

PÁRHUZAMOS ELEKTROMOS VEZETÉK MÁGNESES TERÉNEK SZÁMÍTÁSÁRÓL

I. rész

FREUD GÉZA

ÖSSZEFOGLALÁS

Két párhuzamos μ_1 ill. μ_2 mágneses permeabilitású hengerben I ill. $-I$ áram folyik, a környező közeg μ_0 permeabilitású szigetelő. Megengedjük, hogy az áram az időben változzék, de kikötjük, hogy az egyik vezetőkben folyó áram ne befolyásolja számottevően az árameloszlást a másik vezetőkben.

Vezessük be az alábbi jelöléseket: O_0 jelenti az első vezetők henger középvonalát; O_1 jelentse O_0 -nak a második hengerre képezett inverz egyenesét, O_2 az O_1 -nek az első hengerre képezett inverz egyenesét, s. i. t. Ω_0 jelentse a második henger középvonalát és ebből az előbbihez hasonlóan kapjuk $\Omega_1, \Omega_2 \dots$ -t. Jelentse $H(P)$ a P egyenes mentén folyó egységnyi intenzitású, vonalszerű áram mágneses terét az üres térben. Akkor a mágneses teret a két vezetők közti térben a (21) képlet szolgáltatja. Ugyanakkor a mágneses tér a vezetők belsejében:

$$H_1 = H_{01} + H_v, \quad H_2 = H_{02} + H_w$$

ahol H_{01} , ill. H_{02} a vezetők belsejében a saját áramától származó tér a másik vezetők távollétében és a H_v, H_w járulékos tereket a (22), (23) képlet adja meg. Az I_n, I_n, J_n, J_n tüköráramok értéke az $1a-3b$ táblázatok harmadik rovatában olvasható le, ξ_1, ξ_2, η_1 és η_2 értékét a (7) képlet adja.

A (21), (22), (23) sorok olyan geometriai sorral majorizálhatók, melynek hányadosa $\xi, \xi_2 q$, ahol q a geometria elrendezéstől függő állandó. Ha a két henger sugara sokkal kisebb, mint középvonalaik távolsága, akkor $q \ll 1$.

Bevezetés

Párhuzamos elektromos vezeték mágneses terét és önindukcióját a technikában egy olyan közelítéssel szokás számolni, amely lényegében *Maxwell*-től [4] származik. Ez az eljárás az alábbi elhanyagolásokból indul ki:

1. Elhanyagolja, hogy egy vezetők belüli áramelemek kölcsönhatása következtében az áramsűrűség a vezetők középvonalától mért távolság függvényében változik. Ezt a jelenséget a továbbiakban sugárirányú áramkiszorításnak nevezzük.

2. Elhanyagolja, hogy a két vezetőkben folyó áramok kölcsönhatása következtében az egyes vezetőknek a másik vezetőkhez közelebb eső helyén nagyobb az áramsűrűség, mint a másik vezetőtől távolabb. Ezt a jelenséget a továbbiakban keresztirányú áramkiszorításnak nevezzük.

3. Elhanyagolja a mágneses erővonalak törését a vezető és a környező homogén közeg határán.

A sugárirányú és keresztirányú áramkiszorítás természetesen csak akkor lép fel, ha a vezetékben váltóáram folyik. Mindhárom elhanyagolás kiküszöbölésével *G. Mie* [5] végzett számítást. Számítása rendkívül bonyolult és eredményét az önindukcióra csak arra az esetre sikerült áttekinthető alakra hoznia, ha a mágneses erővonalak törését vagy teljesen elhanyagolja, vagy igen nagy permeabilitás esetén közelítéssel veszi számításba. *Mie* számítását *G. Jaumann* és *J. Jaumann* egyszerűsítette, ez az egyszerűsített számítás *A. Sommerfeld* [8] könyvében jelent meg. Számításuk azonban abból a feltevésből indul ki, hogy a vezetők anyagának vezetőképessége végtelen nagy és így az áram a vezetőknek csak a felületén terjed. Ilyen feltételek mellett sorfejtést adnak a mágneses térerősségre, önindukciószámítást nem végeznek. Egy, a felsoroltaktól eltérő számítási módszert *G. Gentile jr.* [1] és *T. Magri* [3] javasoltak, de a nagy számítástechnikai nehézségek miatt nem sikerült azt a végeredményekig követni.

