A BISZIMMETRIA FÜGGVÉNYEGYENLETÉHEZ

HOSSZÚ MIKLÓS (Miskolc)

ÖSSZEFOGLALÁS

Aczél János vetette fel azt a problémát, hogy milyen függvényegyenlet jellemzi az

$$M(x, y) = H[X(x) + Y(y)]$$

illetve az

$$m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c]$$

alakú függvényeket. E függvénytípusok érdekességét az adja, hogy három egyenes tartójú pontsoros nomogrammal ábrázolhatók, illetve függvényátlaguk kváziIineáris közép, vagyis a lineáris középbe (súlyozott számtani középbe) transzformálható. Az 1. §, ill. 2. § ezen problémák megoldását adja, amennyiben az 1. §-ban be van bizonyítva, hogy differenciálhatósági és szigorú monotonitási feltételek mellett

$$M[m(x, u), n(y, v)] = N[m(x, v), n(y, u)]$$

függvényegyenlet jellemzi az

$$M(x, y) = N(x, y) = H[X(x) + Y(y)]$$

$$m(x, y) = X^{-1} [f(x) + h(y)]$$

$$n(x, y) = Y^{-1}[g(x) + h(y)]$$

alakú függvényeket ; a 2. § annak bizonyítását adja, hogy az

$$M[m(x, u), m(y, v)] = N[m(x, y), m(u, v)]$$

függvényegyenlet folytonos és szigorúan monoton megoldásai az

$$M(x, y) = N(x, y) = G[a\, h(x) + b\, h(y) + c]$$

$$m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c],\ g(t) = h^{-1}(t)$$

alakú függvények és csak az ilyenek.

A jelen dolgozat célja, hogy két, az alkalmazásokban fontos kétváltozós függvényosztályt függvényegyenletekkel jellemezzen.

Az egyik a gyakorlatban legtöbbször előforduló három egyenes tártójú nomogrammal ábrázolható függvények osztálya, a másik azon függvényeké, melyekből átlagképzéssel $[F(z, z) = F(x, y)]$ ú. n. kvázilineáris közepeket, vagyis

$$z = f^{-1}[p\,f(x) + q\,f(y)], \; (p + q = 1)$$

alakú függvényeket kapunk.

Aczél János bizonyította be [1] azt, hogy folytonossági és szigorú monotonitási feltételek mellett egy $m(x, y)$ kétváltozós függvény kvázilinearitásához (tehát, hogy $m(x, y)$ felírható legyen

$$m(x, y) = f^{-1}[a\,f(x) + b\,f(y) + c]$$

alakban, ahol $f^{-1}(t)$ az $f(t)$ szigorúan monoton és folytonos függvény inverze, és a, b, c állandók) szükséges és elégséges az, hogy $m(x, y)$ biszimmetrikus legyen, azaz

$$m[m(x, u), m(y, v)] = m[m(x, y), m(u, v)].$$

Ő vetette fel azt a problémát, hogy milyen függvényegyenlettel lehetne jellemezni azokat a függvényeket, melyek pontsoros nomogrammja egyenesekből áll, vagy ami ezzel ekvivalens, a

$$z = H[X(x) + Y(y)]$$

alakú függvényeket [2].

Az 1. §-ban bebizonyítjuk, hogy a biszimmetria általánosításának tekinthető

$$M[m(x, u), n(y, v)] = N[m(x, v), n(y, u)]$$

függvényegyenletnek az M, N, m, n-ről tett szigorú monotonitási és differenciálhatósági feltételek mellett az

$$\begin{aligned} M(x, y) = N(x, y) &= H[X(x) + Y(y)] \\ m(x, y) &= X^{-1}[f(x) + h(y)] \\ n(x, y) &= Y^{-1}[g(x) + h(y)] \end{aligned}$$

függvények, és csak ilyenek tesznek eleget.

A 2. §-ban az ugyanott [2] felvetett másik problémával foglalkozunk, amennyiben a biszimmetria másik általánosításának tekinthető

$$M[m(x, u), m(y, v) = N[m(x, y), m(u, v)]$$

függvényegyenletről bebizonyítjuk folytonossági és szigorú monotonitási feltételek mellett azt, hogy jellemzi azokat az M, N, m függvényeket, amelyekből átlagképzéssel kvázilineáris közép nyerhető [2].

1. §.

Foglalkozzunk az

$$M[m(x, u), n(y, v)] = N[m(x, v), n(y, u)]$$

függvényegyenlettel, ahol az M, N, m, n kétváltozós függvényekről szigorú monotonitást és egyszeri differenciálhatóságot tételezünk fel.

