

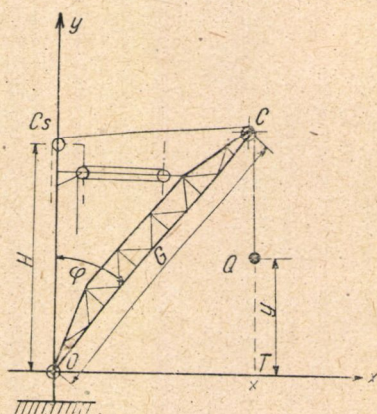
EGY PÁLYAPROBLÉMA DARUVAL TÖRTÉNŐ TEHEREMELÉSÉNÉL

BÉDA GYULA

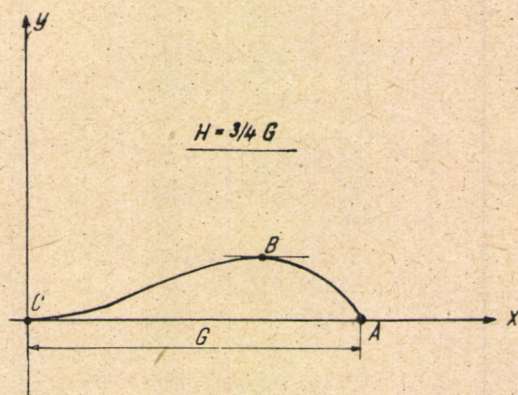
ÖSSZEFOGLALÁS

Az első ábra szerinti darumozgatásnál a teher útjának megállapítása és ezen a szélsőérték, inflexió, stb. helyek megkeresése a feladat. Az ábrák mutatják a különböző lehetséges pályaalakokat, melyek közül különösen a $G = H$ (a teherfelfüggesztőcsiga magassága = a gém hossza) görbe szinguláris alakja figyelemre méltó — továbbá mutatják a görbe megszerkesztésére illetve a szélsőérték hely meghatározására vonatkozó szerkesztési eljárásokat.

Az intézet miskolci csoportja az alábbi, emelőgéppel kapcsolatos feladatot oldotta meg, *Esztergályos Gusztáv*, a DIMÁVAG műszaki osztály vezetőjének megbízásából *Aczél János* irányításával. Az 1. ábrán vázolt emelő-



1. ábra

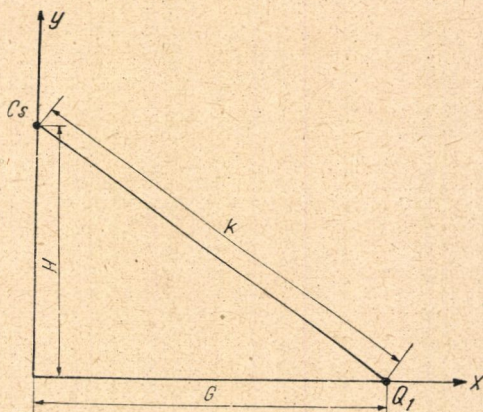


2. ábra

gépnél kellett meghatározni a pontszerűnek tekinthető teher pályáját, ha a gémet billentjük (az OC gém O körül forog, a terhet közben külön nem emeljük, a Cs csiga nem forog). A pálya alakjának ismerete a gém mozgatásához szükséges energia megállapításához szükséges. Ha ugyanis a pálya a 2. ábrán látható görbe, akkor, míg a teher A -ból B -be jut, a gém emelése mellett a terhet is emelni kell, viszont a \widehat{BC} szakaszon a gém emelését a süllyedő teher elősegíti.

Mi itt foglalkozni fogunk : 1. a görbe egyenletével, 2. a görbe alakjával (szélsőértékhelyeivel) az $OCs = H$ függesztesi magasság és az $OC = G$ gémhossz viszonyának különböző értékei mellett és 3. a szerkesztési eljárásokkal a görbe és maximumhelye megszerkesztésére.

1. A pályagörbe egyenletének felírásakor nem kellett figyelembe venni a teher tehetetlenségét, a kötel hossza pedig állandó és a 3. ábra szerint



3. ábra

$k = \sqrt{G^2 + H^2}$ -nek volt vehető; ahol $H = \overline{OC_s}$, G pedig a gém hossza (1. ábra).