Alábbi megfontolásaink alapja az a *Mie*-től származó megállapítás, hogy a keresztirányú áramkiszorítás a szokásos elrendezéseknél, amikor is a két vezető távolsága nagy a vezetők sugarához képest, elhanyagolható, ha az áram frekvenciája nem túl nagy. Megmutatjuk, hogy a mágneses tér és az önindukció együttható egyszerű eszközökkel, áttekinthető alakban kifejezhető, ha a keresztirányú áramkiszorítást csak mint korrekciós tagot vesszük számításba. Eredményünk nagy permeabilitású (ferromágneses) vezetékanyag esetén is érvényes, amíg a mágneses térerősség ingadozása a mágnesezési görbe lineáris szakaszára esik. A végeredmény szigorúan érvényes, elhanyagolás nélkül abban az esetben, ha az áram frekvenciája zérus, és igen jó közelítést szolgáltat alacsony frekvenciák esetén. Számításunk egész menetében a kvázistacionárius esetre szorítkozunk, mert igen nagy frekvenciák esetén a keresztirányú áramkiszorítás nem hanyagolható el. Igen nagy frekvenciák esetén a *G. Jaumann* és *J. Jaumann* által kidolgozott közelítő számítás használható. Az alábbiakban a mágneses tér számítását ismertetjük. Az önindukció együttható meghatározását, valamint a keresztirányú áramkiszorításból származó korrekciós tag számítását jelen dolgozat ugyanezen a helyen megjelenő folytatásában fogjuk ismertetni.

I. Áramfonal mágneses tere mágneseződő homogén henger jelenlétében

Az a sugarú, μ_1 permeabilitású V vezetőhenger tengelyétől R távolságban, a hengerrel párhuzamosan I intenzitású vonalszerű áram folyik. Határozzuk meg a mágneses teret, ha a hengeren kívül az egész teret μ_0 permeabilitású homogén közeg tölti ki. Kimutatjuk, hogy a hengeren kívül a henger mágneseződése útján létrejött járulékos mágneses tér helyettesíthető két, a hengerrel párhuzamos I_1 és I_1^* vonalszerű áram mágneses terével. Ha a mágneses teret keltő I áram egyenese az a sugarú k keresztmetszetkör síkját az Ω pontban metszi, akkor az I_1 vonalszerű áram egyenese a keresztmetszet síkot Ω -nak k -ra vonatkozó Ω_1 inverz pontjában metszi, melynek távolsága a k kör 0 középpontjától a^2/R . Az I_1^* áram a V henger tengelyében folyik. Ugyanakkor a V henger belsejében olyan mágneses tér keletkezik, mintha az I áram helyén csak I' áram folyna és az egész teret homogén μ_1 permeabilitású közeg töltene

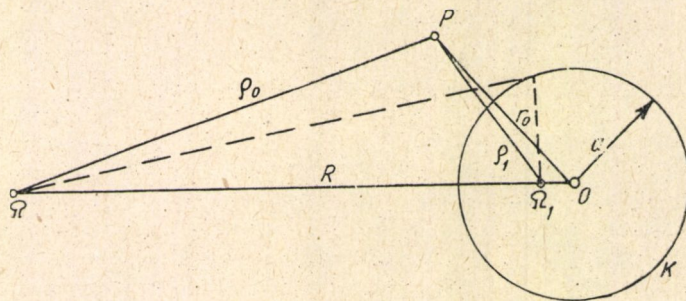
ki. Feltételünk szerint a mágneses tér vektorpotenciálja a V henger tengelyével párhuzamos és értéke*

$$(1a) \quad A = \frac{2\mu_0}{c} [I \log \varrho_0 + I_1 \log \varrho_1 + I_1^* \log r_0]$$

a V hengeren kívül ;

$$1b) \quad A = \frac{2u_1}{c} I' \log \varrho_0 + C$$

a V hengeren belül.



1. ábra

A ϱ_0 , ϱ_1 , r_0 távolságok jelentése az 1. ábrából leolvasható. (c a fénysebesség.) Az I_1 , I_1^* , I' , C állandókat annak alapján számíthatjuk, hogy egyrészt a $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{H}$ mágneses indukció normális komponense, másrészt a $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}$ mágneses térerősség érintőirányú komponense a V henger határán folytonos. Ebből következik, hogy

$$(2) \quad (A)_{r=a} = (A')_{r=a}$$

$$(3) \quad \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A'}{\partial r} \right)_{r=a}.$$

Vezessük be az 1. ábra szerint az (R_0, φ) polárkoordinátarendszert, akkor

$$(4) \quad \varrho_0 = (R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \varphi)^{1/2}, \quad \varrho_1 = \left(\frac{a^4}{R^2} + R_0^2 - 2 \frac{a^2}{R} R_0 \cos \varphi \right)^{1/2}$$

és egyszerű, bár hosszadalmas számítással meggyőződhetünk róla, hogy (1), (2), (3), (4) teljesül, ha

$$(5) \quad C = -\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0^*} I \log R$$

* I_1, I^*, I' és A pozitív irányát azonos értelműen vesszük fel.

$$(6) \quad I_1 = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} I = -I^*; \quad I' = \frac{2\mu_0}{\mu_1 + \mu_0} I$$

és könnyen meggyőződhetünk róla, hogy az ennek alapján számított mágneses tér a valóságos árameloszlással minden zárt görbére kielégíti az $\oint \mathbf{H} ds = \frac{4\pi}{c} I_{\text{hurkolt}}$ gerjesztési törvényt. Ezzel feltételünk helyességét igazoltuk.

