

A SZINGULÁRIS INTEGRÁLEGYENLETEK EGY OSZTÁLYÁRÓL

FENYŐ ISTVÁN

ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk felhasználja A. M. Efrosz egy tételét bizonyos integrálatalakítások Laplace-transzformáltjairól Efrosz tétele által jellemzett magokkal rendelkező szinguláris első és másodfajú integrálegyenletek megoldására. Az eljárást két, a matematikai fizikában fellépő integrálegyenletre mutatja be a dolgozat.

A. M. Efrosz 1942-ben bebizonyította a következő tételt: ([1], [2]) $\varphi(t)$ és $k(t, \tau)$ valós változós függvények a $0 \leq t, \tau < \infty$ számközben legyenek értelmezve és legyenek olyanok, hogy mindkettő Laplace-transzformáltja létezzék (valamely komplex p -től jobbra eső félsíkban, a transzformációt a t változó szerint képezve). Legyen

$$L\{\varphi\} = \Phi(p); \quad L\{k(t, \tau)\} = K(p, \tau) = F(p)e^{-\tau\xi(p)},$$

ahol $F(p)$ és $\xi(p)$ nem függenek τ -tól. Akkor

$$L\left\{\int_0^\infty k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau\right\} = F(p) \Phi[\xi(p)].$$

Ez a tétel kiválóan alkalmas arra, hogy Laplace-transzformáció segítségével bizonyos szinguláris első és másodfajú lineáris integrál- és integrodifferenciálegyenleteket megoldjunk, köztük olyanokat is, melyek gyakorlati szempontból fontosak. Tudomásunk szerint Efrosz tételét ilyen célokra még nem használták fel.

Ezzel kapcsolatban az első felmerülő kérdés az, melyek azok a magok, melyek Efrosz tételének eleget tesznek.

Két függvény $u(t)$ és $v(t)$ konvolúcióját jelöljük $u*v$ -vel, vagyis

$$u*v = \int_0^t u(t-\tau) v(\tau) d\tau$$

továbbá

$$v^2 = \int_0^t v(t-\tau) v(\tau) dt; \quad v^n = \int_0^t v^{n-1}(t-\tau) v(\tau) d\tau.$$

Ezzel a jelöléssel

$$\begin{aligned} L_t \{k(t, \tau)\} &= K(p, \tau) = F(p) e^{-\tau \xi(p)} = F(p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \tau^n \xi(p)^n = \\ &= F(p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \tau^n L \{v(t)^n\} = L \left\{ u * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \tau^n v^n \right\}, \end{aligned}$$

ahol

$$L \{u\} = F(p); \quad L \{v\} = \xi(p).$$

Igy tehát nyerjük a $k(t, \tau)$ mag alakjára — feltéve, hogy az előbbi sorfejtésben a szumma-jel és integrál-jel felcserélhető — a következőt:

$$k(t, \tau) = u * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \tau^n v^n.$$

A

$$\lambda(t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \tau^n v^n$$

kétváltozós mag a következő integrálegyenlet általános megoldása [3]

$$(1) \quad \int_0^t \lambda(t-s, \tau) \lambda(s, \mu) ds = \lambda(\tau + \mu, t).$$

Az ilyen $\lambda(t, \tau)$ magok igen fontos szerepet játszanak számos integrodifferenciálegyenlet megoldásánál [4], továbbá a valószínűesszámitásban. Ennek segítségével lehet részletesebben jellemezni az Efrosz-típusú magokat, de ebbe a kérdésbe ezúttal részletesebben nem bocsátkozunk. Itt csak megjegyezzük, hogy az Efrosz-típusú magok általános alakja ilyen:

$$k(t, \tau) = u * \lambda(t, \tau),$$

ahol λ az (1) egyenlet egy tetszőleges megoldása, u egy akármilyen függvény.

Ha Efrosz előbb idézett tételét szinguláris első és másodfajú integrálegyenletekre alkalmazzuk, akkor ezek az integrálegyenletek közönséges függvényegyenletekbe mennek át. Néha ezek a függvényegyenletek könnyen megoldhatók.

Lássuk először az elsőfajú integrálegyenletek megoldási elvét. A szóbanforgó integrálegyenlet legyen ilyen alakú:

$$\int_0^{\infty} k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = l(t),$$

ahol $l(t)$ adott, φ az ismeretlen függvény. Képezzük mindkét oldal Laplace-transzformáltját:

$$F(p) \Phi[\xi(p)] = L(p).$$

Tegyük fel, hogy $\xi(p)$ -nek van egyértékű inverze (a transzformáció konvergenziaabszcisszájától jobbra eső félsíkban) és legyen $\xi(p) = \eta$ inverz függvénye $p = h(\eta)$, akkor

$$\Phi(\eta) = \frac{L(h(\eta))}{F(h(\eta))}.$$

Ha $\Phi(\eta)$ -ra alkalmazható a Riemann—Mellin transzformáció, akkor $\Phi(\eta)$ -ra alkalmazott inverz Laplace-transzformált szolgáltatja az egyenlet keresett megoldását.

