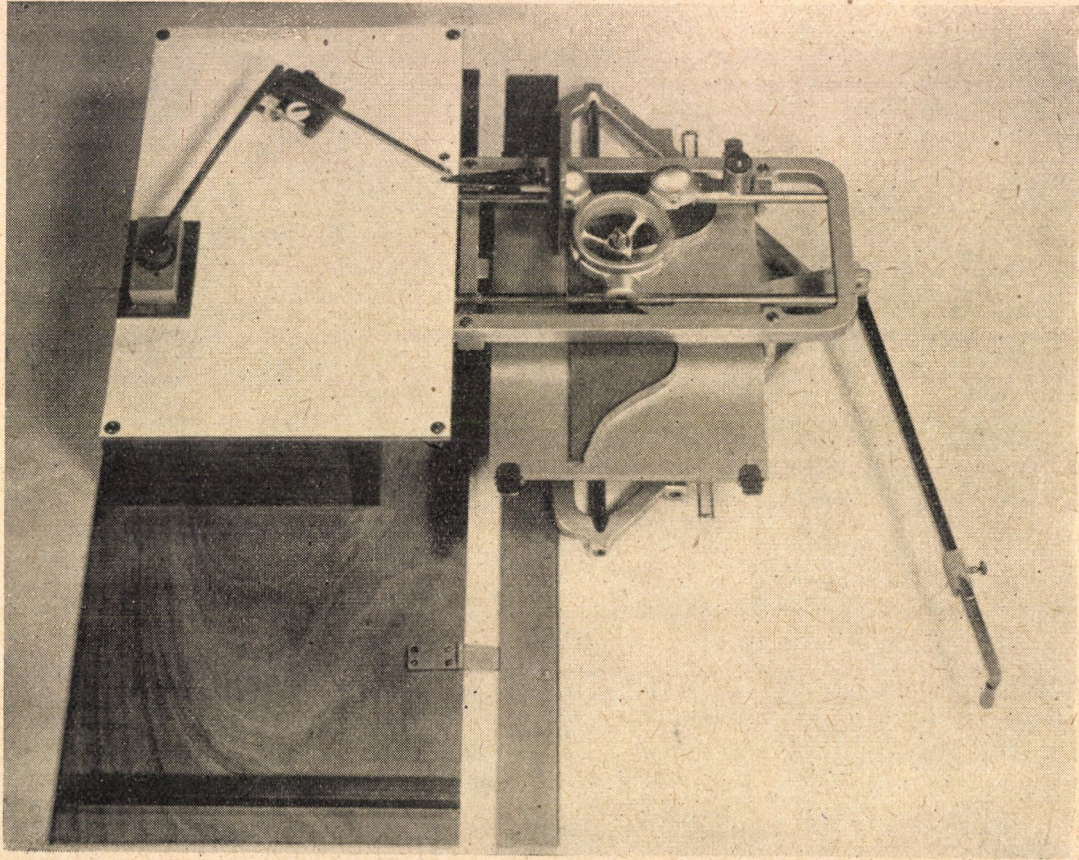
Gyakran szükségünk van arra, hogy a Stieltjes-planimétert integriméterként használjuk. Az első és második típus gépei — szinte kivétel nélkül — közvetlenül használhatók integriméterként is, a Nyström-planimétert azonban kissé módosítanunk kell. Egy kulissza beiktatásával elérjük, hogy F ordinátája

$$y^* = y(x) + C$$

legyen (azaz a kulisszát abból a célból használjuk, hogy F ne akkor legyen nyugalomban, ha K_1 köríven mozog, hanem amikor az abszcisszatengellyel párhuzamosan egyenesen fut be). Ha még planiméter helyett integrimétert kapcsolunk F -hez, teljesen megszüntettük a körüljárást kikényszerítő okokat.

2.4.2.

Megemlítjük, hogy mikor $\int_a^b f(x; \lambda, \mu) dx = \varphi(\lambda, \mu)$ alakú, határozott in-