II. Párhuzamos vezeték mágneses terének számítása

A könnyebb áttekintés érdekében a jelöléseket az első fejezethez illesztjük. A két párhuzamos körhenger alakú vezető legyen V és W , keresztmetszet-köreik legyenek k és κ , ezek középpontja $0 \equiv 0_0$ és $\Omega \equiv \Omega_0$, sugaraik a és α , mindkét hengert egy-egy homogén vezetőközeg tölti ki, melyek mágneses permeabilitása μ_1 , ill. μ_2 . A V -ben folyó áram legyen I , a W -ben folyó áram legyen $J = -I$. Az 0 pontnak κ -ra vonatkozó inverze legyen 0_1 , 0_1 -nek k -ra vonatkozó inverze legyen 0_2 , $\dots$ 0_{2k-1} -nek k -ra vonatkozó inverze legyen 0_{2k} , 0_{2k} -nak κ -ra vonatkozó inverze legyen 0_{2k+1} , $\dots$ s. i. t. Hasonlóan Ω -nak k -ra vonatkozó inverze legyen Ω_1 , Ω_1 -nek κ -ra vonatkozó inverze legyen Ω_2 , $\dots$ Ω_{2k-1} -nek κ -ra vonatkozó inverze legyen Ω_{2k} , Ω_{2k} -nak k -ra vonatkozó inverze legyen Ω_{2k+1} , $\dots$ s. i. t. A továbbiakban a rövidség kedvéért az 0_k , ill. Ω_k -n átmenő, a V és W hengerek tengelyével párhuzamos egyeneseket is 0_k , ill. Ω_k -val fogom jelölni.

A bevezetésben tárgyalt módon a keresztirányú áramkiszorítást elhanyagolva, a vezetőkben olyan áramsűrűségeloszlás alakul ki, mintha a másik vezető nem volna jelen; a tengelytől mért távolságot r -rel jelölve, az áramsűrűség arányos (Gauss-féle mértékrendszerben számolva)

$$J_0 \left(\sqrt{i} \sqrt{4\pi\sigma\mu\omega} \frac{r}{c} \right)$$

-vel, ahol σ a vezető anyagának vezetőképessége és ω az áram körfrekvenciája. Ez az áram (szintén a másik vezető hatásának elhanyagolásával) ugyanebben a vezetőben olyan mágneses teret kelt, melynek erővonalai a vezető tengelyével koncentrikus körök, és a mágneses térerősség arányos

$$J_0' \left(\sqrt{i} \sqrt{4\pi\sigma\mu\omega} \frac{r}{c} \right)$$

-vel. (V. ö. Joos [2] 287–289. o.; Simonyi [7] 231–239 o.; Novobátzky–Neugebauer [6] 117–118. o.) A továbbiakban számításaink áttekinthetőségének megkönnyítése céljából csak az erre szuperponálódó járulékos belső mágneses teret fogjuk feltüntetni. Az eredő mágneses teret nyilván megkapjuk, ha az I áram által keltett mágneses térre szuperponáljuk a J áram által keltett mágneses teret; számítsuk ki pl. az I áram mágneses terét.

A V vezetőhengeren kívül, tekintettel arra, hogy az áramsűrűség eloszlása a vezető keresztmetszetében radiálisan szimmetrikus, a mágneses tér úgy

számítható, mintha az egész $I \equiv I_0$ áram 0_0 -ba lenne koncentrálva. Az előző fejezet eredménye szerint első közelítésben a mágneses tér W belsejében egy 0_0 -on átfolyó $I'_0 = \frac{2\mu_0}{\mu_2 + \mu_0} I \equiv \xi_2 I$ áramtól származtatható, és a két vezető közti térben első közelítésben I_0 mágneses terére olyan mágneses tér szuperponálódik, mely 0_1 , ill. Ω_0 -on átfolyó $I_1 = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_2 + \mu_0} I \equiv \xi_2 I$, ill. $I_1^* = -I_1$ áramoktól származtatható. Ebből a második közelítést úgy kapjuk, hogy most már ezen látszólagos I_1 és I_1^* áramok által a V vezetőhengerben keltett látszólagos áramokat is számításba vesszük. Fontos megjegyeznünk, hogy az I_1 és I_1^* által 0_0 -ban keltett látszólagos áramok egymást lerontják és ez a magasabb közelítéseknél ismétlődik, ami eredményeinket egyszerűsíti. Az itt vázolt sorozatos közelítést minden határon túl folytatva, eredményünket az alábbi sémába foglalhatjuk:

