# TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEGYENLETEK
## visszavezetése parciális differenciálegyenletek megoldására és alkalmazása a nomográfiában.

ACZÉL JÁNOS

*ÖSSZEFOGLALÁS*

E dolgozat néhány függvényegyenlet [(1), (2), (3)] differenciálegyenletekre való visszavezetéssel történő megoldásának tárgyalását adja. Ennek alkalmazásaként kapjuk azon differenciál-egyenletfeltételek különböző alakjait [(10), (9), (20), (24), (26), (27), (16)] amelyek a három egyenes skálás pontsoros nomogrammal ábrázolható függvényeket jellemzik.

1. A jelen cikkben több többváltozós függvényegyenletnek parciális differenciálegyenletekre való visszavezetésére és ennek nomográfiai alkalmazására vonatkozó kutatást szeretnék összefoglalóan ismertetni.

Ez a dolgozat egy régebbi dolgozatban* felvetett gondolatok folytatásának tekinthető, azonban attól függetlenül is megérthető. E kötetben való közzétételét a 11—14. pontokban található nomográfiai vonatkozású részek indokolják. Előadási módszeréről azt bocsátom előre, hogy igyekeztem mindig azt az utat megmutatni, ahogy az előadottakra rá lehetett jönni.

A következő függvényegyenletekkel fogunk foglalkozni** :

(1) $z[z(x, y), z(u, v)] = z[z(x, u), z(y, v)]$ (biszimmetria)

(2) $z[z(x, y), u] = z[x, z(y, u)]$ (asszociativitás)

(3) $z[z(x, y), u] = z(x, y + u)$ (tranzláció).

A megoldások, ahogy az elemi megoldási módszerek megadják és ahogy itt is a továbbiakban látni fogjuk, sorra :

(4) $z(x, y) = F^{-1}[aF(x) + bF(y) + c]$ (kvázilineáris)

(5) $z(x, y) = F^{-1}[F(x) + F(y)]$ (kváziaddició)

* Többváltozós függvényegyenletek I. Elemi megoldási módszerek többváltozós függvényegyenletekre, *Matematikai Lapok*. 2 (1951) 99—117, (a továbbiakban I).

** Ezeknek elemi megoldási módszereivel foglalkozik az I. dolgozat. Itt az egységes tárgyalás kedvéért valamelyest megváltoztattam az I.-ben használt jelöléseket.

$$(6) \qquad z(x, y) = F^{-1}\,[F(x) + y] \qquad \text{(kvázieltolás)}$$

ahol $F(t)$ tetszőleges függvény, melynek $F^{-1}(\tau)$ az inverze.

A függvényegyenletek elemi megoldási módszereinek elméletében a nehézség az, hogy minden egyes függvényegyenlet megoldásához új módszert kell találni. Ezek a módszerek bizonyos mértékig többé-kevésbbé hasonlítanak ugyan egymáshoz, de arról szó sem lehet, hogy egy megoldási módszert egyformán minden külön meggondolás nélkül, mechanikusan tudjunk alkalmazni több függvényegyenletre, amint azt például differenciálegyenletek integrálási módszereinél megszoktuk.

Másrészt a megoldás nehéz voltával szoros összefüggésben az eredmények is gyakran csak elvi jelentőségűek. Például ismeretes, hogy »annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a $z(x, y)$ függvényhez létezzék olyan folytonos, szigorúan monoton $F(t)$ függvény, mellyel $z(x, y) = F^{-1}\,[F(x) + F(y)]$, az, hogy $z(x, y)$ folytonos, növekvő és asszociatív legyen, mely utóbbi azt jelenti, hogy eleget tesz a (2) függvényegyenletnek«. Mármost, ha adva van konkrét $z$ függvény pl.

$$z = \frac{x + y}{1 - xy},$$

arról megállapíthatjuk, hogy (2)-nek eleget tesz — ez se megy mindig könnyen, itt se. Azonban az $F(t)$ függvényről, mely az összeadásba transzformálja át $z(x, y)$-t, még csak azt tudjuk, hogy »létezik«, de hogy hogyan kell kiszámítani, azt már nem. Van ugyan egy szukszesszív konstrukció $F^{-1}(\tau)$ ra, ebből azonban gyakran,— így a mi esetünkben is=nem lehet felismerni $F^{-1}(\tau)$ és vele $F(t)$ képletét. Később, a 14. pontban látni fogjuk, ez az $F(t)$ a fenti $z(x,y)$ függvény esetében elemi képlettel felírható függvény.

Differenciálegyenletek megoldására — mint tudjuk — sokkal több és kényelmesebb módszer áll rendelkezésünkre, mint függvényegyenleteknél, és ezért jelentős, ha függvényegyenleteket differenciálegyenletekké tudunk átalakítani.

Egy speciális esetben *Fejér Lipót* és *Turán Pál* vetették fel azt a kérdést, hogyan lehetne a (4) függvénytípust függvényegyenlet helyett differenciálegyenlettel jellemezni. — *Fenyő István*nal igyekeztünk e problémát megoldani, és pedig a fenti okokból annak hozzátevésével, hogy egyrészt olyan parciálisdifferenciálegyenlet feltételt kerestünk, amely az (1) függvényegyenlet illető speciális esetével ekvivalens, — mert ezáltal módszert kaphattunk ezen függvényegyenlet differenciálegyenletekre való visszavezetés útján történő megoldására, — másrészt egyúttal azt is kerestük, hogyan lehet a megfelelő képletben szereplő $F(t)$ függvényt $z$-ből, ill. parciális deriváltjaiból meghatározni.

Az addigi irodalomban egyetlen* hasonló tartalmú munkát találtunk csak

* Eltekintünk itt *Veress Pál:* A középérték fogalmáról, *Matematikai és Fizikai Lapok* 44 (1936), 46—60. o. (l. 59. o.) c. cikkének egy mondatából kiolvasható, középértékek kváziaritmetikus voltához szükséges, de nem elégséges differenciálegyenletfeltételtől, tekintve, hogy a feltételt se ki nem mondta, se be nem bizonyította és így $F(x)$-re adott előállításának indokolása is hiányos.

(utólag) : *N. H. Abel* 1826-ban* úgy bizonyította be, hogy a $z(x, y)$ függvény (5) alakban írható voltának szükséges és elégséges feltételei a (2) függvényegyenlet *és* a kommutativitás $[z(x, y) = z(y, x)]$ teljesülése, — hogy visszavezette őket a

$$\frac{z_x(x,y)}{z_y(x,y)} = \frac{f(x)}{f(y)}$$

differenciálegyenletre. — Mivel *Abel* eszerint egy függvényegyenletpárból vezetett le egy — különben a függvényegyenletpárral nem ekvivalens — differenciálegyenletet, nekünk pedig egyetlen függvényegyenletből kellett differenciálegyenletet levezetni, így az ő gondolatait alig tudtuk felhasználni.

*Fenyő István*nal együtt akkor az (1), (4) egyenlet azon speciális esetét intéztük el, amikor $z(x, y)$ középérték $[z(t, t) = t]$. Ebben a cikkben viszont mindjárt általánosan fogom tárgyalni az (1), (4) egyenletet, majd a (2), (5) és a (3), (6) egyenletet is**.

2. Vizsgáljuk először azt, hogy milyen parciális differenciálegyenletnek tesz eleget a (4) $z(x, y) = F^{-1}[aF(x) + bF(y) + c]$ függvény? Itt $F$-ről és $z$-ről nyilván nemcsak folytonosságot, de többszörös (parciális) deriválhatóságot is tételezünk fel — mindig annyiszorosat, ahányszorosra szükségünk van — viszont $z$ növekedése helyett csak szigorú monotonitását követeljük meg itt, úgyhogy valamelyik változóban fogyó is lehet, ha ennek a többi feltétel nem mond ellent ; így (4)-ben $a$ vagy $b$ negatív szám is lehet.

Deriváljuk az $F(z) = aF(x) + bF(y) + c$ egyenletet egyrészt $x$, másrészt $y$ szerint parciálisan és osszuk el a kapott két egyenletet*** :

$$\frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)} = \frac{a\,F'(x)}{b\,F'(y)},$$

vagy az

$$F'(t) = f(t)\,,\ F(t) = \int f(t)\,dt$$

* *N. H. Abel:* Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen $x$ und $y$, wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, dass $f[z, f(x, y)]$ eine symmetrische Function von $x$, $y$ und $z$ ist. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1 (1826), 11—15 o. I.-ben mi is az (5) alakra először az asszociativitást *és* kommutativitást találtuk feltételekként és csak azután mutattuk meg, hogy a kommutativitás feltevése felesleges. *Abel* egyébként nem az asszociativitás és kommutativitás egyenletpárját, hanem egy vele ekvivalens függvényegyenletpárt használ feltételül.