Az $u = v$ helyettesítéssel látjuk, hogy $M \equiv N$. Így

$$M[m(x,u), n(y,v)] = M[m(x,v), n(y,u)]. \tag{I}$$

Ezt differenciálva parciálisan u szerint:

$$M_1[m(x,u), n(y,v)]\, m_2(x,u) = M_2[m(x,v), n(y,u)]\, n_2(y,u),$$

ahol az $_1$ index az első, a $_2$ index a második változó szerinti parciális deriváltat jelzi.

$u_0 = u = v$ helyettesítéssel és az

$$\begin{aligned} m(x,u_0) &= \varphi(x), \; m_2(x,u_0) = \Phi(x) \\ n(y,u_0) &= \psi(y), \; n_2(y,u_0) = \Psi(y) \end{aligned}$$

jelölések bevezetésével:

$$\frac{M_1[\varphi(x), \psi(y)]}{M_2[\varphi(x), \psi(x)]} = \frac{\Psi(y)}{\Phi(x)}.$$

Új x, y változókkal:

$$\frac{M_1(x,y)}{M_2(x,y)} = \frac{\Psi[\psi^{-1}(y)]}{\Phi[\varphi^{-1}(x)]}.$$

Az $\dfrac{1}{\Phi[\varphi^{-1}(x)]} = X'(x)$, $\dfrac{1}{\Psi(\psi^{-1}(y))} = Y'(y)$ jelöléssel:

$$\frac{M_1(x,y)}{M_2(x,y)} = \frac{X'(x)}{Y'(y)}.$$

Más alakban:

$$\begin{vmatrix} M_1(x,y), & M_2(x,y) \\ X'(x), & Y'(y) \end{vmatrix} = 0,$$

mely függvénydeterminánsa lévén az $M(x,y)$, $X(x) + Y(y)$ függvényeknek, azt jelzi, hogy e függvények egymástól nem függetlenek, tehát

$$M(x,y) = H[X(x) + Y(y)]$$

Helyettesítsük ezt (I)-be:

$$H\{X[m(x,u)] + Y[n(y,v)]\} = H\{X[m(x,v)] + Y[n(y,u)]\},$$

vagyis

$$X[m(x,u)] + Y[n(y,v)] = X[m(x,v)] + Y[n(y,u)],$$

mert hiszen H szigorúan monoton M monotonitása miatt.

Átrendezve és $\left.\begin{matrix} v = v_0 \\ y = y_0 \end{matrix}\right\}$-t rögzítve:

tehát

$$X[m(x, u)] = X[m(x, v_0)] + Y[n(y_0, u)] - Y[n(y_0, v_0)],$$
$$X[m(x, u)] = f(x) + h(u).$$

Hasonlóan, $\left.\begin{matrix} v = v_0 \\ x = x_0 \end{matrix}\right\}$ rögzítéssel :

$$Y[n(y, u)] = g(y) + k(u).$$

Összevetve azt nyertük, hogy (I)-et csak az

$$\begin{aligned} M(x, y) &= H[X(x) + Y(y)] \\ m(x, y) &= X^{-1}[f(x) + h(y)] \\ n(x, y) &= Y^{-1}[g(x) + k(y)] \end{aligned}$$

alakú függvények elégíthetik ki. Ezeket (I)-be helyettesítve látjuk, hogy

$$H[f(x) + h(u) + g(y) + k(v)] = H[f(x) + h(v) + g(y) + k(u)],$$

tehát

$$h(u) - k(u) = h(v) - k(v) = c,$$

kell legyen, tehát

$$h(t) = k(t) + c.$$

$$\begin{aligned} g^*(x) &= g(x) + c \\ n(x, y) &= Y^{-1}[g^*(x) + h(y)]. \end{aligned}$$

-vel

Így c beolvasztható $g(x)$-be, és *az általános megoldás*

$$\begin{aligned} N(x, y) = M(x, y) &= H[X(x) + Y(y)] \\ m(x, y) &= X^{-1}[f(x) + h(y)] \\ n(x, y) &= Y^{-1}[g(x) + h(y)] \end{aligned}$$

és ez valóban ki is elégíti (I)-et, qu. e. d.

2. §.

Két x, y mennyiségnek az $m(x, y)$ kétváltozós függvényre vonatkozó átlagának szokás nevezni azt az $A(x, y)$ mennyiséget, melyet az

$$m(x, y) = m(A, A)$$

egyenlet definiál.