Ha a függőleges (y tengely) és a gém szögét választjuk paraméternek, a görbe egyenlete (1. ábra)

$$x = \overline{OT} = G \sin \varphi$$

$$y = \overline{CT} - (k - \overline{C_sC}) = G \cos \varphi + \sqrt{G^2 + H^2 - 2GH \cos \varphi} - \sqrt{G^2 + H^2}$$

Ha φ -t kiküszöböljük, láthatjuk, hogy x és y között negyedfokú algebrai összefüggés áll fenn.

A görbe alakját rögzített G mellett a H szabja meg.

2. A görbe alakja, szélsőértékhelyei. A görbe tetőpontját keressük.

$$y' = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{H}{\sqrt{G^2 + H^2 - 2GH \cos \varphi}} - 1 \right)$$

Szélsőérték lehet, ahol

$$y' = 0,$$

tehát vagy

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,$$

azaz

$$\varphi = 0$$

vagy pedig

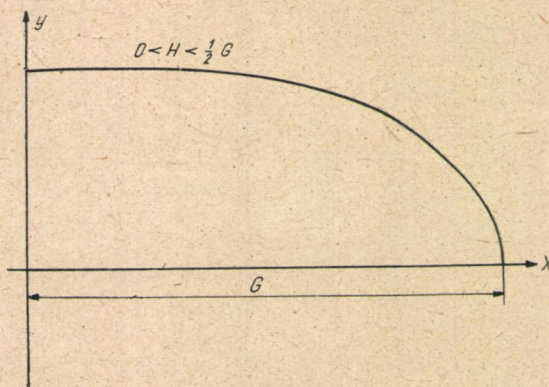
$$\frac{H}{\sqrt{G^2 + H^2 - 2GH \cos \varphi}} = 1,$$

azaz

$$\cos \varphi_m = \frac{G}{2H}.$$

Ez utóbbi csak akkor létezik, ha $H \geq \frac{G}{2}$.

a) $H \geq \frac{G}{2}$ esetén a görbének csak a $\varphi = 0$ ($x = 0$) helyen van szélsőértéke és pedig mivel $y''_{\varphi=0} < 0$, tehát maximuma (4. ábra). A $H = \frac{G}{2}$ esetén ez a maximum igen lapos és a görbe harmadrendben érintkezik a vízszintessel.

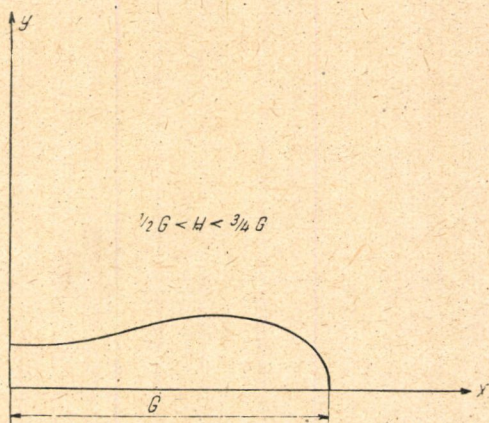


4. ábra

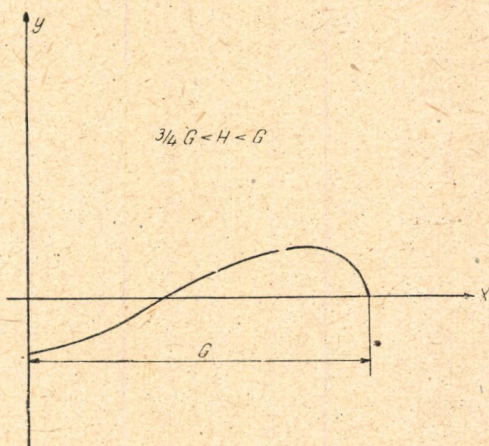
b) A $H > \frac{G}{2}$ esetén a görbének a $\varphi = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2G - H - \sqrt{G^2 + H^2}$ helyen minimuma van. Kivételes a $H = G$ eset, ahol e minimumhelyen nem vízszintes az érintő (lásd alább). A $\varphi_m = \arccos \frac{G}{2H}$

$$\left(x_m = \frac{G}{2H} \sqrt{4H^2 - G^2}, y_m = \frac{G^2}{2H} + H - \sqrt{G^2 + H^2} \right)$$

helyen viszont a görbének maximuma van.