** *Lásd J. Aczél—St. Fenyő:* Über die Theorie der Mittelwerte, *Acta scientiarum mathematicarum* 11 (1948) 239—245. o. és *J. Aczél:* Einige aus Funktionalgleichungen zweier Veränderlichen ableitbare Differentialgleichungen, *Acta scientiarum mathematicarum* 13 (1950).

*** Mivel a $z$ függvényben nemcsak $x$, $y$ szerepelhetnek változók gyanánt, a parciális deriváltakat következetesen úgy jelöljük, hogy az $_1$ index az első változó szerinti deriválást jelent, a $_2$ a második változó szerintit : pl. $z_2 = z_2(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}$, $z_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,

$$z_1[z(x,y)],u = \frac{\partial}{\partial z(x,y)}\, z[z(x,y),u], \text{ stb.}$$

jelöléssel :

$$\frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)} = \frac{af(x)}{bf(y)}. \tag{7}$$

Ebbe az $x = y = t$ értéket helyettesítve látjuk, hogy

$$\frac{z_1(t,t)}{z_2(t,t)} = \frac{a}{b} = \text{konstans}. \tag{8}$$

(7)-ben még benne van a keresət $f(t) = F(t)$ függvény. Ezt továbbra is annak felhasználásával igyekszünk kiküszöbölni, hogy pl. $x$ szerinti deriválásnál egy csak $y$-tól függő függvénynek deriváltja 0 lesz.

Ezért vegyük (7) logaritmusát és deriváljuk pl. $x$ szerint :

$$\frac{z_{11}(x,y)}{z_1(x,y)} - \frac{z_{12}(x,y)}{z_2(x,y)} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

vagy a

$$X(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}, \quad f(x) = e^{-\int X(x)\,dx}$$

jelöléssel :

$$\frac{z_{12}(x,y)}{z_2(x,y)} - \frac{z_{11}(x,y)}{z_1(x,y)} = X(x). \tag{9}$$

Ha ezt még $y$ szerint deriváljuk, olyan differenciálegyenlet-feltételt kapunk, amelyben $z$-n kívül más függvény nem szerepel :

$$\frac{z_2 z_{122} - z_{22} z_{12}}{z_2^2} - \frac{z_1 z_{112} - z_{12} z_{11}}{z_1^2} = 0,$$

vagyis

$$\begin{aligned} z_1(x,y)^2\,[z_{12}(x,y)\,z_{22}(x,y) - z_{122}(x,y)\,z_2(x,y)] &= \\ = z_2(x,y)^2\,[z_{11}(x,y)\,z_{12}(x,y) - z_1(x,y)\,z_{112}(x,y)]&. \end{aligned} \tag{10}$$

3. Tehát a (10) differenciálegyenlet az, amire az (1) függvényegyenletet remélhetjük visszavezetni.

Az (1) függvényegyenletből úgy vezethetjük le a (10) differenciálegyenletet, hogy (1)-et addig és úgy próbáljuk a különböző változók szerint differenciálni, hogy végül a (10) differenciálegyelethez jussunk.

A következő út célszerű : az

$$z[z(x, y), z(u, v)] = z[z(x, u), z(y, v)] \tag{1}$$

függvényegyenletet egyrészt $x$, másrészt $u$ szerint deriváljuk :

$$\begin{aligned} z_1[z(x,y), z(u,v)]\,z_1(x,y) &= z_1[z(x,u), z(y,v)]\,z_1(x,u), \\ z_2[z(x,y), z(u,v)]\,z_1(u,v) &= z_1[z(x,u), z(y,v)]\,z_2(x,u), \end{aligned} \tag{11}$$

majd a két egyenletet elosztva:

$$\frac{z_1(x,u)}{z_2(x,u)} = \frac{z_1[z(x,y),\, z(u,v)]}{z_2[z(x,y),\, z(u,v)]}\,\frac{z_1(x,y)}{z_2(u,v)},$$

bennük $u = x$, $v = y$ helyettesítéssel:

$$\frac{z_1(x,x)}{z_2(x,x)} = \frac{z_1[z(x,y),\, z(x,y)]}{z_2[z(x,y),\, z(x,y)]};$$

ez azt mondja ki, hogy $\frac{z_1(x,x)}{z_2(x,x)}$ értéke nem változik, ha benne $x$-et $z$-vel cseréljük fel. De (8) szerint annak is ki kellene jönnie, hogy akkor sem szabad változnia, ha bármilyen más értéket helyettesítünk $x$ helyébe. Ezt $z(x, y)$ behelyettesíthetősége még nem biztosítja, mert lehet, hogy $z(x, y)$ nem vesz fel minden értéket, amit $x$ felvehet. Ha azonban az előbbi egyenlethez még hozzávesszük az (1)-ből $u$, ill. $v$ szerinti deriválással hasonlóan kapott

$$\frac{z_1[z(x,y),\, z(x,y)]}{z_2[z(x,y),\, z(x,y)]} = \frac{z_1(y,y)}{z_2(y,y)} \tag{12}$$

egyenletet, akkor már látjuk, hogy bármely $x$ és $y$-ra

$$\frac{z_1(x,x)}{z_2(x,x)} = \frac{z_1(y,y)}{z_2(y,y)},$$

tehát $\frac{z_1(t,t)}{z_2(t,t)}$ konstans és ez (8). Ahhoz, hogy (9)-et is levezessük, deriváljuk tovább (11)-et egyrészt $y$, másrészt $v$ szerint és osszuk el a kapott egyenleteket:

$$\frac{z_{11}[z(x,y),\, z(u,v)]}{z_{12}[z(x,y),\, z(u,v)]}\,\frac{z_2(x,y)}{z_2(u,v)} + \frac{z_1[z(x,y),\, z(u,v)]}{z_{12}[z(x,y),\, z(u,v)]} = \frac{z_1(y,v)}{z_2(y,v)}.$$

Ha itt megint $u = x$, $v = y$, a jobboldalon $\frac{z_1(y,y)}{z_2(y,y)}$ fog állani, ami (12) szerint egyenlő $\frac{z_1[z(x,y),\, z(x,y)]}{z_2[z(x,y),\, z(x,y)]}$-vel. Az így kapott egyenletből kifejezhetjük $\frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y),\, z_2(x,y)}$-t:

$$\frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y),\, z_2(x,y)} = \frac{z_{12}[z(x,y),\, z(x,y)]}{z_2[z(x,y),\, z(x,y)]} - \frac{z_{11}[z(x,y),\, z(x,y)]}{z_1[z(x,y),\, z(x,y)]}, \tag{13}$$

ami azt mondja ki, hogy $\frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y)\, z_2(x,y)}$ csak $z(x,y)$-tól függ, azaz egyváltozós függvénye $z$-nek. Mármost felhasználhatjuk azt az egyszerű tényt, hogy ha egy $\Phi(x, y)$ kétváltozós függvény értéke csak $z(x, y)$-tól függ, akkor

$$\begin{vmatrix} \Phi_1(x,y) & \Phi_2(x,y) \\ z_1(x,y) & z_2(x,y) \end{vmatrix} = \Phi_1(x,y)\, z_2(x,y) - \Phi_2(x,y)\, z_1(x,y) = 0,$$

nálunk

$$\Phi(x,y) = \frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y)\, z_2(x,y)},$$

tehát kell, hogy

$$z_2(x,y)\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y)\ z_2(x,y)}\right] = z_1(x,y)\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y)\ z_2(x,y)}\right]$$

legyen, azaz :

$$z_1^2\,(z_{12}\,z_{12} - z_{22}\,z_2) = z_2^2\,(z_{11}\,z_{12} - z_1\,z_{112})$$

és ez éppen (10).

Tehát az (1) függvényegyenletből valóban következik a (10) differenciálegyenlet.

