# A GÖMBHÁROMSZÖGTAN LEGENDRE TÉTELÉNEK ÉRVÉNYESSÉGI KÖRE FÖLDI MÉRETEKNÉL

GÁTI JÓZSEF

*ÖSSZEFOGLALÁS*

A cikk a Legendre-tétel érvényességi körének megállapításával foglalkozik. Legendre tétele azt mondja ki, hogy az oldalak negyedik és annál magasabb hatványaitól eltekintve $\alpha-\alpha' \approx \frac{e}{3}$, $\beta-\beta' \approx \frac{e}{3}$, $\gamma-\gamma' \approx \frac{e}{2}$, ahol $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ egy gömbháromsszög szögeit jelentik radiánban mérve. A gömbháromszög oldalai $a$, $b$, $c$, és területe $t$, mely ha a gömb sugarát, a föld esetében a földgömb sugarát vesszük egységnek, a gömbháromszög $e$ gömbi feleslegével egyenlő, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ pedig az $a$, $b$, $c$, oldalakkal rajzolt síkháromszög szögeit, $t'$ a területet jelenti. Megállapítandó, legfeljebb mekkora lehet a háromszög legnagyobb oldala, hogy a Legendre-féle közelítés az $\varepsilon$ szögmérési hibánál kisebb hibát adjon. Ehhez a $H = \left|\frac{b^2+c^2-2a^2}{180}\right| t'$ kifejezés maximumát kellett megkeresni az $a \leqq d$ ; $b \leqq d$ ; $c \leqq d$ egyenlőtlenséget, mint mellékfeltételek mellett. Az eredményképpen kapott $\alpha(\varepsilon)$ függvényt a 2. ábra felső egyenese tünteti fel logaritmikus papíron. Ha a szögmérés 0,1'' pontosságú, úgy 7°-nál (780 km-nél) kisebb oldalhosszakra a Legendre-tétel alkalmazása a szögmérési hibánál kisebb eltérést ad.

Az Alkalmazott Matematikai Intézet Nagymiskolci Csoportja a következő problémát kapta : Megvizsgálandó, hogy 0,1'' szögmérési pontosság mellett meddig ad a geodéziában használt Legendre-tétel alkalmazása 0,1''-nél kisebb hibát.

A Legendre-tételnek számos bizonyítása közismert. (L. pl. [1].) Ez a dolgozat, mely *Aczél János* útmutatásával készült, az alkalmazási kör megállapításával foglalkozik.

Mindenekelőtt fogalmazzuk meg *Legendre* tételét :

Legyenek $a$, $b$, $c$ egy gömbháromszög oldalai, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (radiánban mérve) a szögei és $t$ a területe, mely ha a gömb sugarát (a föld esetében a földgömb sugarát) az egyszerűség kedvéért egységnek vesszük a gömbháromszög $e$ gömbi feleslegével egyenlő. Rajzoljunk az $a$, $b$, $c$ oldalakkal egy síkháromszöget, ennek szögei legyenek $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ (területe $t'$).

*Legendre tétele azt mondja ki, hogy az oldalak negyedik és annál magasabb hatványaitól eltekintve*

$$\alpha - \alpha' \approx \frac{e}{3}, \quad \beta - \beta' \approx \frac{e}{3}, \quad \gamma - \gamma' \approx \frac{e}{3}.$$

(Földi geodéziai méréseknél a háromszögek oldalai a föld sugarához képest kicsinyek.)

Az alkalmazási kör megállapítása azon a követelményen alapszik, hogy a közelítésnél elkövetett hiba legyen kisebb, mint a mérési pontatlanságból eredő hiba.

1. Először az alkalmazási kör alsó határát állapítjuk meg. Azt keressük, hogy legfeljebb mekkora $d$ oldalhosszig nem érdemes a Legendre-tételt alkalmazni, mert az egyszerű alsógeodéziai

$$\alpha \approx \alpha'$$

közelítés is elegendő pontos. Ennél az elhanyagolás a Legendre-tétel értelmében közelítően $H = \frac{t'}{3}$-mal egyenlő. Meg kell keressük tehát a $H = \frac{t'}{3}$ hiba maximumát az $a \leqq d$, $b \leqq d$, $c \leqq d$ egyenlőtlenségek mellett. Ez is, a felső határ megállapítása is feltételes szélsőérték-számítási feladat, ahol mellékfeltételként nem egyenlet, hanem egyenlőtlenség szerepel.* Megoldása ebben az esetben igen egyszerű, mert az említett feltételnek elegettevő oldalakból összeállítható legnagyobb területű háromszög a $d$ oldalhosszú szabályos háromszög, melynek területe :