1a táblázat A két vezető között : áram			2a táblázat A V vezetőben : áram			3a táblázat A W vezetőben : áram		
elnevezése	egyene- nese	intenzitása	elnevezése	egyene- nese	intenzitása	elnevezése	egyene- nese	intenzitása
I_0	0_0	I	I'_1	0_1	$\eta_1 \xi_2 I$	I'_0	0_0	$\eta_2 I$
I_1	0_1	$\xi_2 I$	$I^{*'}_1$	Ω_0	$-\eta_1 \xi_2 I$	I'_2	0_2	$\eta_2 \xi_1 \xi_2 I$
I_1^*	Ω_0	$-\xi_2 I$	I'_3	0_3	$\eta_1 \xi_1 \xi_2^2 I$	I^*_2	Ω_1	$-\eta_2 \xi_1 \xi_2 I$
I_2	0_2	$\xi_1 \xi_2 I$	$I^{*'}_3$	Ω_2	$-\eta_1 \xi_1 \xi_2^2 I$	.	.	.
I^*_2	Ω_1	$-\xi_1 \xi_2 I$	.	.	.	.	.	.
I_3	0_3	$\xi_1 \xi_2^2 I$	.	.	.	.	.	.
I^*_3	Ω_2	$-\xi_1 \xi_2^2 I$	.	.	.	I'_{2n}	0_{2n}	$\eta_2 \xi_1 \xi_2^n I$
.	.	.	I'_{2n+1}	0_{2n+1}	$\eta_1 \xi_1 \xi_2^{n+1} I$	$I^{*'}_{2n}$	Ω_{2n-1}	$-\eta_2 \xi_1 \xi_2^n I$
.	.	.	$I^{*'}_{2n-1}$	Ω_{2n}	$-\eta_1 \xi_1 \xi_2^{n+1} I$	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
I_{2n}	0_{2n}	$\xi_1 \xi_2^n I$	.	.	.	.	.	.
I^*_{2n}	Ω_{2n-1}	$-\xi_1 \xi_2^n I$	.	.	.	.	.	.
I_{2n+1}	0_{2n+1}	$\xi_1 \xi_2^{n+1} I$	.	.	.	.	.	.
I^*_{2n+1}	Ω_{2n}	$-\xi_1 \xi_2^{n+1} I$	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

Hasonló séma segítségével határozhatjuk meg a W vezetőben folyó áram által keltett eredő mágneses teret:

1b táblázat A két vezető között : áram			2b táblázat A V vezetőkben : áram			3b táblázat A W vezetőkben : áram		
elne- vezése	egye- nese	inten- zitása	elne- vezése	egye- nese	inten- zitása	elne- vezése	egye- nese	inten- zitása
J_0	Ω_0	$-I$	J'_0	Ω_0	$-\eta_1 I$	J'_1	Ω_1	$-\eta_2 \xi_1 I$
J_1	Ω_1	$-\xi_1 I$	J'_2	Ω_2	$-\eta_1 \xi_1 \xi_2 I$	$J^{*'}_1$	0_0	$\eta_2 \xi_1 I$
J^*_1	0_0	$\xi_1 I$	$J^{*'}_2$	0_1	$\eta_1 \xi_1 \xi_2 I$	J'_3	Ω_3	$-\eta_2 \xi_1^2 \xi_2 I$
J_2	Ω_2	$-\xi_1 \xi_2 I$	.	.	.	$J^{*'}_3$	0_2	$\eta_2 \xi_1^2 \xi_2 I$
J^*_2	0_1	$\xi_1 \xi_2 I$	.	.	.	.	.	.
J_3	Ω_3	$-\xi_1^2 \xi_2 I$	.	.	.	.	.	.
J^*_3	0_2	$\xi_1^2 \xi_2 I$	J'_{2n}	Ω_{2n}	$-\eta_1 \xi_1^n \xi_2^n I$	.	.	.
.	.	.	$J^{*'}_{2n}$	0_{2n-1}	$\eta_1 \xi_1^n \xi_2^n I$	J'_{2n+1}	Ω_{2n+1}	$-\eta_2 \xi_1^{n+1} \xi_2^n I$
.	.	.	.	.	.	$J^{*'}_{2n+1}$	0_{2n}	$\eta_2 \xi_1^{n+1} \xi_2^n I$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
J_{2n}	Ω_{2n}	$-\xi_1^n \xi_2^n I$	.	.	.	.	.	.
J^*_{2n}	0_{2n-1}	$\xi_1^n \xi_2^n I$	.	.	.	.	.	.
J_{2n+1}	Ω_{2n+1}	$-\xi_1^{n+1} \xi_2^n I$	.	.	.	.	.	.
J^*_{2n+1}	0_{2n}	$\xi_1^{n+1} \xi_2^n I$	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

A táblázatokban a

$$(7) \quad \xi_1 = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0}; \quad \xi_2 = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_2 + \mu_0}; \quad \eta_1 = \frac{2\mu_0}{\mu_1 + \mu_0}; \quad \eta_2 = \frac{2\mu_0}{\mu_2 + \mu_0}$$

jelölést használtuk.