Mint láttuk, az volt segítségünkre, hogy a (10) differenciálegyenletben is szereplő $x$ és $y$ változókon kívül az (1) függvényegyenletben még az $u$ és $v$ változók is szerepeltek, hiszen egy függvényegyenletben természeténél fogva rendszerint több változó szerepel, mint ahány változós a függvény. Így $x$, $y$, $u$, $v$ szerint elég sokszor megfelelően deriválva, végül is kettőt közük tetszésünk szerint, célunkra legmegfelelőbben választhattunk meg.

4. Ezzel az (1) függvényegyenlet megoldását sikerült visszavezetni a (10) differenciálegyenlet megoldására. Következő feladatunk a (10) differenciálegyenlet megoldása. Az várható, hogy általános megoldásul a (4) függvényt kapjuk és hogy ezt a 2. pontban követett okoskodásnak visszafelé való elvégzésével nyerjük, mert hisz ott éppen (1)-ből vezettük le (10)-et. Próbáljuk ezt meg :

$$z_1^2\,(z_{12}\,z_{22} - z_{122}\,z_2) = z_2^2\,(z_{11}\,z_{12} - z_1\,z_{112}) \tag{10}$$

-ből $z_1^2 z_2^2$-tel osztva lesz :

$$\left(\frac{z_{122}}{z_2} - \frac{z_{12}\,z_{22}}{z_2^2}\right) - \left(\frac{z_{112}}{z_1} - \frac{z_{11}\,z_{12}}{z_1^2}\right) = 0\,, \tag{14}$$

vagyis

$$0 = \left[\frac{1}{z_2}\ \frac{\partial}{\partial y}\,z_{12} + z_{12}\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{z_2}\right)\right] - \left[\frac{1}{z_1}\ \frac{\partial}{\partial y}\,z_{11} + z_{11}\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\right]$$

és $y$ szerint integrálva :

$$X(x) = \frac{z_{12}(x,y)}{z_2(x,y)} - \frac{z_{11}(x,y)}{z_1(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\log\frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)}\right]. \tag{9}$$

Ha ezt most $x$ szerint integráljuk, az

$$\log\frac{z_1}{z_2} = -\int X(x)\,dx + \psi(y)$$

összefüggést kapjuk, ahonnan az

$$\int e^{-\psi(y)} = g(y)$$

és

$$e^{-\int X(x)\,dx} = f(x) \tag{15}$$

jelöléssel :

(16) $$\frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)} = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

(16)-ot ilyen alakba írhatjuk :

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(y) \\ z_1(x,y) & z_2(x,y) \end{vmatrix} = f(x)\, z_2(x,y) - g(y)\, z_1(x,y) = 0\,,$$

Ez az előbb megismert

$$\begin{vmatrix} \Phi_1(x,y) & \Phi_2(x,y) \\ z_1(x,y) & z_2(x,y) \end{vmatrix} = \Phi_1 z_2 - \Phi_2 z_1 = 0$$

egyenlet (l. a 3. pontban) speciális esete :

$$\Phi(x,y) = \int f(x)\, dx + \int g(y)\, dy$$

$$\Phi_1(x,y) = f(x), \quad \Phi_2(x,y) = g(y)$$

Tehát a

(17) $$F(x) = \int f(x)\, dx = \int e^{-\int \chi(x)\, dx}\, dx = \int e^{\int \left(\frac{z_{12}(x,y)}{z_2(x,y)} - \frac{z_{11}(x,y)}{z_1(x,y)}\right) dx}\, dx$$

[(9) és (15) miatt] és

(18) $$G(y) = \int g(y)\, dy$$

jelöléssel :

(19) $$H\,[z(x,y)] = F(x) + G(y)\,, \quad z(x,y) = H^{-1}\,[F(x) + G(y)]$$

adódik a (10) differenciálegyenlet általános megoldásának, mert könnyen látható — lényegében a 2. pontbeli eljárás megismétlésével — hogy a (19) függvény tényleg eleget is tesz a (10) differenciálegyenletnek.

Ez nem az, amit vártunk. A (10) differenciálegyenlet általános megoldása nem (4), hanem (19) alakú, benne nem egy, hanem három tetszőleges függvény szerepel.

Viszont kaptuk azt, hogy *azok és csakis azok a függvények írhatók a* $z(x, y) = H^{-1}\,[F(x) + G(y)]$ *alakban, amelyek eleget tesznek a (10) differenciálegyenletnek.*

A (19)-ben szereplő $F(x)$ függvény kifejezése a $z(x, y)$ függvényből is lehetővé vált :

(17) $$F(x) = \int e^{-\int \left(\frac{z_{12}(x,y)}{z_2(x,y)} - \frac{z_{11}(x,y)}{z_1(x,y)}\right) dx}\, dx.$$

Mint láttuk, a (10) differenciálegyenlet teljesen ekvivalens a (9) differenciálegyenlettel, vagyis avval, hogy

$$\frac{z_{12}(x,y)}{z_2(x,y)} - \frac{z_{11}(x,y)}{z_1(x,y)}$$

nem függ $y$-tól, ami azt jelenti, hogy csak látszólag függ $y$-tól, valójában egyedül $x$-nek függvénye. Így a (17) utolsó alakjának kitevőjében szereplő $x$-szerinti integrálás egyváltozós integrál. Tehát tételünket úgy is kimondhatjuk, hogy *$z(x, y)$ akkor és csak akkor írható a (19) alakban, ha*

$$\frac{z_{12}(x,y)}{z_2(x,y)}-\frac{z_{11}(x,y)}{z_1(x,y)}$$

*csak $x$-től függ és akkor $F(x)$ értékét (17) adja.*

Hasonlóan

$$\frac{z_{12}(x, y)}{z_1(x, y)}-\frac{z_{22}(x, y)}{z_2(x, y)}=Y(y) \tag{20}$$

és

$$G(y)=\int e^{-\int Y(y)\,dy}\,dy=\int e^{-\int\left(\frac{z_{12}(x\,y)}{z_1(x\,y)}-\frac{z_{22}(x\,y)}{z_2(x,y)}\right)dy}\,dy \tag{21}$$

(17)-ből és (21)-ből látszik, hogy mind $F(x)$-ben, mind $G(y)$-ban szerepel két tetszőleges — egy multiplikatív és egy additív — konstans: a két integrációs konstans.

Másrészt a (16) egyenlet, mely szintén ekvivalens (10)-zel, azt jelenti, hogy a $\frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)}$ függvény szétválasztható $x$ egy függvényének $y$ egy függvényével való szorzatává, vagy, ami egyre megy, hányadosává. Az ilyen függvényeket szétválasztható függvényeknek nevezik. (16), (17), (18)-ból:

$$F(x)=\int f(x)\,dx=C\int\frac{z_1(x,c)}{z_2(x,c)}\,dx\,, \tag{22}$$

$$G(y)=\int g(y)\,dy=K\int\frac{z_2(k,y)}{z_1(k,y)}\,dy\,, \tag{23}$$

tehát tételünk úgy is kimondható, hogy *$z$ akkor és csakis akkor (19) alakú, ha $\frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)}$ szétválasztható függvény és akkor $F(x)$-et és $G(y)$-t (22) és (23) adja meg.*

Végül (10) így is írható:

$$z_1\,\frac{z_1z_2z_{122}-z_{12}(z_{12}z_2+z_1z_{22})}{z_1^2z^2}-z_2\,\frac{z_1z_2z_{112}-z_{12}(z_{11}z_2+z_1z_{12})}{z_1^2z_2^2}=0,$$

ami a

$$\Phi(x,y)=\frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y)\,z_2(x,y)}$$

jelöléssel megint csak a

$$\begin{vmatrix} z_1(x,y) & z_2(x,y) \\ \Phi_1(x,y) & \Phi_2(x,y) \end{vmatrix}=0$$

egyenletet adja, tehát (10) azzal is ekvivalens, hogy

$$\frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y)\,z_2(x,y)}$$

egyváltozós függvénye $z(x, y)$-nak :

$$\frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y)\, z_2(x,y)} = Z(z) \tag{24}$$

Ebből egyszerűen következik :

$$h(z) = e^{-\int Z(z)\, dz} \tag{25}$$

jelöléssel :

$$z_1(x,y) = \frac{f(x)}{h[z(x,y)]}, \tag{26}$$

$$z_2(x,y) = \frac{g(y)}{h[z(x,y)]}, \tag{27}$$

ezek tehát szintén ekvivalensek (10)-zel.