$$\frac{d^2}{4}\sqrt{3}.$$

A maximális hiba tehát

$$\frac{d^2}{12}\sqrt{3}$$

radián. Ennek kell $0{,}1''$-nél, tehát $0{,}1 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{3600}$ radiánnál kisebbnek lennie. Ha a $d$ távolságot fokokban mérjük ($d°$), akkor

$$d = d° \frac{\pi}{180}.$$

Tehát azt kívánjuk, hogy

$$\frac{d^{\circ 2}}{12}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \sqrt{3} < \frac{1}{36000} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$d° < \frac{6}{100\pi\sqrt{3}} = 0{,}105.$$

Vagyis $0{,}1''$-es pontosságot a Legendre-tétel alkalmazása nélkül is elérhetünk, ha az oldalak nagysága

$$d < 0{,}105° = 6'18''$$

* Tudomásunk szerint olyan szélsőértékfeladatokkal, ahol a mellékfeltétel egyenlőtlenség, az irodalomban csak *Lipka I.* egy cikke foglalkozik (Journal für reine u. angewandte Mathematik, 166, 1931.) Jelen esetben nem volt szükség az ő módszereire.

vagy km-ben

$$d < 11 \cdot 7 \text{ km}$$

(1″-es pontosságot pedig, ha $d < 0{,}332° = 19'5'' = 36{,}8$ km).

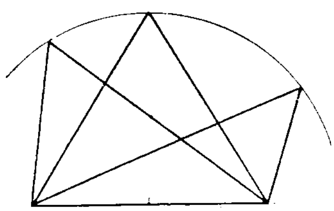
2. Az érvényességi kör felső határának megállapításához a pontosabb Gauss-féle közelítő képletből (lásd pl. [2]) kaphatjuk meg, mekkora hibát követünk el a Legendre-tétel alkalmazásánál:

$$\alpha - \alpha' \approx \frac{e}{3} + \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{180} e \approx \frac{e}{3} + \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{180} t'.$$

Tehát a Legendre-féle közelítésnél elkövetett hiba

$$H = \left| \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{180} \right| t'.$$

Meg kell néznünk legfeljebb mekkora lehet ez az eltérésérték ismét az $a \leq d$, $b \leq d$, $c \leq d$ egyenlőtlenségek fennállása mellett. A vizsgálatot nagymértékben leegyszerűsíti az a megállapítás, hogy maximum csak $b = c$ mellett, tehát egyenlőszárú háromszögnél lehet, ugyanis az $a$ és $b^2 + c^2$ értéket (és így velük $b^2 + c^2 - 2a^2$-et is) állandóan tartva, $b = c$ mellett, egyenlőszárú háromszögnél lesz a $t'$ területnek legnagyobb értéke (mivel az $a$ oldalt rögzítve az állandó $b^2 + c^2$ négyzetösszeget adó háromszögek $a$-val szemközti csúcsai egy körön fekszenek, melynek középpontja $a$ felezőpontja és — mint az az 1. ábrán látszik — mivel a terület állandó alap mellett annál nagyobb, minél nagyobb a magasság, a legnagyobb terület sugárnyi magasságnál, $b = c$ esetén, tehát egyenlőszárú háromszögnél áll elő).




*1. ábra*

A legnagyobb hibát tehát olyan egyenlőszárú háromszögnél kapjuk, amelynek valamelyik oldala egyenlő $d$-vel.

Ha ugyanis a háromszög legnagyobb oldala kisebb lenne $d$-nél, a háromszöget megnagyíthatjuk, míg a legnagyobb oldal éppen $d$ hosszúságot ér el és eközben a hiba a

$$H = \left| \frac{b^2 + c^2 - a^2}{180} \right| t'$$

képletnek megfelelően a nagyítás arányának negyedik hatványával nő, mert mindkét tényezője a nagyítás arányának négyzetével nő. A továbbiakban két esetet kell megkülönböztetnünk :

$$\text{a)}\quad a = d \text{ és } b = c < d$$

$$\text{b)}\quad b = c = d \text{ és } a < d.$$

A szélsőértékszámítást mindkét esetben több féle módon is elvégezhetjük. Választhatjuk a háromszög alakját jellemző változó mennyiségnek az $\alpha$ szöget, vagy az $m$ magasságot, vagy akár legkézenfekvőbben magukat az $a$, ill. $b = c$ oldalakat. Itt csak ezt az utóbbi meggondolást fogjuk ismertetni. Ehhez a $t'$ területet is az oldalak segítségével kell kifejezni

$$t' = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4}$$

a $H = \left|\frac{b^2 + c^2 - a^2}{180}\right| \cdot t'$ függvény helyett vizsgálhatjuk a $(360\,H)^2 = (b^2 - a^2)^2 \cdot a^2\,(4b^2 - a^2)$ függvényt is, amelynek ugyanakkor van legnagyobb értéke, mint $H$-nak; jelöljük ezt a függvényt $f(a, b)$-vel.