Ha

$$m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c],$$

ahol g, f szigorúan monoton és folytonos függvények, akkor A kifejezhető f segítségével:

$$g[a\,f(x) + b\,f(y) + c] = g[a\,f(A) + b\,f(A) + c]\,,$$
$$a\,f(x) + b\,f(y) + c = (a+b)\,f(A) + c$$
$$A(x,y) = f^{-1}[p\,f(x) + q\,f(y)]\,,\ (p+q=1)\,,$$

tehát ez esetben az A függvényátlag *kvázilineáris közép*, s mint könnyű belátni, csak ez esetben, mert ha

$$m(A, A) = m(x, y)$$

ahol

$$A = f^{-1}\,[pf(x) + qf(y)],$$

akkor $m(A, A) = \varphi(A)$ jelöléssel:

$$m(x, y) = \varphi(A) = \varphi\{f^{-1}.[p\,f(x) + q\,f(y)]\} = g[a\,f(x) + b\,f(y) + c]\,,$$

ahol

$$g(t) = \varphi\{f^{-1}[(a+b)\,t + c]\}.$$

Bebizonyítjuk, hogy az

$$M[m(x,u)\,, m(y,v)] = N[m(x,y)\,, m(u,v)]$$

függvényegyenlet jellemzi azokat az M, N, m függvényeket, melyekből átlagképzéssel kvázilineáris közép nyerhető. Az M, N, m függvényekről csak folytonosságot és szigorú monotonitást tételezünk fel.

Az $y = u$ helyettesítésből $M \equiv N$ következik.

Az

$$M[m(x,u)\,, m(y,v)] = M[m(x,y)\,, m(u,v)] \tag{II}$$

egyenletben helyettesítsük $\left.\begin{matrix} x = u \\ y = v \end{matrix}\right\}$-t, és a már használt

$$m(t, t) = \varphi(t)$$

jelölés mellett vezessük be az

$$M(t, t) = \Phi(t)$$

függvényt, akkor

$$M[\varphi(x)\,, \varphi(y)] = M[m(x,y)\,, m(x,y)] = \Phi[m(x,y)]\,,$$
$$M(x,y) = \Phi\{m[\varphi^{-1}(x)\,, \varphi^{-1}(y)]\}.$$

Ezzel (II) így alakul:

$$\Phi(m\{\varphi^{-1}[m(x,u)]\,, \varphi^{-1}[m(y,v)]\}) = \Phi(m\{\varphi^{-1}[m(x,y))\,, \varphi^{-1}[m(u,v)]\}].$$

M szigorú monotonitása miatt Φ is szigorúan monoton, tehát az egyenlet mindkét oldalát behelyettesítve a

$$\varphi^{-1}[\Phi^{-1}(t)]$$

függvénybe, az

$$n(x, y) = \varphi^{-1}\,[m(x, y)]$$

jelöléssel az

$$n\,[n(x, u)\,,\, n(y, v)] = n\,[n(x, y)\,,\, n(u, v)]$$

(biszimmetria) függvényegyenletet nyerjük, melyet (a bevezetésben idézett tétel szerint) az

$$n(x, y) = f^{-1}\,[a\,f(x) + b\,f(y) + c]$$

kvázilineáris függvények (és csak ezek) elégítenek ki.

Tehát

$$m(x, y) = \varphi\,[n(x, y)] = \varphi\{\,f^{-1}\,[a\,f(x) + b\,f(y) + c]\,\},$$

továbbá

$$M(x, y) = \Phi\{\,h^{-1}\,[a\,h(x) + b\,h(y) + c]\,\},$$

ahol

$$h(t) = f\,[\varphi^{-1}(t)]\,.$$

Végeredményben a

$$\varphi\,[f^{-1}(t)] = g(t) = g(t)\,,\ \Phi\,[h^{-1}(t)] = G(t)$$

jelöléssel:

$$m(x, y) = g\,[a\,f(x) + b\,f(y) + c]\,;$$

$$N(x, y) = M(x, y) = G\,[a\,h(x) + b\,h(y) + c]\,,\ [g(t) = h^{-1}(t)]\,.$$

Hogy az ilyen alakú függvények kielégítik (II)-t, az behelyettesítéssel rögtön kitűnik, s ezzel a § elején tett észrevétel alapján minden bizonyítva van.

Megjegyzés: Ha $m(x, y)$-ről szimmetriát is feltételezünk [tehát, hogy $m(x, y) = m(y, x)$], akkor $a = b$, és az átlag kváziaritmetikai közép:

$$A(x, y) = f^{-1}\left[\frac{1}{2}\,f(x) + \frac{1}{2}\,f(y)\right].$$

A szimmetriát a (II) függvényegyenlet eltorzításával is elérhetjük, pl. az

$$M\,[m(x, u)\,,\, m(y, v)] = M\,[m(x, v)\,,\, m(u, y)]$$

függvényegyenlet tartalmazza m és természetesen ebből kifolyólag M szimmetriáját.