$H(z) = F(x) + G(y)$-ban (24) és (25) miatt

$$H(z) = \int h(z)\, dz = \int e^{-\int Z(z)\, dz} dz = \int e^{-\int \frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y)\, z_2(x,y)} dz} dz. \tag{28}$$

Így tételünk azzal is ekvivalens, hogy $z(x, y)$ *akkor és csak akkor (19) alakú, ha (24), ill. (26) vagy (27) teljesül és akkor (28) adja meg $H(z)$-t.*

Összefoglalva :

$$z = H^{-1}[F(x) + G(y)],$$

*akkor és csak akkor, ha (10), (9), (20), (24), (26), (27), (16) közül valamelyik teljesül és akkor $F(x)$-et (17) vagy (22), $G(y)$-t (21) vagy (23), $H(z)$-t (28) adja meg.*

5. A (4) alakú függények jellemzéséhez tehát (10)-en kívül még további feltételekre van szükség. Ha összevetjük a következő két képletet egymással :

$$H[z(x, y)] = F(x) + G(y), \tag{19}$$

$$H[z(x, y)] = aH(x) + bH(y) + c, \tag{4}$$

akkor látjuk, hogy azt kell $z(x, y)$-ra vonatkozó feltétel alakjában önteni, hogy

$$F(t) = a\, H(t) + c_1 \quad \text{és} \quad G(t) = b\, H(t) + c_2 \quad (c_1 + c_2 = c).$$

Ezek az egyenletek így alakíthatók át :

$$F'(t) = aH'(t), \qquad f(t) = ah(t),$$

$$G'(t) = bH'(t), \qquad g(t) = bh(t),$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{h'(t)}{h(t)}, \qquad Z(t) = X(t),$$

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{h'(t)}{h(t)}, \qquad Z(t) = Y(t),$$

ami $t$ helyébe $z$-t írva (9), (20) és (24) értelmében így írható :

$$(13) \qquad \frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y)\, z_2(x,y)} = \frac{z_{12}(z,z)}{z_2(z,z)} - \frac{z_{11}(z,z)}{z_1(z,z)},$$

$$(29) \qquad \frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y)\, z_2(x,y)} = \frac{z_{12}(z,z)}{z_1(z,z)} - \frac{z_{12}(z,z)}{z_1(z,z)}.$$

Az ilyen feltételeket, melyek összefüggést adnak $z$, ill. deriváltjainak speciális értékekre felvett értékei között, tágabb értelemben vett kezdeti feltételeknek nevezzük. (Ha önállóan szerepelnek, mint olyan egyenletek, melyekből $z(x, y)$ meghatározandó, fukcionál-differenciálegyenlet a nevük.)

Így azt kaptuk, hogy $z$ *akkor és csakis akkor (4) alakú, ha eleget tesz a (10) differenciálegyenletnek (vagy a vele ekvivalens valamelyik egyenletnek) és a (13), (29) tágabb értelemben vett kezdeti feltételeknek*, vagy másképp *a (10) differenciálegyenlet általános megoldása a (13), (29) (tágabb értelemben vett) kezdeti feltételek mellett a (4) függvény.*

Mivel azonban (13)-ból (és ugyanúgy (29)-ből) következett (10) a 3. pontban, tehát elég azt mondanunk, hogy *(4)-nek szükséges és elégséges feltétele (13) és (29) teljesülése.*

Tekintve, hogy egyrészt (4) kielégíti az (1) függvényegyenletet, másrészt (1)-ből a 3. pontban nemcsak (10) következett, hanem (13) — és ugyanúgy (29) — is, tehát *differenciálegyenletre való visszavezetéssel is megkaptuk, hogy (1) általános megoldása a (4) függvény.*

6. Amikor az eddig részletezett úton eljutunk odáig, hogy (10) mellé (1)-ből levezetett megszorító feltételeket keresünk, alighanem előbb akadunk rá a

$$(8) \qquad \frac{z_1(t,t)}{z_2(t,t)} = \text{konstans}$$

feltételre (hisz ez előbb következik (1)-ből), mintsem (13)-ra vagy (29)-re. Az ilyen egyenleteket, melyek egy $z$-ből, ill. deriváltjaiból összetett kifejezés értékét adják meg az $XY$-sík valamely görbéjén — jelen esetben a koordinátatengelyekhez 45°-os szög alatt hajló $y = x$ egyenesen — (szűkebb értelemben vett) kezdeti feltételeknek nevezzük.

Nézzük meg, nem elég-e már (8) feltevése a (10) differenciálegyenlet mellé ahhoz, hogy a (4) alakot kapjuk általános megoldásnak? Ha a (8)-ban szereplő konstansnak $\frac{a}{b}$-t vesszük és visszaemlékezünk a

$$(16) \qquad \frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

egyenletre, amely (10)-zel ekvivalens volt, látjuk, hogy (8) azt mondja, hogy

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{a}{b}, \quad g(t) = \frac{b}{a} f(t),$$

és így

$$(30) \qquad H(z) = a\,F(x) + b\,F(y), \quad z(x,y) = H^{-1}[a\,F(x) + b\,F(y)].$$

Mivel ez a függvény (10)-et és (8)-at is kielégíti, ezért *a (30) függvény a (10) differenciálegyenlet általános megoldása a (8) kezdeti feltétellel* — és *nem* a (4) függvény. Mivel (7)-ből következik (8) is és (10) is, azt is kimondhatjuk, hogy *annak, hogy z (30) alakú legyen, szükséges és elégséges feltétele (7) fennállása.* — Másrészt *(13) és (8) együtt* nyilván *elég ahhoz, hogy a (4) függvényeket jellemezze.*

Különben (30) is figyelemreméltó függvény. Képezzük ugyanis a (30) függvény átlagát (ahogyan azt I.-ben többízben tettük) :

$$a\,F(m) + b\,F(m) = a\,F(x) + b\,F(y),\quad m(x,y) = F^{-1}\left[\frac{a}{a+b}F(x) + \frac{b}{a+b}F(y)\right].$$

Mivel $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a+b} = 1$, ezért $m$ éppen az (I.-ben megismert) ú. n. kvázilineáris közép. Így a *(30) függvénytípusnak — és,* mint könnyű látni, *csak ennek — van meg az a tulajdonsága, hogy belőle átlagolással kvázilineáris közepeket kapunk.*

Van azonban eset, amikor elég a (8)-as feltétel (10) mellé a kvázilinearitás biztosítására : amikor közepekről van szó, vagyis (8)-hoz hozzájön az ú. n. reflexivitásnak (szűkebb értelemben vett) kezdeti feltétele :

$$z(t, t) = t, \tag{31}$$

mely $z$ értékét adja meg az $y = x$ egyenesen. Ha ugyanis a (8), (10) egyenletpár megoldását, a (30) függvényt, ebbe a (31)-be helyettesítjük,

$$H(t) = (a+b)F(t) + c$$

-t kapunk, amit (30)-ba visszahelyettesítve

$$(a+b)\,F(z) + c = aF(x) + bF(y) + c,$$

vagyis

$$\frac{a}{a+b} = p,\quad \frac{b}{a+b} = q$$

jelöléssel $(p + q = 1)$ :

$$F(z) = pF(x) + qF(y),\quad F(z) = F^{-1}[pF(x) + qF(y)]. \tag{32}$$

Az ilyen alakú $z(x, y)$ függvényeket neveztük kvázilineáris közepeknek.

Így *(32)-höz szükséges és elégséges (10), (8) és (31) teljesülése, vagy, ami ugyanaz, (7) és (31) teljesülése.*

Hamar rá lehet jönni, hogy ebben az esetben, tekintve, hogy (31) is fennáll, (8) helyettesíthető az egyszerűbb

$$z_1(t, t) = \text{konstans} \tag{33}$$

kezdeti feltétellel, mert ha $z_1(t, t) = p$, akkor (31)-et deriválva

$$z_1(t, t) + z_2(t, t) = 1,\quad z_2(t, t) = 1 - p = q = \text{konstans},$$

$$\frac{z_1(t,t)}{z_2(t,t)} = \frac{p}{q} = \text{konstans}$$

és ez éppen (8) ; ugyanígy (8)-ból és (31)-ből is következik (33).