II. fénykép

tégrállal definiált kétváltozós függvény értékét sok λ és μ esetre kell számítani és a függvény

$$\alpha(\lambda, \mu) \int_{H(\mu a)}^{H(\mu b)} y(\lambda x) dH(\lambda x); \text{ ill. } \beta(\lambda, \mu) \int_{H(\mu a)}^{H(\mu b)} y(x; \lambda) dH(\lambda x)$$

alakban írható, jól ki lehet használni a Nyström-planiméternek azt a tulajdonságát, hogy az x és x^* tengelyek léptéke egymástól független. (Intézetünk a legkülönbözőbb problémák kapcsán jutott a fentihez hasonló kétparaméteres integrálokra, amelyeket a kívánt alakok egyikére tudtunk mindig hozni.) A műszert használva ugyanis, *nem* kell minden λ, μ értékpárhoz egy-egy külön ábrát készíteni, hanem — ha az integrált fenti alakok közül az elsőnek megfelelően tudtuk alakítani — *csak* egyetlen egyhez; ha viszont a második alakról van szó, csak az egyes λ -értékekhez kell külön ábrát készítenünk. Az egyes értékpárokhoz tartozó függvényértékeket, az $\frac{a}{b}$ viszony megfelelő beállítása után, az értékpár meghatározta határok között planimetrálva kapjuk. Hiszen λ és μ értékének változtatása — változatlan grafikonok esetén — az abszcissza-tengelyek léptékviszonyának megváltozását jelenti s épp ezt vettük az $\frac{a}{b}$ érték és a határok megfelelő választása révén figyelembe.

2.4.3. Az Intézet Mader—Ott-típusú harmonikus analízátora az ismertett Nyström-planiméternek kissé módosított változata. Ezért — jóllehet a harmonikus analízátorok elméletét általánosságban nem ismertetjük e cikkben — a Mader—Ott típust vázlatosan bemutatjuk. A feladat: grafikusan adott, $2l$ periódusú $y = f(x)$ függvény Fourier-együtthatóinak, azaz az

$$\int_{x_0}^{x_0+2l} f(x) d \left[\cos n \frac{\pi}{l} x \right] \text{ ill. } \int_{x_0}^{x_0+2l} f(x) \cdot d \left[\sin n \frac{\pi}{l} x \right]$$

integrálokna a megállapítása. Erre a Nyström-planiméter közvetlenül alkalmas a

$$H(x) = \cos n \frac{\pi}{l} x \text{ ill. } H(x) = \sin n \frac{\pi}{l} x$$

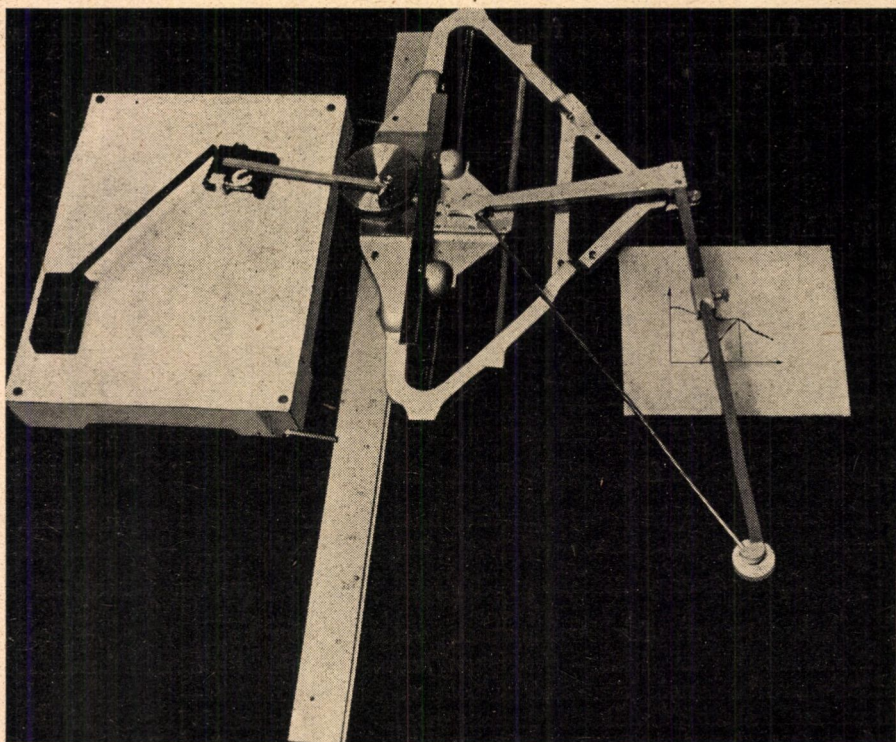
egyenletű görbék felhasználásával. A Mader—Ott-konstrukciónál utóbbi függvényeket nem grafikusán követjük, hanem — amint a mellékelt fénykép mutatja — fogasléc-fogaskerék rendszerrel közvetlenül mechanikai úton képezzük. Mindössze annyi az elvi különbség a Nyström-planiméterrel szemben, hogy most a fogaskerék F (egszersmind K_2) pontjainak y^* ordinátája:

$$y^* = y - a \sin \alpha + C + r \sin \beta$$

(itt r az F pontnak a fogaskerék 0 tengelyétől mért távolsága, β pedig az \overrightarrow{OF} -rádiusvektornak egy fix iránytól mért elfordulása).