Az n függvény nemcsak biszimmetrikus, hanem reflexív is, mert

$$n(t, t) = \varphi^{-1}\,[m(t, t)] = \varphi^{-1}\,[\varphi(t)] = t\,;$$

ebből n-re az következik, hogy kvázilineáris közép,

$$n(x, y) = f^{-1}\,[p\,f(x) + q\,f(y)]\,,\ (p + q = 1)\,.$$

Ezt a bizonyítás során nem használtuk ki, mert nem volt rá szükség. Az m alakjának általánosságát ez nem csorbítja, mert az

$$m(x, y) = g[a\,f(x) + b\,f(y) + c]$$

alakú függvények mindig felírhatók

alakban, pl.

$$m(x, y) = g^*[p\,f(x) + q\,f(y)]\,,\quad (p + q = 1)$$

$$g^*(t) = g[(a + b)\,t + c]\text{-vel.}$$

IRODALOM

1. *Aczél J.:* On mean values, Bull. of the Amer. Math. Soc. 54 (1948) 392—400.
2. *Aczél J.:* Többváltozós függvényegyenletek. Visszavezetés parciális differenciálegyenletek megoldására. Alkalmazás a nomográfiában. E kötet 311—333. o.

К ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ БИСИММЕТРИИ

М. ГОССУ

Резюме

Я. Ацель поднял следующий вопрос: с каким функциональным уравнением характеризованы функции формы

$$M\,(x, y) = H\,[X(x) + Y(y)]$$

то есть

$$m\,(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c]$$

Достопримечательность этих типов функций основывается на факте, что они представляемы номограммой из выравненных точек с тремя прямолинейными шкалами и, с другой стороны, их средняя функциональная – средняя квазилинейная, т. е. она преобразуема в линейную среднюю (в среднюю арифметическую с весами). § 1. сотвественно § 2. дают решение этих проблем. В § 1. доказывается, что при условиях дифференцируемости и строгой монотонности, функции формы

$$M(x, y) = N(x, y) = H\,[X(x) + Y(y)]$$

$$m(x, y) = X^{-1}\,[f(x) + f(y)]$$

$$n(x, y) = Y^{-1}\,[g(x) + h(y)]$$

характеризованы функциональным уравнением

$$M\,[m(x, u), n(y, v)] = N\,[m(x, v), n(y, u)]$$

которое можно считать за обобщением бисимметрии; в § 2. доказывается, что непрерывным и строго монотонным решением функционального уравнения

$$M\,[m(x, u), m(y, v)] = N\,[m(x, y), m(u, v)]$$

являются функции формы

$$M\,(x, y) = N\,(x, y) = G\,[a\,h(x) + b\,h(y) + c]$$

$$m\,(x, y) = g\,[af(x) + bf(y) + c]$$

$$g(t) = h^{-1}(t)$$

и только эти.

CONTRIBUTION À LA THEORIE DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA BISYMMÉTRIE

M. HOSSZU

RÉSUMÉ

J. Aczél a posé le problème, quelle équation fonctionnelle caractérise les fonctions ayant la forme

$$M(x, y) = H[X(x) + Y(y)],$$

respectivement

$$m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c].$$

Ce qui rend ces typ s de fonctions intéressants, c'est qu'ils peuvent être représentés par des nomogrammes à trois échelles droites et que leur moyenne fonctionnelle est une moyenne quasi-linéaire, c'est-à-dire elle peut être transformée dans la moyenne linéaire (dans la moyenne arithmétique avec poids). Le § 1, resp. 2, donnent la solution de ces problèmes, puisque, dans le § 1, l'auteur démontre que sous les conditions de dérivabilité et de monotonie stricte, l'équation fonctionnelle

$$M[m(x, u), n(y, v)] = N[m(x, v), n(y, u)]$$

qui peut être considérée comme une généralisation de la bissymétrie, caractérise les fonctions ayant la forme

$$M(x, y) = N(x, y) = H[X(x) + Y(y)]$$

$$m(x, y) = X^{-1}[f(x) + h(y)]$$

$$n(x, y) = Y^{-1}[g(x) + h(y)].$$

Le § 2 fournit la démonstration du fait ques les solutions continues et strictement monotones de l'équation fonctionnelle

$$M[m(x, u), m(y, v)] = N[m(x, y), m(u, v)]$$

sont les fonctions ayant la forme

$$M(x, y) = N(x, y) = G[a\,h(x) + bh(y) + c]$$

$$m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c],\ g(t) = h^{-1}(t)$$

et seulement les fonctions de cette forme.

AZ OSZTÁLY MUNKATÁRSAINAK AZ OSZTÁLY MUNKÁJÁNAK EREDMÉNYEIT TARTALMAZÓ, MÁSUTT MEGJELENT DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

Hajós György: A nomográfia alkalmazhatóságának határairól. MTA III. o. Közleményei I. 1. 268–274.

Rényi Alfréd: A Newton-féle gyökközelítő eljárásról. Matematikai Lapok, (1950) 1–16. o.