5. ábra



6. ábra

A két szélsőérték hely között a görbének inflexiója van (5. ábra). Helyét az $y'' = 0$, $\cos \varphi$ -re nézve hatodfokú egyenletből kaphatjuk meg. Megközelítésére alkalmasak például a következő (iterációval nyert) képletek: felülről való közelítéshez

$$\cos \varphi_i \approx 1 - \frac{1}{2GH} (G - H)^{4/3} [H^{2/3} - (G - H)^{2/3}]$$

(mivel itt $G - H$ -nak $2/3$, ill. $4/3$ kitevős hatványa szerepel, az pozitív, akár $G > H$, akár $G < H$), vagy alulról való közelítéshez:

$$\cos \varphi_i \approx \frac{G^2 + H^2 - \left(H^3 - \frac{G^2 H}{2} + \frac{G^4}{8H} \right)^{2/3}}{2GH}$$

c) $H > \frac{3}{4}G$. A teher a kezdeti magasságánál alacsonyabbra is kerülhet. A görbe az x tengely alá is süllyed, ha $H > \frac{3}{4}G$. Ugyanis ekkor $(y)_{\varphi=0} = 2G - H - \sqrt{G^2 + H^2} < 0$. Ilyenkor a zérushelye a görbének a

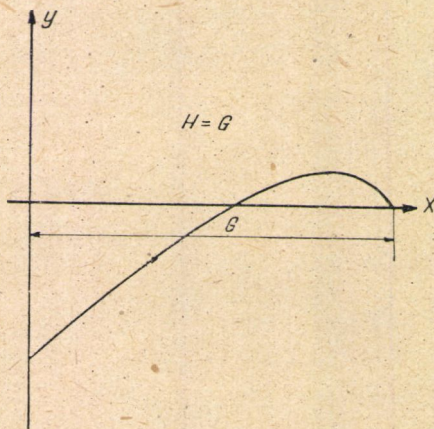
$$\cos \varphi_0 = 2 \frac{\sqrt{G^2 + H^2} - H}{G}$$

szögnek megfelelő $x = \sqrt{8H\sqrt{G^2 + H^2} - 3G^2 - 8H^2}$ érték.

d) $H = G$ esetén a φ_m maximumhely marad, a $\varphi = 0$ helyen is minimum van, ez utóbbi helyen azonban a görbének

$$y' = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi)}} - \operatorname{tg} \varphi \right) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} = 1$$

miatt 45° -os érintője van. (7. ábra.) Az összes többi görbének ezen a helyen



7. ábra

vízszintes érintője van. Az $(y')_{\varphi=0}$ mint H függvénye tehát csak ebben az esetben 1, minden más értéknél 0. Ez a görbe a feladat szempontjából azért is említésre méltó, mert a legmagasabb és legmélyebb pont közötti

$$\frac{G^2}{2H} + 2(H - G) \text{ ha } \frac{1}{2} < 4 \leq H \text{ ill. } \frac{G^2}{2H}, \text{ ha } H > G$$

magasságkülönbség itt a legnagyobb és $\frac{G}{2}$ -vel egyenlő.

e) $H > G$. Ha H tovább növekszik a görbék ismét laposodnak. Ugyanis

$$y_m = \frac{G^4}{(H + \sqrt{G^2 + H^2})^2} \quad \text{és} \quad |y_0| = \frac{G^2}{H + \sqrt{G^2 + H^2}} \quad \text{csökken,}$$

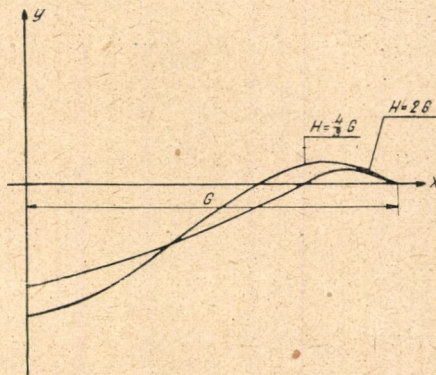
$$\begin{aligned} \lim_{H \rightarrow \infty} y &= \lim_{H \rightarrow \infty} (G \cos \varphi + \sqrt{G^2 + H^2 - 2GH \cos \varphi - \sqrt{G^2 + H^2}}) = \\ &= G \cos \varphi + \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{-2G \cos \varphi}{\sqrt{\frac{G^2}{H^2} + 1} - 2 \frac{G}{H} \cos \varphi + \sqrt{\frac{G^2}{H^2} + 1}} = 0 \end{aligned}$$

és $\lim_{H \rightarrow \infty} y' = 0$.