Így *a (10) differenciálegyenlet a (31) és (33) kezdeti feltételekkel szükséges és elégséges ahhoz, hogy z kvázilineáris közép legyen.*

Egyúttal így *differenciálegyenletre való visszavezetés útján azt találtuk, hogy a (31) reflexivitás és az (1) biszimmetria szükséges és elégséges ahhoz, hogy z kvázilineáris közép legyen.*

Ha a (33)-ban szereplő konstans épp $\frac{1}{2}$, vagy a (8)-beli éppen 1 :

$$(33') \qquad z_1(t,t) = \frac{1}{2}, \qquad (8') \qquad z_1(t,t) = z_2(t,t)\,,$$

akkor $p = q = \frac{1}{2}$ és a (32) függvény így specializálódik :

$$(32') \qquad 2F(z) = F(x) + F(y)\,, \qquad z = F^{-1}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2}\right);$$

ezeket a függvényeket nevezzük *kváziaritmetikus közepeknek.*
(33′) ill. (8′) helyett követelhetjük a szimetriát is:

$$(34) \qquad z(x,y) = z(y,x),$$

mert hisz ebből (8′) nyilván következik és másrészt (32′) szimmetrikus.

Tehát látjuk, hogy *(10) a (31) kezdeti feltétellel és a (33′), (8′), (34), kezdeti feltételek bármelyikével együtt éppen a kváziaritmetikus közepeket és csak azokat adja:* együttal *differenciálegyenletek segítségével új bizonyítását kaptuk annak, hogy $z(x, y)$ akkor és csak akkor kváziaritmetikus közép, ha biszimmetrikus, [(1)] reflexív [(31)] és szimmetrikus [(34)].*

Szükséges és elégséges feltételnek különben ezúttal is vehető

$$\frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)} = \frac{f(x)}{f(y)}$$

és (31), mert belőlük (10) is, (8′) is következik.

7. Egészen hasonlóan történhetik meg a (2) asszociativitás- és a (3) tranzlázió-függvényegyenlet megoldása is differenciálegyenletre való visszavezetéssel. Hogy milyen differenciálegyenletet fogunk tudni ezekből levezetni, azt megint sejthetjük előre, mert hisz az 1.-ben felsorolt (már I.-ben megismert) (5), (6) megoldások mind (19) alakúak megfelelő specializálással és így (2)-nek (5) megoldása is, (3)-nak (6) megoldása is ki kell hogy elégítse a (10) differenciálegyenletet. Tehát azt várjuk, hogy (10)-et, vagy valamelyik vele ekvivalens egyenletet lehet majd a függvényegyenletekből levezetni, valamint oly kiegészítő feltételeket, melyek az (5) és (6) függvényalakok specializálódottságát (19)-hez képest előidézik.

Először

$$(2) \qquad z[z(x,y)\,,\,u] = z[x, z(y,u)]$$

-ből akarunk differenciálegyenletet kapni. Deriváljuk ehhez (2)-t az $y$, ill. $x$ szerint :

$$z_1[z(x,y),\,u]\,z_2(x,y) = z_2[x, z(y,u)]\,z_1(y,u)\,,$$
$$z_1[z(x,y)\,,\,u]\,z_1(x,y) = z_1[x,z(y,u)]\,,$$

és osszuk el a két egyenletet :

$$\frac{z_2[x,z(y,u)]}{z_1[x,z(y,u)]}\cdot z_1(y,u) = \frac{z_2(x,y)}{z_1(x,y)},$$

vagy $x$ helyébe a $c$ konstanst, $y$ helyébe $x$-et, $u$ helyébe $y$-t téve

$$z_1(x,y) = \frac{\dfrac{z_2(c,x)}{z_1(c,x)}}{\dfrac{z_2[c,z(x,y)]}{z_1[c,z(x,y)]}}, \tag{35}$$

amiből a

$$\frac{z_2(c,x)}{z_1(c,x)} = f(x), \quad \frac{z_2(c,z)}{z_1(c,z)} = f(z)$$

jelöléssel a

$$z_1 = \frac{f(x)}{f(z)}$$

egyenletet kapjuk. Ez

$$z_1 = \frac{f(x)}{h(z)} \tag{26}$$

alakú és így, mint a 4. pontban láttuk, ekvivalens (10)-zel.

Mivel pedig (35)-ből most

$$f(t) = h(t)$$

következett, így (35) mindjárt megadja (10)-hez az első megszorító (tágabb értelemben vett) kezdeti feltételt. A másik hasonlóan :

$$z_2(x,y) = \frac{\dfrac{z_1(y,k)}{z_2(y,k)}}{\dfrac{z_1[z(x,y),\, k]}{z_2[z(x,y),\, k]}}, \tag{36}$$

azaz

$$z_2(x,y) = \frac{g(y)}{h(z)}, \tag{27}$$

ahol

$$f(t) = g(t) = h(t).$$

Így *a (10) differenciálegyenlet a (35) és (36) tágabb értelemben vett kezdeti feltételekkel szükséges és elégséges (5) fennállásához.* Mert hiszen $f(t) = g(t) = h(t)$-ből

$$F(t) = H(t) + c_1$$

$$G(t) = H(t) + c_2,$$

így ha

$$H(z) = H(x) + H(y) + c_1 + c_2,$$

vagy

$$H(t) = F^*(t) - c_1 - c_2$$

úgy

$$F^*(z) = F^*(x) + F^*(y)$$

vagyis éppen (5).

Ha azt akarjuk, hogy legalább az egyik feltétel szűkebb értelemben vett kezdeti feltétel legyen, akkor (10) mellé (35)-öt és

(8′) $$z_1(t, t) = z_2(t, t)$$

vehetö fel (5) jellemzésére.

(35) vagy (36)-ból (10) következik, ezért *szükséges és elégséges feltétel*nek *(5) fennállásához* elég *(36) és (8′), vagy ami ugyanaz,*

$$z_1(x,y) = \frac{f(x)}{f(z)}$$

*és (8′) vagy*

$$z_1(x,y) = \frac{f(x)}{f(z)} \quad \text{és} \quad z_2(x,y) = \frac{f(y)}{f(z)}$$

fennállását megkövetelnünk.

Mivel mindezen feltételek következnek (2)-ből és (5) kielégíti (2)-t, tehát *differenciálegyenletre való visszavezetéssel bebizonyítottuk, hogy a (2) függvényegyenlet általános megoldása az (5) függvény.*

8. Végül a

(3) $$z[z(x, y), u] = z(x, y + u)$$

függvényegyenletből $x$, ill. $y$ szerinti deriválás és osztás után $u = c-y$ -t téve :

$$\frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)} = \frac{z_1(x,c)}{z_2(x,c)},$$

vagyis

(37) $$\frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)} = f(x).$$

Ezt $y$ szerint deriválva már differenciálegyenletet kapunk :

(38) $$z_1 z_{22} = z_{12} z_2.$$

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet : (38)-ból $z_2^2$-tel való osztással és $y$ szerinti integrálással lesz

(37) $$\frac{z_1}{z_2} = f(x),$$

azaz

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = z_2 f(x) - z_1 = 0 ,$$

ahol

$$\Phi(x,y) = \int f(x)\, dx + y ,$$

tehát

$$H[z(x,y)] = F(x) + y , \quad z(x.y) = H^{-1}[F(x) + y] . \tag{39}$$

Ez (38) általános megoldása!

Ahhoz, hogy ebből a (6) függvényalakot kapjuk, $H(t) = F(t)$-re kell feltételt levezetnünk (3)-ból. (3)-ban tegyünk $y = 0$-t, az így kapott

$$z[z(x, 0), u] = z(x, u)$$

egyenletből $z$ szigorú monotonitása miatt

$$z(x, 0) = x . \tag{40}$$

Ez szűkebb értelemben vett kezdeti feltétel, mert $z(x, y)$ értékét megadja az $y = 0$ egyenesen. Ezt (39)-be téve ($y = 0, z(x, 0) = x$-el), tényleg megkapjuk $H(t) = F(t)$-t és így azt, hogy $z$(6) alakú.