A továbbiakban az E egyenesen átfolyó egységnyi intenzitású mágneses teret $H(E)$ -val jelöljük. A tér egy P pontjában a $H(E)$ merőleges az (E, P) síkra, értelme az Ampère-féle úszási szabály szerinti és abszolút értéke $\frac{2}{cx}$, ahol x a P pont távolsága az E egyenestől. Ezzel a jelölési módszerrel a mágneses tér intenzitása most már könnyen felírható :

A két vezető között

$$(8) \quad H_k = \sum_{n=0}^{\infty} (I_n + J^*_{n+1}) H(0_n) + \sum_{n=0}^{\infty} (J_n + I^*_{n+1}) H(\Omega_n).$$

A V vezető belsejében a járulékos tér

$$(9) \quad H_V = \sum_{n=0}^{\infty} (J_{2n} + I_{2n+1}^{*'}) H(\Omega_{2n}) + \sum_{n=0}^{\infty} (I'_{2n+1} + J_{2n+2}^{*'}) H(\Omega_{2n+1})$$

és végül a W vezető belsejében a járulékos tér:

$$(10) \quad H_W = \sum_{n=0}^{\infty} (I'_{2n} + J_{2n+1}^{*'}) H(\Omega_{2n}) + \sum_{n=0}^{\infty} (J'_{2n+1} + I_{2n+2}^{*'}) H(\Omega_{2n+1})$$

III. Konvergencia megfontolások

Jelöljük 0_{2n} távolságát 0_0 -tól r_{2n} -nel, 0_{2n+1} távolságát Ω_0 -tól ϱ_{2n+1} -nel, Ω_{2n} távolságát Ω_0 -tól ϱ_{2n} -nel, Ω_{2n+1} távolságát 0_0 -tól r_{2n+1} -nel. Miután a geometriai értelmezés alapján az $\{r_{2n}\}, \{r_{2n+1}\}, \{\varrho_{2n}\}, \{\varrho_{2n+1}\}$ sorozatok monoton növekedőek, és az a , ill. α korlát alatt maradnak, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n} = r_{\infty V} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n+1} = r_{\infty W}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{2n+1} = \varrho_{\infty V} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{2n} = \varrho_{\infty W}$$

határértékek léteznek. Bebizonyítjuk, hogy az $(0_{2n}), (\Omega_{2n+1}); (0_{2n+1}), (\Omega_{2n})$ pontsorok hatáppontjai $n \rightarrow \infty$ esetén a V , ill. W henger belsejébe esnek. Vegyük pl. az (0_{2n+1}) sorozatot. Az 0_n és r_n definíciója alapján, ha $0_0 \Omega_0 = d$:

$$(11) \quad r_{2n+1} = \frac{\alpha^2}{d - \frac{a^2}{d - r_{2n-1}}}$$

tehát $n \rightarrow \infty$ esetén

$$(12) \quad r_{\infty W} = \frac{\alpha^2}{d - \frac{a^2}{d - r_{\infty W}}}$$

és rendezés után

$$(13) \quad dr_{\infty W}^2 - (d^2 - a^2 + \alpha^2) r_{\infty W} + \alpha^2 d = 0$$

(13) diszkriminánsa:

$$(d^2 - a^2 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 d^2 = [d^2 - (a + \alpha)^2] [d^2 - (a - \alpha)^2] > 0$$

mert $d > a + \alpha$; tehát (11)-nek két különböző valós gyöke van, melyek a Descartes-féle jelszabály szerint pozitívek, és a két gyök szorzata $\frac{\alpha^2 d}{d} = \alpha^2$.

Tehát (11) egyik gyöke α -nál nagyobb, másik gyöke pozitív és α -nál kisebb. Ily módon $0_{\infty W}$ nyilván (13) kisebbik gyöke lesz, tehát

$$r_{\infty W} < \alpha,$$

ami éppen azt jelenti, hogy $0_{\infty W}$ a W henger belsejébe esik. Ugyanígy mutat-
ható ki, hogy $0_{\infty V}$ a V henger belsejébe esik. Miután $\varrho_{\infty W}$ ugyancsak gyöke
a (12), ill. (13) egyenletnek, tehát

$$(14) \quad \varrho_{\infty W} = r_{\infty W} \text{ és ugyanígy } \varrho_{\infty V} = r_{\infty V}.$$