Az $a)$ esetben azt keressük, hogy konstans $a = d$ mellett milyen $b$ értéknél lesz $f(a, b)$ értéke legnagyobb, vagyis hol lesz $f$-nek $b$ szerinti differenciálhányadosa 0 :

$$2(b^2 - a^2)\, 2ba^2(4b^2 - a^2) + (b^2 - a^2)^2\, a^2 8b = 0$$

$$4b^2 - a^2 + 2(b^2 - a^2) = 0$$

$$6b^2 = 3a^2, \quad b = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Az $a = d$, $b = c = \frac{d}{\sqrt{2}}$ oldalú egyenlőszárú derékszögű háromszög területe

$$t' = \frac{b^2}{2} = \frac{d^2}{4}$$

és így a maximális hiba abban az esetben, mikor $a = d$, $b = c < d$

$$H = \left|\frac{\frac{d^2}{2} + \frac{d^2}{2} - 2d^2}{180}\right| \frac{d^2}{4} = \frac{d^4}{180}\; 0{,}25.$$

A $b)$ esetben pedig azt keressük, hogy konstans $b = d$ mellett milyen $a$ értéknél lesz $f(a, b)$-nek maximuma, hol lesz az $a$ szerinti derivált 0 :

$$2(b^2 - a^2)(-2a)(4a^2b^2 - a^4) + (b^2 - a^2)^2(8ab^2 - 4a^3) = 0$$

$$4a^2b^2 - a^4 = (b^2 - a^2)(2b^2 - a^2)$$

$$2a^4 - 7a^2b^2 + 2b^4 = 0 \quad a^2 = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 16}}{4}\, b^2 = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{4}\, b^2.$$

A pozitív előjel $b = d$-nél nagyobb $a$-t adna, tehát csak a negatív előjel jön tekintetbe

$$a^2 = \frac{7 - \sqrt{33}}{4} d^2 = 0{,}314\, d^2.$$

Tehát $b = c = d$, $a < d$ esetén a maximális eltérés:

$$H = \frac{2(d^2 - 0{,}314d^2)}{180} \frac{\sqrt{0{,}314}\, d\sqrt{4d^2 - 0{,}314d^2}}{4} =$$

$$= \frac{d^4}{180} \frac{0{,}686 \cdot 0{,}5604 \cdot 1{,}920}{2} = \frac{d^4}{180} 0{,}369.$$

Látható, hogy a két esetben kapott maximális eltérés között ez utóbbi a nagyobbik.

Követelményünk tehát az, hogy a $\frac{d^4}{180} 0{,}3690 = 0{,}00205\, d^4$ radiánnyi eltérés** legyen kisebb, mint $0{,}1'' = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{3600}$ $0{,}1$ radián. Ha pedig a $d$ távolságot fokokban mérjük ($d°$), akkor

$$d = d° \frac{\pi}{180}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^{\circ 4}\pi^4}{180^5} 0{,}369 < \frac{\pi}{180} \frac{1}{36000}$$