*(6)-nak szükséges és elégséges feltétele a (40) kezdeti feltétel mellett a (38) differenciálegyenlet — vagy a vele ekvivalens (37) egyenlet — teljesülése.* Mivel pedig ezek következnek a (3) függvényegyenletből, melyet (6) kielégít, *differenciálegyenletre visszavezetéssel való bizonyítást kaptuk annak, hogy a (3) függvényegyenlet általános megoldása (6) alakú.*

9. Megjegyzem még azt a gyakorlatilag fontos tényt, hogy mivel a (4), (5), (6), (30) függvényalakok annyiban speciális esetei (19)-nek, hogy az $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ függvényekből kettő vagy három megegyezik, ezért itt ezekben az esetekben többféle módon is előállíthatjuk a bennük szereplő függvényeket. Így (6)-ban

$$F(t) = \begin{cases} = \int f(t)\, dt = C \int^t \dfrac{z_1(x,c)}{z_2(x,c)} dx = \int e^{-\int X(t)\, dt}\, dt = \int e^{-\int^t \left(\frac{z_{12}}{z_2} - \frac{z_{11}}{z_1}\right) dx}\, dt \\[2ex] = \int h(t)\, dt = \int e^{-\int Z(t)\, dt}\, dt = \int e^{-\int^t \frac{z_{12}}{z_1 z_2}\, dz}\, dt . \end{cases}$$

(30)-ban

$$F(t) = \begin{cases} = \int f(t)\, dt = C \int^t \dfrac{z_1(x,c)}{z_2(x,c)} dx = \int e^{-\int x(t)\, dt}\, dt = \int e^{-\int^t \left(\frac{z_{12}}{z_2} - \frac{z_{11}}{z_1}\right) dx}\, dt \\[2ex] = \int g(t)\, dt = K \int^t \dfrac{z_2(k,y)}{z_1(k,y)} dy = \int e^{-\int Y(t)\, dt}\, dt = \int e^{-\int^t \left(\frac{z_{12}}{z_1} - \frac{z_{22}}{z_2}\right) dy} \end{cases}$$

$$H(t) = \int h(t)\, dt = \int e^{-\int Z(t)\, dt}\, dt = \int e^{-\int^t \frac{z_{12}}{z_1 z_2}\, dz}\, dt$$

(4)-ben és (5)-ben :

$$F(t) = \begin{cases} = \int f(t)\,dt = C\int^{t}\frac{z_1(z,c)}{z_2(x,c)}\,dx = \int e^{-\int X(t)\,dt}\,dt = \int e^{-\int^{t}\left(\frac{z_{12}}{z_2}-\frac{z_{11}}{z_1}\right)dx}\,dt \\ = \int g(t)\,dt = K\int^{t}\frac{z_2(k,y)}{z_1(k,y)}\,dy = \int e^{-\int Y(t)\,dt}\,dt = \int e^{-\int^{t}\left(\frac{z_{12}}{z_1}-\frac{z_{22}}{z_2}\right)dv}\,dt \\ = \int h(t)\,dt = \int e^{-\int Z(t)\,dt}\,dt = \int e^{-\int^{t}\frac{z_{12}}{z_1 z_2}\,dz}\,dt \end{cases}$$

(a ki nem írt alsó határok mindenütt tetszőleges konstansok). E képletek közül azt használhatjuk $F(t)$ kiszámítására, amelyik nekünk legkényelmesebb.

10. Észrevehetjük, hogy jelentős minőségi különbség van szűkebb értelemben vett kezdeti feltételek között, melyek (6) és (30) jellemzésénél szerepeltek, és a (4)-et és (5)-öt jellemző tágabb értelemben vett kezdeti feltételek között. Ez nemcsak abban mutatkozik meg, hogy a tágabb értelemben vett kezdeti feltételek bonyolultabbak, összetett függvényeket tartalmaznak, hanem abban is, hogy egyenesen következményként tartalmazzák a függvényegyenletből levezethető differenciálegyenletet, ellentétben a szűkebb értelemben vett kezdeti feltételekkel, amelyek valóban csak megszorítást jelentenek a differenciálegyenletekhez, de nem teszik azokat fölöslegessé.

Ezért merül fel az a probléma, hogy a (4)-et és (5)-öt is jellemezni kellene a (10) differenciálegyenlethez csatolt, szűkebb értelemben vett kezdeti feltételekkel.

Érdekes, hogy ezt bizonyos speciális eseteknél meg lehet tenni. Mint láttuk, ilyen volt (4)-nél a (32) és a (32′) speciális eset. A (2) függvényegyenlet esetében pedig, ha létezik egységelem, azaz olyan $e$ szám, hogy $z(x, e) = x$, akkor ezt a valódi (szűkebb értelemben vett) kezdeti feltételt használhatjuk (35) helyett. Feladat lenne az általános esetben is a valódi kezdeti feltételekkel való jellemzést megcsinálni.

További problémák : (30) jellemezhető volt egyedül a

(7) $$\frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)} = \frac{a\,f(x)}{b\,f(y)}\,;$$

(5a) $$z_1(x,y) = \frac{f(x)}{f(z)} \quad \text{és} \quad z_2(x,y) = \frac{f(y)}{f(z)}$$

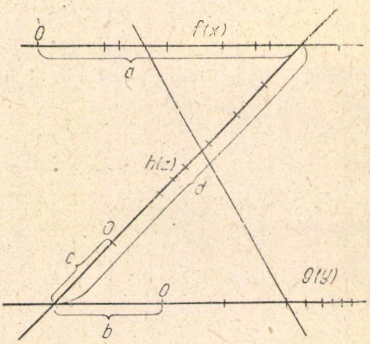
specializált differenciálegyenletekkel. Nem lehetne hasonlót csinálni (4)-gyel és (6)-tal is? Másrészt *a (30) és a (19) alakú függvényeket nem tudtuk függvényegyenlettel jellemezni. Talán ez is menne általánosabb szerkezetű függvényegyenletekkel.*

11. A megoldásfüggvények között, mint láttuk, éppen egyedül a központi jelentőségű (19) függvénynek, mely a (10) differenciálegyenletnek és a vele ekvivalens egyenleteknek általános megoldása, nem volt semmilyen

gyakorlati értelmezése vagy felhasználása. Erre a nomográfiában van lehetőség.*

Itt most kétváltozós függvények nomogrammjaira szorítkozunk, bár az itt elmondandó gondolatok felhasználhatók többváltozós függvények esetében is.

12. Azt keressük, melyek azok a függvények, melyek három egyenesskálás (pontsoros) nomogrammal ábrázolhatók. Tekintve, hogy nyilván a pontsoros nomogramm érvényes marad projektív leképezés után, projektív leképezéssel pedig a három skálaegyenes közül kettőnek, pl. az $x$- és $y$-skálának metszéspontja mindig kivihető a végtelenbe, azaz ezek párhuzamossá tehetők, — ezért lényegében kétféle egyenes (pontsoros) nomogramm van ; az egyiknél két párhuzamos egyenes skálát metsz egy harmadik egyenes skála (1. ábra), a másiknál mindhárom skála párhuzamos (2. ábra). Mint az 1. és 2. ábrán




*1. ábra*

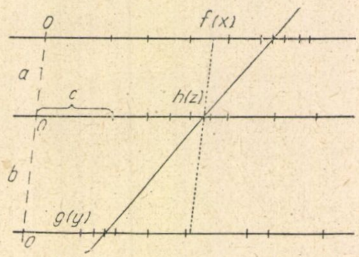
$$\frac{a-f(x)}{g(y)+b}=\frac{d-h(z)-c}{h(z)+c}$$

$$F(x)=\log\,[a-f(x)]$$

$$G(y)=-\log\,[g(y)+b]$$

$$H(z)=\log\left[\frac{d}{h(z)+c}-1\right]$$

$$F(x)+G(y)=H(z)$$




*2. ábra*

$$\frac{f(x)-h(z)-c}{a}=\frac{h(z)-g(y)+c}{b}$$

$$F(x)=b\cdot f(x)$$

$$G(y)=a\cdot g(y)$$

$$H(z)=(a+b)\cdot h(z)+(a+b)\cdot c$$

$$F(x)+G(y)=H(z)$$

látjuk, mindkét fajta nomogramm olyan $z(x, y)$ függvényt ábrázol, melyhez van olyan $F(x)$, $G(y)$, $G(z)$ függvényhármas, hogy

$$H(z)=F(x)+G(y)\quad **.$$

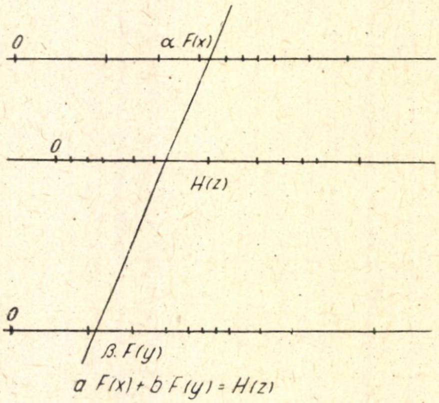
* A következőkre nézve lásd *Hajós György:* A munka- és időelemzés matematikai segédeszközei, Budapest, 1948. c. könyvét.