Ebből következik, hogy a $\{\mathbf{H}(0_n)\}$, $\{\mathbf{H}(\Omega_n)\}$ vektorsorozatok minden egyes
tagja az egész V és W -n kívüli térben abszolút értékre nézve egy közös $K =$
 $= K(a, \alpha, d)$ korlát alatt marad. Tehát (8) jobboldalán a két sor a

$$(15) \quad KI \sum (2\xi_1^n \xi_2^n + \xi_1^n \xi_2^{n+1} + \xi_1^{n+1} \xi_2^n)$$

numerikus sorral majorizálható. Tekintettel arra, hogy

$$|\xi_1| = \left| \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} \right| < 1, \quad |\xi_2| = \left| \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_2 + \mu_0} \right| < 1$$

a (12) sor abszolút konvergencia, tehát (8) jobboldalán mindkét sor az egész
 V és W -n kívüli térben egyenletesen abszolút konvergencia. Hasonló módon
közvetlenül látható, hogy a (9), ill. (10) jobboldalán álló sorok V , ill. W belsejé-
ben egyenletesen abszolút konvergensek. Be kell még bizonyítanunk, hogy
a V , ill. W határán $\mathbf{H}$ tangenciális komponense és $\mu\mathbf{H} = \mathbf{B}$ normális kompo-
nense (jelölésben H_t és μH_n) folytonosak.

A (8) sor tagjait a szereplő sorok abszolút konvergenciája miatt akárhog-
y átrendezhetjük és kiegészíthetjük az ugyancsak abszolút konvergencia

$$- \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1} \mathbf{H}(\Omega_0) - \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1}^* \mathbf{H}(\Omega_0) - \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+2} \mathbf{H}(\Omega_0) - \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+2}^* \mathbf{H}(\Omega_0) = 0$$

sorok tagjaival, ilymódon lesz :

$$(16) \quad \begin{aligned} \mathbf{H}_k = & J_0 \mathbf{H}(\Omega_0) + \sum_{n=0}^{\infty} [I_{2n} \mathbf{H}(O_{2n}) + I_{2n+1} \mathbf{H}(O_{2n+1}) - I_{2n+1} \mathbf{H}(\Omega_0)] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [J_{2n+1}^* \mathbf{H}(O_{2n}) + J_{2n+2}^* \mathbf{H}(O_{2n+1}) - J_{2n+2}^* \mathbf{H}(\Omega_0)] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [I_{2n}^* \mathbf{H}(\Omega_{2n-1}) + I_{2n+1}^* \mathbf{H}(\Omega_{2n}) - I_{2n+1}^* \mathbf{H}(\Omega_0)] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [J_{2n-1} \mathbf{H}(\Omega_{2n-1}) + J_{2n} \mathbf{H}(\Omega_{2n}) - J_{2n} \mathbf{H}(\Omega_0)] \end{aligned}$$

Mármint a W vezető határán a benne folyó J áram által közvetlenül keltett
mágneses tér tangenciális irányú és (a radiálisan szimmetrikus árameloszlás

miatt) egyenlő $J_0 \mathbf{H}(\Omega_0)$ -al; másrészt a jelen dolgozat I. részében levezetett eredmények szerint a W vezetőhenger határán

$$I_{2n} \mathbf{H}(O_{2n}) + I_{2n+1} \mathbf{H}(O_{2n+1}) - I_{2n+1} \mathbf{H}(\Omega_0) \quad \text{és} \quad I'_{2n} \mathbf{H}(O_{2n})$$

$$J_{2n+1}^* \mathbf{H}(O_{2n}) + J_{2n+2}^* \mathbf{H}(O_{2n+1}) - J_{2n+2}^* \mathbf{H}(\Omega_0) \quad \text{és} \quad J_{2n+1}^{*'} \mathbf{H}(O_{2n})$$

$$17) \quad I_{2n}^* \mathbf{H}(\Omega_{2n-1}) + I_{2n+1}^* \mathbf{H}(\Omega_{2n}) - I_{2n+1}^* \mathbf{H}(\Omega_0) \quad \text{és} \quad I_{2n}^{*'} \mathbf{H}(\Omega_{2n-1})$$

$$J_{2n-1} \mathbf{H}(\Omega_{2n-1}) + J_{2n} \mathbf{H}(\Omega_{2n}) - J_{2n} \mathbf{H}(\Omega_0) \quad \text{és} \quad J_{2n-1}' \mathbf{H}(\Omega_{2n-1})$$

vektorok tangenciális komponensei rendre egyenlőek. Továbbá ugyancsak az I. részben levezetett eredmények szerint, ha (17)-ben az első oszlopot μ_0 -al, a második oszlopot μ_2 -vel szorozzuk, az ugyanazon sorban álló vektorok normális komponense W határán megegyezik. Ebből, tekintettel (10) és (16)-ra következik, hogy az elektrodinamikai határfeltételek teljesülnek. V határán a határfeltételek teljesülése analóg módon igazolható. Végül kimutatható, hogy a (8), (9) és (10) egyenletekkel definiált mágneses tér kielégíti az