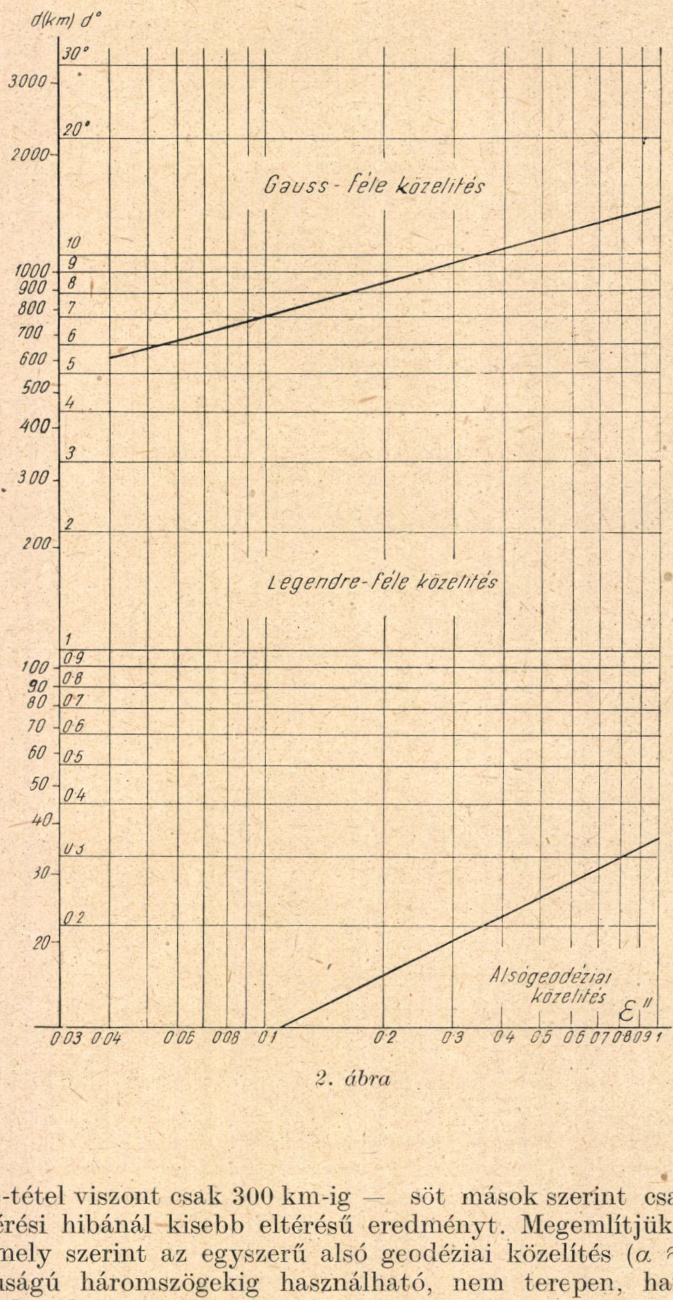
$$d^{\circ 4} < 180^4 \frac{1}{\pi^3 \cdot 0{,}369 \cdot 36000}$$

$$d° < 180 \sqrt[4]{\frac{1}{\pi^3\, 0{,}369 \cdot 36000}} = 7{,}1052° = 7°6'19'' = 788{,}7 \text{ km}.$$

(Ha $1''$-es pontossággal megelégszünk, elég ha, $d < 12{,}635° = 12°38' = 1402{,}5$ km).

Összefoglalva: *Ha szögmérésünk $0{,}1''$ pontosságú, akkor a Legendre-féle közelítéssel akkor érdemes számolni, ha háromszögünk legnagyobb oldala 11 km-nél (6 percnél) nagyobb és addig ad a mérési hibánál kisebb eltérésű eredményt, míg 790 km-nél (7°-nál) kisebb a legnagyobb oldal. Ha a szögmérés csak $1''$-re pontos, akkor 36 és 1400 km közötti (19 perc és 12° közti) oldalhosszú háromszögek alkotják a Legendre-tétel érvényességi körét.* (Szemben azzal az általában használt feltevéssel, mely szerint az alsó geodéziai módszerek 30 km-es oldalhosszig,

** Ez a becslés több mint tízszer pontosabb, mint a Mertens által talált $0{,}0212\, d^4$ eltérés-becslés (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20, 1875). — Jelen becsléssel egyező eredményre jut, valamivel kényelmetlenebb változóválasztással: Jordan, (Handbuch der Vermessungskunde 1916. III. 266. o.)




2. ábra

a Legendre-tétel viszont csak 300 km-ig — söt mások szerint csak 100 km-ig adna a mérési hibánál kisebb eltérésű eredményt. Megemlítjük, hogy az a számítás, mely szerint az egyszerű alsó geodéziai közelítés ($\alpha \approx \alpha'$) 30 km oldalhosszúságú háromszögekig használható, nem terepen, hanem stereografikus térképeken mért távolságokra vonatkozik.)

Végül a teljes áttekinthetőség kedvéért ábrázoltuk az alkalmazási kör alsó és felső határát a szögmérés pontosságának függvényében. A szögmérésnél elkövetett hibát $\varepsilon$-nal jelölve (másodpercekben mérve), az alsó határra azt kaptuk, hogy

$$\frac{d^{\circ 2}}{12}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \sqrt{3} > \frac{\varepsilon}{3600} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$d^{\circ 2} > \frac{12 \cdot 180}{\sqrt{3} \cdot \pi \cdot 3600} \cdot \varepsilon = 0{,}11 \cdot \varepsilon$$

$$d^{\circ} > \sqrt{0{,}11\,\varepsilon} = 0{,}332 \sqrt{\varepsilon}.$$

A felső határra pedig

$$d^{\circ} < 180 \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{\pi^3 \cdot 0{,}369 \cdot 3600}} = 12{,}6 \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