** Lásd pl. *M. d'Ocagne:* Traité de Nomographie, Paris 1921, Ch. IV. 67. §, 71. §, 74. §, 57. §. — A fentebb elmondottakból következik, hogy a legáltalánosabb egyenes pontsoros nomogrammal ábrázolható függvények ábrázolhatók párhuzamos nomogrammal is. Különben az, hogy az egyenes nomogrammok mind párhuzamos nomogrammokkal helyettesíthetők, nem jelenti azt, hogy a gyakorlatban nem fordulnak elő metsző egyenesű nomogrammok. Ugyanis a skálák párhuzamossá tételét gyakran a skálák túlbonyolódásával kellene megfizetni és így az eredeti nomogramm könnyebben rajzolható és kezelhető.

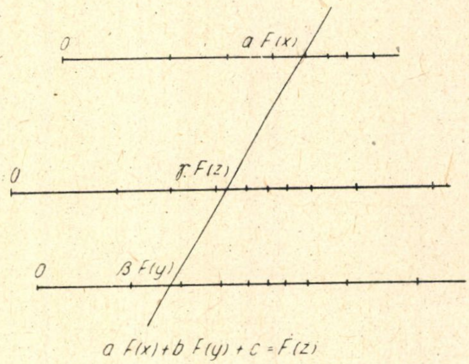
Ez éppen (19) és így látjuk, hogy *a (10) differenciálegyenlet általános megoldását éppen azok a függvények adják, amelyek egyenes nomogrammal ábrázolhatók*, vagyis *annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy kétváltozós függvényt egyenes nomogrammal lehessen ábrázolni, az, hogy eleget tegyen a (10) differenciálegyenletnek vagy valamelyik vele ekvivalens egyenletnek. A párhuzamos skálákon fellépő skálabeosztást megadó $F(x)$, $G(y)$, $H(z)$ függvényeket pedig a (17), (22), (21), (23), (28) képletek határozzák meg $z(x, y)$-ból.* *

13. A (30), (4), (32), (32'), (5), (6) függvényalakoknak is megvan az interpretációjuk a nomografikus ábrázolásnál. Így

a (30) alakú függvények párhuzamos nomogrammján az $x$- és $y$-skála beosztása egymáshoz hasonló (3. ábra);




3. ábra




4. ábra

a (4) alakú függvényekén mindhárom skála beosztása hasonló egymáshoz (4. ábra);

a (32) alakú függvényekén a három skála egyvonalban kezdődik és egybevágó (5. ábra);

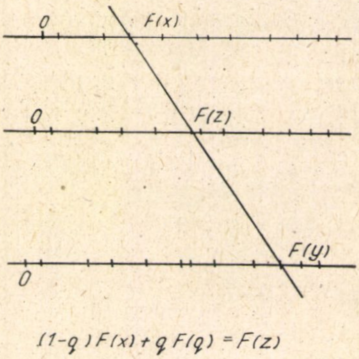
a (32') alakúakén ezenfelül még a $z$-skála pontosan középen van az $x$- és az $y$-skála között (6. ábra);

az (5) alakúakén a skálák egyvonalban kezdődnek, az $x$- és $y$-skála egybevágó, a köztük épen középen fekvő $z$-skála hasonló, fele léptékkel (7. ábra);

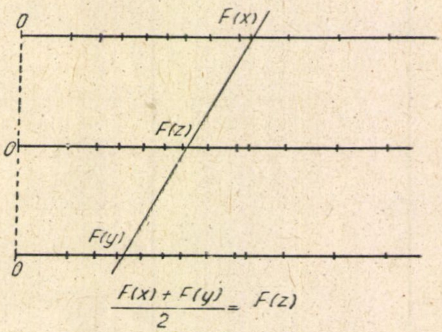
a (6) alakú függvények párhuzamos nomogrammján végül, egyvonalban kezdődő skálák vannak, az $y$-skála beosztása lineáris (ekvidisztans), a $z$-skála pedig pontosan középen van és beosztása hasonló az $x$-skáláéhoz fele léptékkel (8. ábra).

Így azok a feltételek, melyeket az 5., 6., 7., 8. pontokban arra kaptunk, hogy mikor írható egy függvény a (30), ill. (4), ill. (32), ill. (32'), ill. (5), ill. (6) alakokba, egyúttal annak szükséges és elégséges feltételeit is megadják, hogy mikor ábrázolható az illető függvény a fenti szerkezetű nomogrammokkal.

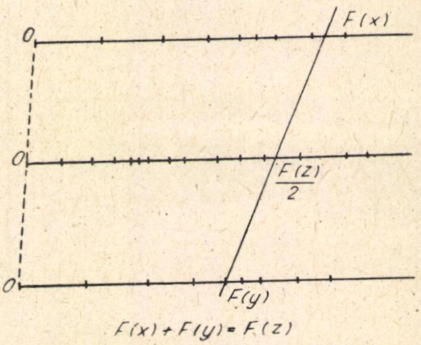
* *Lásd J. Aczél:* Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen, *Acta scientiarum mathematicarum,* 12A (1950), 73—80. o.



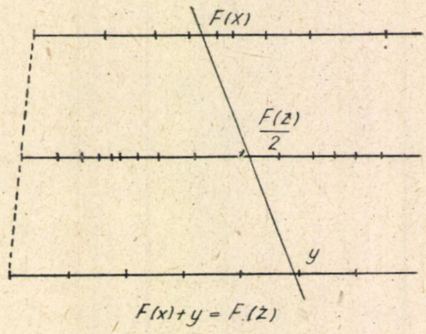

5. ábra




6. ábra




7. ábra




8. ábra

A 9. pont képletei pedig a skálafüggvényeket adják meg.

14. Hogy lássuk mint működnek módszereink a gyakorlatban, megnézzük az elmondottak alkalmazását néhány példán.

*a*) A $z = \dfrac{x\sqrt{y^2-1} + \sqrt{1-x^2}}{y}$ függvény beletartozik-e az elmondott típusok valamelyikébe, és ha igen, milyen nomogrammal ábrázolhatók? Mint a továbbiakban is látni fogjuk, általában a (16) egyenlet fennállása próbálható ki legkönnyebben.

$$z_1 = \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{y^2-1} - x}{y\sqrt{1-x^2}}, \quad z_2 = \frac{x - \sqrt{1-x^2}\sqrt{y^2-1}}{y^2\sqrt{y^2-1}},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{y\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\dfrac{1}{y\sqrt{y^2-1}}},$$

ez $x$-nek és $y$-nak tényleg szétválasztható függvénye, tehát függvényünket feltétlenül a (19) alakban lehet írni. Mivel pedig sem a (7), sem a (37) speciális egyenleteknek nem tesz eleget, tehát nem tartozik az ennél speciálisabb függvénytípusok egyikébe sem. Ábrázolható egyenes nomogrammal és így párhuzamos nomogrammal is.