$\oint \mathbf{H}_s ds = \frac{4\pi}{c} I_{\text{hurkolt}}$ gerjesztési törvényt az egész térben, a valóságos áram-eloszlásra vonatkozólag. Miután abban az esetben, ha $\mu_1 \gg \mu_0$, $\mu_2 \gg \mu_0$ a (15) majoráns sor konvergenciája igen lassú, kíváncsot megmutatni, hogy a szereplő sorok konvergenciája a tagok átzárójelezésével nagymértékben fokozható. (11) és (12)-ből, tekintettel (14)-re és arra, hogy

$$\varrho_{2n} = \frac{a^2}{d - r_{2n-1}}, \quad \varrho_{\infty V} = \frac{a^2}{d - r_{\infty W}},$$

$$(18) \quad \frac{r_{\infty W} - r_{2n+1}}{r_{\infty W} - r_{2n-1}} = \frac{a^2 \alpha^2}{(d - r_{2n-1})(d - r_{\infty W})(d - \varrho_{\infty V})(d - \varrho_{2n})} < \left[\frac{a\alpha}{(d - r_{\infty V})(d - r_{\infty W})} \right]^2 = q^2$$

és ugyanez a becslés érvényes az $\frac{r_{\infty V} - r_{2n+2}}{r_{\infty V} - r_{2n}}$, stb. hányadosokra is. (18)-ból

$$(19a) \quad r_{\infty W} - r_{2n+1} < (r_{\infty W} - r_1) q^{2n} \quad n = 1, 2, \dots$$

és hasonlóan bizonyítható, hogy

$$(19b) \quad r_{\infty V} - r_{2n} < (r_{\infty V} - r_0) q^{2n} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(19c) \quad \varrho_{\infty V} - \varrho_{2n+1} < (\varrho_{\infty V} - \varrho_1) q^{2n} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(19d) \quad \varrho_{\infty W} - \varrho_{2n} < (\varrho_{\infty W} - \varrho_0) q^{2n} \quad n = 1, 2, \dots$$

(14)-ből és (19)-ből

$$(20) \quad |r_{2n+1} - \varrho_{2n}| < K_1 q^{2n}; \quad |\varrho_{2n+1} - r_{2n}| < K_2 q^{2n},$$

ahol K_1 és K_2 d , a és α -tól függő állandók.** Tekintettel arra, hogy amint a táblázatokból leolvasható

$$I_n^* = -I_n, \quad J_n^* = -J_n, \quad I_n^{*'} = -I_n', \quad J_n^{*'} = -J_n'$$

* Pontosabb számítás szerint $K_1 = r_1$, $K_2 = \varrho_1$ helyettesíthető.

(8), (9) és (10) alábbi átzárójelzését választjuk :

$$(21) \quad \mathbf{H}_k = I_0 \mathbf{H}(O_0) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n [\mathbf{H}(O_n) - \mathbf{H}(O_{n-1})] +$$

$$+ J_0 \mathbf{H}(\Omega_0) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n [\mathbf{H}(\Omega_n) - \mathbf{H}(O_{n-1})]$$

$$(22) \quad \mathbf{H}_V = J'_0 \mathbf{H}(\Omega_0) + \sum_{n=0}^{\infty} I'_{2n+1} [\mathbf{H}(O_{2n+1}) - \mathbf{H}(\Omega_{2n})] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} J'_{2n} [\mathbf{H}(\Omega_{2n}) - \mathbf{H}(O_{2n-1})]$$

$$(23) \quad \mathbf{H}_W = I'_0 \mathbf{H}(O_0) + \sum_{n=1}^{\infty} I'_{2n} [\mathbf{H}(O_{2n}) - \mathbf{H}(\Omega_{2n-1})] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} J'_{2n+1} [\mathbf{H}(\Omega_{2n+1}) - \mathbf{H}(O_{2n})]$$

(20) alapján könnyen belátható, hogy a (21), (22), (23) képletekben szereplő sorok

$$(24) \quad K^* I \sum (\xi_1 \xi_2 q)^n$$

sorral majorizálhatók. Ha $a \ll d$, $\alpha \ll d$ (azaz a két vezető messze van egymástól), akkor $q \ll 1$, tehát (24) sokkal gyorsabban konvergál, mint (15).