Hasonló elv alapján történhetik a másodfajú egyenletek megoldása is. A megoldandó egyenlet legyen

$$\varphi(t) + \lambda \int_0^{\infty} k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = l(t)$$

alakú. Ha mindkét oldal Laplace-transzformáltját képezzük, úgy a

$$\Phi(p) + \lambda F(p) \Phi(\xi(p)) = L(p)$$

függvényegyenlethez jutunk. Ha ezt sikerül $\Phi(p)$ -re megoldani és a megoldás olyan, hogy inverz Laplace-transzformáltja létezik, akkor ez szolgáltatja az integrálegyenlet megoldását. Különösen érdekes az az eset, mikor $\xi(p)$ olyan, hogy saját inverzével azonos, vagyis $\xi(\xi(p)) = p$. Ekkor ugyanis p helyébe $\xi(p)$ -t behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\Phi(\xi(p)) + \lambda F(\xi(p)) \Phi(p) = L(\xi(p)).$$

Ebből és az előbbi egyenletből $\Phi(\xi(p))$ -t kiküszöbölve azt kapjuk, hogy

$$\Phi(p) = \frac{L(p) - \lambda F(p) L(\xi(p))}{1 - \lambda^2 F(p) F(\xi(p))} = [L(p) - \lambda F(p) L(\xi(p))] \frac{1}{1 - \lambda^2 F(p) F(\xi(p))}.$$

Hátra van $\Phi(p)$ -t visszatranszformálni. Az első tényező visszatranszformálása igen könnyű. Az első tényező ugyanis ennek a függvénynek a Laplace-transzformáltja:

$$l(t) - \lambda \int_0^{\infty} k(t, \tau) l(\tau) d\tau.$$

Tegyük fel, hogy a második tényezőt is sikerül visszatranszformálni és ez a visszatranszformált legyen $s(t)$, vagyis

$$L\{s(t)\} = \frac{1}{1 - \lambda^2 F(p) F(\xi(p))} = S(p),$$

akkor a kitűzött integrálegyenlet megoldása:

$$\varphi(t) = s(t) * l(t) - \lambda \int_0^{\infty} k(t, \tau) l(\tau) d\tau.$$

Teljesen hasonló elv alapján lehet Efrosz tételét alkalmazni integró-differenciál-egyenletek megoldására is. Ha például az egyenlet alakja ilyen

$$\varphi^{(n)}(t) + \lambda \int_0^\infty k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = l(t),$$

akkor ennek az egyenletnek Laplace-transzformáltját véve, a következő egyenletre jutunk:

$$p^n \Phi(p) - p^{n-1} \varphi(0) - p^{n-2} \varphi'(0) - \dots - \varphi^{(n-1)}(0) + \lambda F(p) \Phi(\xi(p)) = L(p).$$

Ha ebből az előbbi módon meghatározzuk $\Phi(p)$ -t és alkalmazzuk rá az inverz Laplace-transzformációt, nyerjük a kitűzött egyenlet megoldását.

Lássunk az előbbiekre néhány példát és alkalmazást.

1. Tekintsük a

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\tau}) \varphi(\tau) d\tau = l(t)$$

integrálegyenletet, ahol J_0 jelenti a 0 indexű elsőfajú Bessel-féle függvényt $l(t)$ pedig tetszőleges adott függvény. Mivel [5]

$$L_t \{ J_0(2\sqrt{t\tau}) \} = \frac{1}{p} e^{-\frac{\tau}{p}},$$

azért $F(p) = \frac{1}{p}$; $\xi(p) = \frac{1}{p}$. Alkalmazva az előbbieket, nyerjük a

$$\Phi(p) - \lambda \frac{1}{p} \Phi\left(\frac{1}{p}\right) = L(p)$$

függvényegyenletet. Írjunk p helyébe $\frac{1}{p}$ -t:

$$\Phi\left(\frac{1}{p}\right) - \lambda p \Phi(p) = L\left(\frac{1}{p}\right).$$