A skálát is meghatározó $F(x)$, $G(y)$, $H(z)$ függvényekből $F(x)$-et és $G(y)$-t a (22) és (23) képletek adják meg:

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arc\sin x\,,$$

$$G(y) = \int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = \arc\sin \frac{1}{y}\,.$$

$H(x)$ meghatározásához előbb $h(z)$-t kell ismernünk. (26)-ból

$$h(z) = \frac{f(x)}{z_i} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{y^2-1}-x}\,;$$

erről még nem látjuk, hogy csak $z$-nek függvénye, még kevésbbé, hogy milyen függvénye $z$-nek. Hogy ezt megállapítsuk, számítsuk ki az eredeti függvényből $y$-t, mint $x$ és $z$ függvényét és helyettesítsük be a $h(z)$-re imént kapott képletbe. Ki kell jönnie, hogy $h(z)$ nem függ $x$-től, csak $z$-től, és akkor azt is meglátjuk, hogy milyen függvénye $z$-nek.

$$zy = x\sqrt{y^2-1} + \sqrt{1-x^2}\,, \qquad y = \frac{z\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-z^2}}{z^2-x^2}\,,$$

$$h(z) = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{y^2-1}-x} = \frac{z\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-z^2}}{z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}+x(1-z^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,,$$

$$H(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arc\sin z\,.$$

És tényleg: $z = \dfrac{x\sqrt{y^2-1}+\sqrt{1-x^2}}{y} = \sin\left(\arc\sin x + \arc\sin \dfrac{1}{y}\right)\cdot$

A függvény párhuzamos nomogrammján az $x$-skála $\arc\sin x$-skála, az $y$-skála $\arc\sin \frac{1}{y}$-skála, a $z$-egyenesé pontosan a középen van a kettő között $\frac{1}{2}\cdot \arc\sin z$ -skála van rajta. A skálák egyvonalban kezdődnek.

b) $z = e^{xy^2}$. Most

$$z_1 = e^{xy^2}\cdot y^2\,, \qquad z_2 = 2xye^{xy^2}\,, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}}\,.$$

Ez éppen (7) alakú, tehát függvényünk legalábbis a (30) típushoz tartozik.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}, \quad F(t) = \int \frac{dt}{t} = \log t, \quad h(z) = \frac{f(x)}{z_1} = \frac{1}{e^{xy^2} xy^2} = \frac{1}{z \log z},$$

$$H(z) = \int \frac{dz}{z \log z} = \log \log z, \quad z = e^{xy^2} = e^{e^{\log x + 2 \log y}}$$

tényleg (30) alakú, de speciálisabb típusokba nem tartozik.

Párhuzamos nomogrammjában a skálák egyvonalban kezdődnek, az $x$- és $y$-skála logaritmikus, a $z$-egyenes kétszer olyan közel van $y$-hoz, mint $x$-hez és log log $z$-skála van rajta.

$$\text{c)} \quad z = x^{\sqrt[3]{\log y/\log x}} \qquad z = e^{\sqrt[3]{\log^2 x/\log y}}$$

$$z_1 = e^{\sqrt[3]{\log^2 x/\log y}} \cdot \frac{2 \log x \cdot \log y}{3x \cdot \sqrt[3]{\log^2 x \log y^2}}$$

$$z_2 = e^{\sqrt[3]{\log^2 x/\log y}} \cdot \frac{\log^2 x}{3y \cdot \sqrt[3]{\log^2 x \log y^2}},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2 \frac{1/(x \log x)}{1/(y \log y)},$$

másrészt $z(t, t) = t$, tehát a függvény (32) alakú lesz, biszimmetrikus közép:

$$F(t) = \int \frac{dt}{t \log t} = \log \log t, \quad z = x^{\sqrt[3]{\log y/\log x}} = e^{e^{\frac{2}{3} \log \log x + \frac{1}{3} \log \log y}}$$

Nomogrammja három párhuzamos, egyvonalban kezdődő log log-skála, a középső $z$-skála kétszer olyan közel van $x$-hez, mint $y$-hoz.

$$\text{d)} \quad z = x + y - xy, \quad z_1 = 1 - y, \quad z_2 = 1 - x; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-y}},$$

ez (7)-alakú; $\frac{a}{b} = 1$, $F(t) = \int \frac{dt}{1-t} = -\log(1-t)$,

$$h(z) = \frac{f(x)}{z_1} = \frac{1}{(1-x)(1-y)} = \frac{1}{1-z}, \quad H(z) = \log(1-z),$$

$$z = 1 - e^{\log(1-x) + \log(1-y)},$$

tehát az (5) típushoz tartozik, asszociatív függvény; nomogrammja három egyvonalban kezdődő párhuzamos ekvidisztans log $(1-t)$-skála, a középső felényi léptekkel.

e) $z = \frac{x+y}{1-xy}$ (v. ö. 1. pont), $z_1 = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}$, $z_2 = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{1+y^2}},$$

ez (7) alakú, $\frac{a}{b} = 1$, $F(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t$, $h(z) = \frac{f(x)}{z_1} = \frac{1}{1+x^2}\,\frac{(1-xy)^2}{1+y^2}$

és mivel $\quad x = \frac{z-y}{1+y^2}$, $h(t) = \frac{1+y^2}{(1+yz)+(z-y)^2} = \frac{1}{1+t^2}$

$H(z) = \operatorname{arc\,tg} z$, $\quad z = \operatorname{tg}\,[\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y]$.

$z$ az (5) típushoz tartozik, asszociatív. Nomogrammja három egyvonalban induló ekvidisztans arc tg-skála, a középső felényi léptékkel.

$f)\quad z = \frac{x}{1+xy}$; $\quad z_1 = \frac{1}{(1+xy)^2}$, $\quad z_2 = -\frac{x^2}{(1+xy)^2}$, $\quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{x^2}$,

ez (37) alakú és $z(x, 0) = x$. (40) is fennállván, $z$-t a (6) alakban lehet írni és így kielégíti a (3) tranzláció-egyenletet.

$$F(t) = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t}, \qquad z = \frac{x}{1+xy} = \frac{1}{\dfrac{1}{x}+y}.$$

Nomogrammja három egyvonalban kezdődő ekvidisztans egyenes-skála, az $y$-egyenesen lineáris, az $x$-egyenesen reciprok, a $z$-egyenesen felényi léptékű reciprok skálával.

15. E cikkben megismertünk egy módszert, mely lényegesen megkönnyítette a függvényegyenletek megoldását, ha nem is tudta teljesen kiküszöbölni a próbálgatás szükségét és azt, hogy minden egyes függvényegyenlet megoldása új gondolatot igényel. Módszerünk lehetővé tette, hogy meghatározhassuk a függvényegyenletek megoldásfüggvényében és több más fontos függvénytípusban előforduló függvényeket, eldönthessük, hogy egy adott függvény beletartozik-e a függvénytípusok valamelyikébe, valamint, hogy ábrázolható-e egyenes nomogrammal és ha igen, milyennel.

Érdemes összefoglalásul még egyszer áttekinteni e függvényegyenletek történetének főbb fázisait : A gyakorlati életben, elsősorban a matematikai statisztikában szerepet játszó középértékekből matematikai absztrahálással keletkezett a középértékek axiómatikus elmélete, majd ennek analógiájára lehetővé vált néhány fontos — szintén axiomatikai jelentőségű — függvényegyenlet megoldása. Erre vonatkozóan több elvi jelentőségű tételt ad a függvényegyenletek elemi megoldási módszereinek elmélete. Azoknak a nehézségeknek enyhítésére, melyek a tételeknek megadott, konkrét függvényekre, tehát a matematikai gyakorlatra való alkalmazásánál felmerültek, továbbfejlesztettük az elméletet, összefüggést teremtettünk a parciális differenciálegyenletek elméletével és ennek váratlan eredményeképpen eredményeink alkalmazhatók lettek egy másik, a gyakorlati életben fontos szerepet játszó alkalmazott matematikai diszciplinára, a nomográfiára.

Kicsinyben azt figyelhettük itt meg, ami a matematika történetében állandóan megismétlődő szokásos jelenség ; a gyakorlati élet által felvett problémák megoldása céljából kifejlődött matematikai elméletek sorozatos absztrakció útján továbbfejlődnek, — erre a fejlődésre kedvezően hat a matematika más ágaival való kapcsolat megteremtődése és a matematikán belüli gyakorlat szükségleteinek szem előtt tartása — és azután ezt a kiszélesedett elméletet sikerrel lehet alkalmazni most már a gyakorlati élet által felvett problémák sokkal szélesebb körében is.

## О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ II.

ЯНОШ АЦЕЛЬ


### Резюме

Работа содержит решение функциональных уравнений (1), (2) и (3) путем их сведения на дифференциальные уравнения. В качестве применения получаются различные формы дифференциальных уравнений, характеризирующих функции, изображимые с номограммо из выравненных точек с тремя прямолинейными шкалами — (10), (9), (20), (24), (26), (27), (16).


## SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES À PLUSIEURS VARIABLES II.

J. ACZÉL


### RÉSUMÉ

Ce travail donne la discussion de la solution de quelques équations fonctionnelles [(1), (2), (3)] par réduction à des équations différentielles. Comme application de ce procédé, on obtient les différentes formes [(10), (9), (20), (24), (26), [27), (16)] des conditions d'équations différentielles qui caractérisent les fonctions capables d'être représentées par un nomogramme à trois échelles linéaires.