A Legendre tétel alkalmazási intervalluma

$$0{,}332 \sqrt{\varepsilon} < d^{\circ} < 12{,}6 \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Ennek határai $\varepsilon$-tól függnek.
Logaritmizálva :

$$\log 0{,}332 + \frac{1}{2} \log \varepsilon < \log d^{\circ} < \log 12{,}6 + \frac{1}{4} \log \varepsilon.$$

Logaritmikus papíron tehát a Legendre-tétel alkalmazási területét egyenesek határolják (2. ábra).

## IRODALOM


1. *N. Hauer:* Zur Geschichte des Satzes von Legendre, Zeitschrift für Vermessungswesen 77 (1938) 577—595, 641—653. o.
2. *E. Dörrie:* Ebene und sphärische Trigonometrie, 370. o.


# КРУГ СПРАВЕДЛИВОСТИ ТЕОРЕМЫ ЛЕЖАНДРА СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ ПРИ ЗЕМНЫХ МАСШТАБАХ


Й. ГАТИ


## Резюме


Работа занимается определением круга справедливости теоремы Лежандра. Теорема Лежандра высказывает, что несмотря на четвертую и высшие степени сторон :

$$\alpha - \alpha' \approx \frac{e}{3}, \quad \beta - \beta' \approx \frac{e}{3}, \quad \gamma - \gamma' \approx \frac{e}{3}$$

Здесь $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы сферического треугольника в радианах, $a$, $b$, $c$ — стороны сферического треугольника, $t$ его поверхность, которая ровна сферическим эксцессом $e$ сферического треугольника, если радиус сферы (в случае земли радиус земного шара) принимается единицей, — $\alpha', \beta', \gamma'$ — углы плоского треугольника со сторонами $a$, $b$, $c$ и $t$ его поверхность. Определяем максимальную величину наибольшей стороны треугольника, чтобы приближение Лежандра дало ошибку меньше, чем ошибка измерения углов $\varepsilon$. Для этого отыскался максимум выражения $H = \left|\frac{b^2 - c^2 - 2a^2}{180} \cdot t\right|$ при допол-

нительных условиях $a \leq d$, $b \leq d$, $c \leq d$. Результат — функция $d(\varepsilon)$, представляется верхней прямой рис. 2. на логарифмической бумаге. Например, если измерение угла обладается точностей 0,1″, то применение теоремы Лежандра дает для длин стороны меньше, чем 7⁰ (780 км) отклонение меньше, чем ошибка измерния угла.

## LA SPHÈRE DE VALIDITÉ DU THÉORÈME DE LEGENDRE DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE DANS LE CAS DE DIMENSIONS TERRESTRES

J. GÁTI

Résumé

L'article s'occupe de l'établissement de la sphère de validité du théorème de Legendre. Après le théorème de Legendre si l'on néglige la quatrième puissance et les puissances plus hautes que la quatrième des côtés-, on a $\alpha - \alpha' \approx \frac{e}{3}$, $\beta - \beta' \approx \frac{e}{3}$, $\gamma - \gamma' \approx \frac{e}{3}$.

Ici, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ signifient les angles d'un triangle sphérique, mesurés en radians, les côtés du triangle sphérique sont a, b, c, et son aire est $t$, lequel, si nous prenons le rayon de la sphère (dans le cas de la terre le rayon du globe), comme l'unité, est égal à l'excès sphérique $e$ du triangle sphérique, tandis que $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ signifient les angles du triangle plan dessiné avec les côtés a, b, c et t'signifie l'aire de ce triangle. Il faut établir la grandeur que le côté le plus grand du triangle ne doit pas dépasser pour assurer que la faute donnée par l'approximation de Legendre reste au-dessous de la faute de la mesure annulaire $\varepsilon$. Pour ce but il fallait trouver le maximum de l'expression

$$H = \left| \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{180} \right| t'$$

avec les inégalités $a \leqq d$; $b \leqq d$; $c \leqq d$; comme conditions subsidiaires. La fonction $\alpha(\varepsilon)$ obtenue comme résultat est représentée sur papier logarithmique par la ligne droite supérieure de la fig. 2. Par exemple si la mesure des angles est d'une exactitude de 0,1″, l'application du théorème de Legendre sur les longeurs de côté ne dépassant pas 7° (780 km) donnera une déviation plus petite que la faute de la mesure des angles.