Ebből $\Phi\left(\frac{1}{p}\right)$ -t helyettesítsük az előbbibe, kapjuk, hogy

$$\Phi(p) = \frac{pL(p) + \lambda L\left(\frac{1}{p}\right)}{(1 - \lambda)p},$$

feltéve, hogy $\lambda \neq 1$. Ha történetesen például $l(t) = \sin t$, akkor $L(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$ és így

$$\Phi(p) = \frac{1}{1 - \lambda} \frac{1 + \lambda p}{p^2 + 1}.$$

Ha ezt visszatranszformáljuk, nyerjük a

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\tau}) \varphi(\tau) d\tau = \sin t$$

integrálegyenlet megoldását $\lambda \neq 1$ mellett:

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-\lambda} \sin t + \frac{\lambda}{1-\lambda} \cos t.$$

Az előbbiekből látható, hogy $\lambda = 1$ a $J_0(2\sqrt{t\tau})$ mag sajátértéke. Egyik sajátfüggvénye könnyen meghatározható. Ha u. is $\lambda = 1$, akkor

$$\Phi\left(\frac{1}{p}\right) = p\Phi(p).$$

Ennek a függvényegyenletnek egyik megoldása $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$. Egyenletünk egyik sajátfüggvénye tehát

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

2. Oldjuk meg a következő elsőfajú integrálegyenletet:

$$\int_0^{\infty} \int_{\frac{\tau}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} \varphi(\tau) d\xi d\tau = l(t).$$

A szokásos

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

jelöléssel

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} \operatorname{erf} \frac{\tau}{2\sqrt{t}} \varphi(\tau) d\tau = l(t).$$

Mivel [6]

$$L\left\{\operatorname{erf} \frac{\tau}{2\sqrt{t}}\right\} = \frac{1}{p} e^{-\tau\sqrt{p}},$$

itt $F(p) = \frac{1}{p}$; $\xi(p) = \sqrt{p}$, tehát Efrosz tétele szerint

$$\frac{1}{p} \Phi(\sqrt{p}) = L(p),$$

ebből

$$\Phi(p) = p^2 L(p^2).$$

Ha erre alkalmazzuk az inverz Laplace-transzformációt, nyerjük egyenletünk megoldását.

3. Az előbb vázolt módszer több gyakorlati probléma numerikus megoldására is alkalmazható. Vegyük például a diffúzió differenciálegyenlet leg-egyszerűbb alakját, mikor is a diffúzió csak egy irányban történik. Ha a választott koordináta-rendszer X -tengelye a diffúzió irányába mutat, a helykoordinátát x -el, az időkoordinátát t -vel, a keresett koncentrációt $c(x, t)$ -vel jelöljük, akkor érvényes a Fick-féle II. differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

ahol D egy, az időtől és helytől független állandó, az ú. n. diffúziós állandó. Ismeretes, hogy ennek az egyenletnek az általános megoldása [7]

$$(2) \quad c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(\tau+x)^2}{4Dt}}}{\sqrt{4Dt}} \varphi(\tau) d\tau$$

alakú, ahol $\varphi(\tau)$ egy tetszőleges függvény. Ezt úgy kell meghatározni, hogy bizonyos kezdeti feltételek teljesüljenek. Így tehát a probléma egy integrálegyenlet megoldását jelenti, ha a koncentráció egy adott x helyen ismert mint az idő függvénye.

Legyen a rögzített h helyen a koncentráció ismert:

$$c(h, t) = g_h(t)$$

és megoldandó a

$$g_h(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\tau-h)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(\tau+h)^2}{4Dt}}}{\sqrt{4Dt}} \varphi(\tau) d\tau$$

integrálegyenlet. Egyszerűség kedvéért legyen $4Dt = T$ és $g_h\left(\frac{T}{4D}\right) = \gamma_h(T)$.

Ezzel a jelöléssel egyenletünk a következő alakot ölti:

$$\gamma_h(T) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\tau-h)^2}{T}} - e^{-\frac{(\tau+h)^2}{T}}}{\sqrt{T}} \varphi(\tau) d\tau.$$

Vegyük figyelembe azt, hogy [8]

$$L_T \left\{ \frac{e^{-\frac{(\tau+h)^2}{T}}}{\sqrt{T}} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} e^{-2(\tau+h)\sqrt{p}},$$

tehát

$$F(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} e^{-2h\sqrt{p}} \quad \text{és} \quad \xi(p) = 2\sqrt{p}$$

ezért

$$\frac{1}{\sqrt{p}} [e^{2h\sqrt{p}} - e^{-2h\sqrt{p}}] \Phi(2\sqrt{p}) = \Gamma_h(p),$$

ahol $L\{\gamma_h(T)\} = \Gamma_h(p)$.