IRODALOM

1. *G. Gentile, jr.*: Per la teoria degli effetti polarizzanti delle fenditure. Nuovo Cimento I., 1943. 161 — 175. old.
2. *G. Joos*: Lehrbuch der Theoretischen Physik 7. Aufl. Leipzig, 1950.
3. *Magri Materossi*: Il problema di Lecher. Nuovo Cimento I. (1943) 190—204. o.
4. *J. C. Maxwell*: A treatise on electricity and magnetism. 3. ed. Oxford, 1892. § 685—686.
5. *G. Mie*: Annalen der Physik 2 (1900) 201. o.
6. *Novobátzky—Neugebauer*: Elektrodinamika és Optika. Tankönyvkiadó, 1951. Budapest.
7. *Simonyi K.*: Elméleti Villamosságtan, Tankönyvkiadó, Bp. 1952.
8. *A. Sommerfeld*: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 3. (Elektrodynamik) 203—214. old.

ОБ ИСЧИСЛЕНИИ МАГНИТНО-СИЛОВОГО ПОЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРОВОДА (ЧАСТЬ 1)

Г. ФРАЙД

Резюме

В двух параллельных цилиндрах магнитной проницаемостью в μ_1 и μ_2 текут токи I и $(-I)$. Окружающее средство — изолятор с проницаемостью в μ_0 . Ток может переменяться по времени, а ставим условие, что ток, текущий в одном проводе, не значительно воздействует на распределение тока в другом проводе.

Введем следующие обозначения: O_0 — ось первого проводящего цилиндра; O_1 — инверсная прямая O_0 на второй цилиндр; O_2 — инверсная прямая O_1 на первый цилиндр и т. д. O_0 ось второго цилиндра, из этого получаются $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ подобно прежнему. Пусть $H(P)$ означает магнитно-силовое поле линейного тока, текущего по прямой P с единичной силой в пустом пространстве. Тогда магнитно-силовое поле в пространстве между двумя проводами доставляется формулой (21). В то же время магнитно-силовое поле во внутренней части проводов: $H_1 = H_{01} + H_V$, $H_2 = H_{02} + H_W$ где H_{01} и H_{02} — поле во внутренности провода, происходящее с собственного тока в отсутствии другого метода, а аксессуарные поля сдаются формулами (22), (23). Величины зеркальных токов I_n, I'_n, J_n, J'_n снимаются из третьей рубрики таблиц 1а — 3б. Величины ξ_1, ξ_2, η_1 и η_2 даются формулой (7). Ряды (21), (22), (23) мажоризируемы геометрическим рядом с частном $\xi_1 \xi_2 q$, где q — постоянная, зависящая от геометрической расстановки. Если радиус двух цилиндров значительно меньше, чем расстояние их осей, тогда $q \ll 1$.

SUR LE CALCUL DU CHAMP MAGNÉTIQUE D'UNE CONDUITE ÉLECTRIQUE PARALLÈLE (Partie I.)

G. FREUD

Résumé

Dans deux cylindres parallèles ayant une perméabilité magnétique μ_1 respectivement μ_2 entourée par une matière isolante d'une perméabilité μ_0 il court un courant électrique I , respectivement $-I$. Nous permettons que le courant varie durant le temps mais nous supposons que le courant dans un des conducteurs n'influence pas essentiellement la distribution du courant dans l'autre conducteur.

Introduisons les notations suivantes: O_0 signifie l'axe du premier conducteur: cylindre O_1 signifiera la droite inverse de O_0 par rapport du deuxième cylindre, O_2 signifie la droite inverse de O_1 par rapport du premier cylindre, etc. Ω_1 signifie l'axe du second cylindre, et de celle-ci on obtient d'une manière semblable à ce qui précède, les lignes $\Omega_1, \Omega_2, \dots$. Lorsque $H(\sigma)$ signifie le champ magnétique du courant linéaire d'une intensité égale à l'unité courant le long de la droite σ , dans l'espace vide, le champ magnétique dans l'espace entre les deux conducteurs sera fourni alors par la formule (21). En même temps, pour le champ magnétique dans l'intérieur des conducteurs, on a

$$H_1 = H_{01} + H_V, \quad H_2 = H_{02} + H_W$$

ou H_{01} , respectivement H_{02} , signifie le champ engendré à l'intérieur du conducteur par son propre courant dans l'absence de l'autre conducteur et les champs subsidiaires H_V, H_W sont donnés par les formules (22), (23). Les valeurs des courants I_n, J_n, I'_n, J'_n sont données par la troisième rubrique des tabelles 1а — 3б, tandis que les valeurs de ξ_1, ξ_2, η_1 et η_2 sont fournies par la formule (7).

Les séries (21), (22), (23) peuvent être majorées par une série géométrique dont le quotient est $\xi_1 \xi_2 q$ ou q est une constante dépendant de l'arrangement géométrique. Si les rayons des deux cylindres sont beaucoup plus petits que la distance entre leurs axes, on a $q \ll 1$.