Mivel azonban nemcsak α , hanem β is kizárólag a K_1 pont abszcisszájától függ, így itt is

$$y^* = y(x) + S_1(x);$$



III. fénykép

a zárt görbe x -tengelybe eső darabját befutva pedig

$$y_0^* = S_1(x).$$

[Jelöléseket illetően l. a 2.5.1.-et.]

Tehát a gép ugyanolyan elv szerint működik, mint a Nyström-planiméter.

A gyakorlatban r -et úgy választják meg, hogy az integrálkeréken leolvasott érték közvetlenül a megfelelő Fourier-koefficiens értékét adja mm-ben.

3. § A planiméterek pontosságáról.

A pontosság kérdését nem exakt matematikai módszerekkel tárgyaljuk, hanem csak megfigyeléseink statisztikáját közöljük; tapasztalataink szerint ugyanis a műszer »objektív« hibáit nagyságrendre messze felülműlják a kezelő által a görbe megrajzolásánál és követésénél elkövetett szubjektív hibák.

A következőkben a tapasztalat szerint átlagosan elkövetett hibák nagyságát — éspedig relatív hibaszázalékát — közöljük. Utóbbi azonban a kerület és terület arányával együtt nő, ill. csökken. A közölt adatok olyan idomok

planimétrálására vonatkoznak, amelyek területe a követőkar-hossz négyzeténél $1 \sim 2$ nagyságrenddel kisebbek.

Tapasztalataink és irodalmi adatok szerint gyakorlott kezelő a precíziós tárcsás planiméterrel — nagyon gondos kezelés mellett — cca. $0,3-0,6\%$ -os hibakorláttal, közönséges planiméterrel $0,6-1,0\%$ -os hibakorláttal, kevésbé gondos kezelés mellett $1-1,4\%$ -os hibakorláttal dolgozhat. A precíziós tárcsás planiméter használatánál az említett pontosság elérhető a karhossz négyzeténél mintegy három nagyságrenddel kisebb terület planimetrálásánál is. A Nyström-planiméter használatánál jól begyakorolt kezelőpár gondos munkánál $2,5-3,5$ százalékos (ha $H(x)$ grafikonján az irányszögek a cca. $\pm 70^\circ$ -ot nem haladják meg), kevésbé begyakorolt kezelőpár $4-7\%$ -os hibakorláttal dolgozik (ugyanolyan körülmények között). Ha azonban a $H(x)$ -görbét fémmodellből állítjuk elő, akkor egyetlen személy cca. $1,5-2,5\%$ -os hibakorláttal dolgozhat.

ПРИНЦИП ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТИПОВ ПЛАНИМЕТРОВ

(Аппараты Института Прикладной Математики АНВ.)

Т. ФРЕЙ

Резюме

Работа подробно познакомит с принципом функционирования и конструкцией полярных, линейных и радиальных планиметров, также планиметров Стильтеса. Систематически и подробно исследуется теория функциональных планиметров и интегриметров, подходящих для вычисления интегралов формы

$$\int_b^a f[y(x)] dx \quad \text{и} \quad \int_b^a f[y(x)] \cdot g(x) dx$$

Он дает тоже конкретное предложение для конструкции типов планиметра, пригодящихся для решения последней задачи: после исполнения соответствующих преобразований, планиметр Лоренца, применим для этой цели.

Статья познакомит с возможностью оказавшем практически полезным применения планиметра Стильтеса типа Нистрема при нумерической оценке определенных интегралов нескольких параметров.

LES PRINCIPES DE FONCTIONNEMENT DES DIVERSES SORTES DE PLANIMÈTRES

(Les machines de l'Institut de Mathématique Appliquée.)

T. FREY

Résumé

L'article donne une description détaillée du principe de fonctionnement et de la construction des planimètres polaires, linéaires et radiaux, ainsi que des planimètres de Stieltjes. Il discute systématiquement et d'une manière détaillée la théorie des planimètres fonctionnels et intégrimètres fonctionnels convenables pour évaluer les intégrales ayant les formes

$$\int_a^b f[y(x)] dx \quad \text{et} \quad \int_a^b f[y(x)] g(x) dx$$

il donne aussi une proposition concrète concernant la construction des planimètres servant à résoudre ce dernier problème. C'est le planimètre de Lorenz qui, après avoir été soumis à des transformations convenables, peut être employé à ce but.

L'article donne aussi la description d'une possibilité d'emploi qui s'est montrée utile en pratique du planimètre Stieltjes de Nyström dans l'évaluation numérique des intégrales définies à plusieurs paramètres.