Ebből

$$\Phi(p) = \frac{p\Gamma_h\left(\frac{p^2}{4}\right)}{4 \operatorname{sh}(hp)}.$$

Ennek alapján

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{p\Gamma_h\left(\frac{p^2}{4}\right)}{4 \operatorname{sh}(hp)} e^{p\tau} dp,$$

és így a koncentráció, mint a hely és idő függvénye

$$c(x,t) = \frac{1}{2\pi^{3/2}j} \int_0^\infty \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(\tau+x)^2}{4Dt}}}{\sqrt{4Dt}} e^{p\tau} \frac{p\Gamma_h\left(\frac{p^2}{4}\right)}{4 \operatorname{sh}(hp)} dp d\tau.$$

Lássunk egy konkrét példát. Legyen valamely helyen a koncentráció növekedés az idővel arányos, vagyis

$$g_h(t) = \alpha t,$$

$$\text{akkor } \gamma_h(T) = g_h\left(\frac{T}{4D}\right) = \frac{\alpha}{4D} T, \quad \text{és így} \quad \Gamma_h = \frac{\alpha}{4D} \frac{1}{p^2}.$$

Ennélfogva

$$\Gamma_h\left(\frac{p^2}{4}\right) = \frac{4\alpha}{D} \frac{1}{p^4}$$

és ezért

$$\Phi(p) = \frac{p \frac{4\alpha}{D} \frac{1}{p^4}}{4 \operatorname{sh}(hp)} = \frac{\alpha}{D} \frac{e^{-hp}}{p^2} \cdot \frac{1}{p} \frac{e^{hp}}{\operatorname{sh} hp} = \frac{\alpha}{D} \frac{1}{p} \cdot \frac{e^{-hp}}{p} \cdot \frac{1}{p} \frac{1}{1 - e^{2hp}}.$$

Ismeretes, hogy

$$L\{f_h(t)\} = \frac{e^{-hp}}{p},$$

ahol

$$f_h(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < h \\ 1, & \text{ha } t > h \end{cases}$$

és így

$$\frac{1}{p} \frac{e^{-hp}}{p} = L \left\{ \int_0^t f_h(\tau) d\tau \right\}.$$

f_h definíciója alapján

$$v_h(t) = \int_0^t f_h(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < h \\ t - h, & \text{ha } t > h. \end{cases}$$

Másrészt viszont az a függvény, melynek Laplace-transzformáltja $\frac{1}{p} \frac{1}{1 - e^{2hp}}$ az a következőképpen definiált függvény [9]

$$U_h(t) = n + 1, \text{ ha } 2hn < t < 2h(n + 1).$$

A konvolúció tétele alapján tehát

$$\varphi(t) = \frac{\alpha}{D} U_h * v_h = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < h \\ \frac{\alpha}{D} \left(\frac{h^2}{2} + 4h^2 \sum_{k=1}^n (k+1) + \frac{n+2}{2} [(t-h)^2 - (2n+1)h^2] \right), & \text{ha } t > h. \end{cases}$$

Ezért a keresett koncentráció a (2) formula alapján explicite kiszámítható.

Megjegyezzük, hogy ennél a speciális esetenél alkalmazott számolási eljárás az általános esetre is alkalmazható és a koncentráció az az előbbihez hasonló alakban is felírható.

IRODALOM

- [1] A. M. Ефрос: Математический Сборник (Rec. Math. Moscou) 1942. 669. o.
- [2] M. J. Kontorovics: Operátorszámítás, 1952. 116. o.
- [3] Volterra—Péres: Leçons sur la composition. Paris, 1924. 22. o.
- [4] V. Volterra: Leçons sur les fonctions de lignes. 126. o.
- [5] G. Doetsch: Tabellen zur Laplace-transformation. 1947. 105. o.
- [6] l. [5] 105. o.
- [7] Alexits—Fenyő: Matematika vegyészek számára. 1951. 337. o.
- [8] l. [2]. 201. o.
- [9] l. [5] 112. o.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. ФЕНЬЕ

Резюме

Работа пользуется известной теоремой А. М. Эфроса о преобразованиях Лапласа некоторых интегральных трансформацией для решения сингулярных интегральных уравнений первого и второго рода, обладающих ядрами, характеризуемыми теоремой Эфроса. Работа покажет метод на двух интегральных уравнениях математической физики.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES SINGULIÈRES

E. FENYŐ

Résumé

L'article fait usage d'un théorème de A. M. Efros concernant les transformées de Laplace de certaines transformations intégrales pour résoudre des équations intégrales singulières du premier et du second genre, avec des noyaux caractérisés par le théorème d'Efros. L'article présente la méthode pour deux équations intégrales de la physique mathématique.