Ugyanekkor a maximumhely

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \varphi_m = \lim_{H \rightarrow \infty} \arccos \frac{G}{2H} = \frac{\pi}{2} \quad (\lim_{H \rightarrow \infty} x_m = G)$$

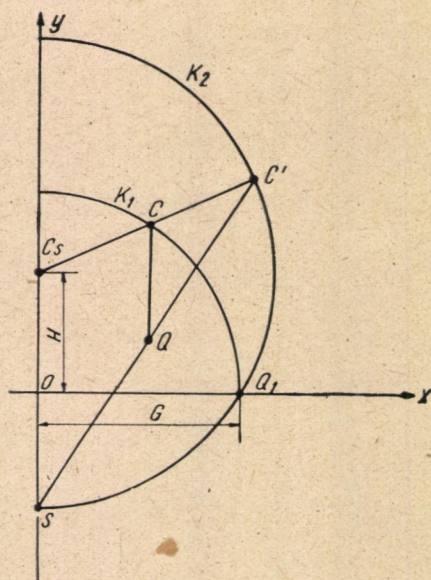
miatt az $x = G, y = 0$ hely felé tolódik el (8. ábra). Érdekes megjegyezni, hogy



8. ábra

negatív φ -kre a görbe az y tengelyre tükröződik, míg $\frac{\pi}{2}$ -nél nagyobb $|\varphi|$ -kre alulról konvex módon tér vissza a görbe az y tengelyhez, aholis $\varphi = \pi$ -nél a $(0, H - \sqrt{G^2 + H^2})$ minimumot veszi fel, mely $H \cong G$ esetén megegyezik a $\varphi = 0$ -nál felvett minimumponttal.

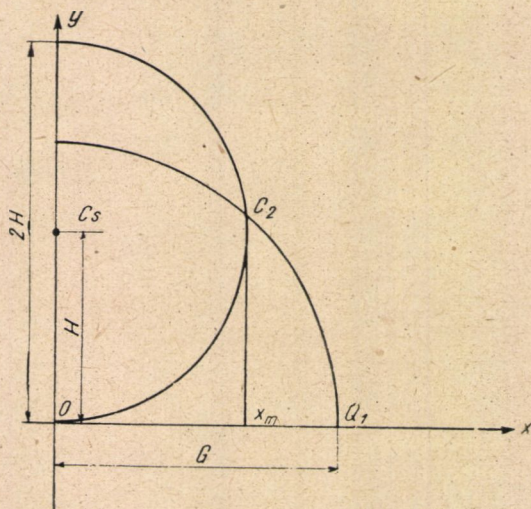
3. Szerkesztési eljárások. A görbét így szerkesztjük meg (9. ábra.): A C_s pontból a $C_s Q_1$ sugárral K_2 kört rajzolunk. Ez a függőleges egyenest (az y tengelyt) alul az S pontban metszi. A G sugarú K_1 körön felvett tetszőleges C futópontot a C_s -ből kivetítjük a K_2 -körre és a kapott C' pontot S -sel összekötve az a C -ből kiinduló függőlegeből kimetszi a görbének a C -hez tartozó keresett Q pontját.



9. ábra

Mivel azonban ez kis φ szögek esetén nem ad elég éles metszést, azért ilyenkor C -ből az innen húzott függőleges egyenesre a CC' távolságot körzővel visszamérjük és megkapjuk a keresett Q pontot.

A maximum helyének megszerkesztése a 10. ábrából leolvasható.



10. ábra

ПРОБЛЕМА ТРАЕКТОРИИ ПРИ ПОДЪЕМЕ ГРУЗА КРАНОМ

ДЬ. ВЕДА

Резюме

При движении крана по рис. 1, задача: определить путь груза и найти места инфлексий, экстремумов и т. д. на нём. Рисунки показывают различные возможные формы траектории, между которыми особенно отличается сингулярная форма кривой $G = H$ (груз высота подвесочного блока = длина укосины), кроме того методы конструкции для конструкции кривой и определения экстремума.

UN PROBLÈME DE TRAJECTOIRE DANS LE CAS DE SOULÈVEMENT DE CHARGE MOYENNANT UNE GRUE

J. VÉDA

Résumé

Le problème à résoudre est d'établir la voie parcourue par la charge dans le cas de mouvement de grue selon la fig. 1, et de trouver sur cette voie les valeurs extrêmes, les inflexions, etc. Les illustrations montrent les diverses formes de trajectoire possibles entre lesquelles c'est particulièrement la forme sigulière de la courbe $G = H$ (hauteur de la poulie de suspension de la charge est égale au longueur du levier de la grue) qui est digne d'attention, et montrent en outre les méthodes de construction de la courbe, respectivement de la détermination de l'endroit de valeur extrême.