

STATIKAI TERHELÉS ÁTVITELE VÉKONYFALÚ CSŐVEL

PÁL SÁNDOR

ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk a turbogenerátorok forgórészének a tengelyvégekre való felerősítésére szolgáló konstrukció megítélésére és méretezésére vonatkozó számításokat tartalmaz.

Tömör hengerre és vékony tárcsára túlfedéssel vékonyfalú cső van felsajtolva. A henger befogottnak tekinthető, a tárcsán pedig saját síkjában centrikusan támadó erővel van terhelve.

A cikk ismerteti egy vékony hengeres héjakra vonatkozó általános számítási módszert, amely külsőleg is kidomborítja a vékony hengeres héjak deformációjának számításánál adódó nagyságrendi viszonyokat és nyilvánvalóvá teszi az elhanyagolások jogosságának feltételeit. Ezúton kiadódik, hogy a héj egyes alkotóinak deformációjára közelítőleg ugyanaz a közönséges differenciálegyenlet érvényes, mint hengersizmetrikus terhelés esetén.

Ezután megoldja a héj hajlítására vonatkozó differenciálegyenletet, a tömör henger feletti »gyűrődési« szakaszra, továbbá a héj és tárcsa közötti csőrészre, majd a megoldásokat illeszti egymáshoz. Az illesztés gyakorlati kiviteléhez nomogrammot és görbéket közöl, amelyek segítségével a »gyűrődés« alakját jellemző paraméterek megállapíthatók. Ezek birtokában megvizsgálja a cső hengeren és tárcsán való biztos felfekvésének feltételeit.

A cső deformációjára jellemző mennyiségek a benne terheléskor jelentkező feszültségek — a mellékelt görbeseregek segítségével — könnyűszerrel megállapíthatók.

Bevezetés

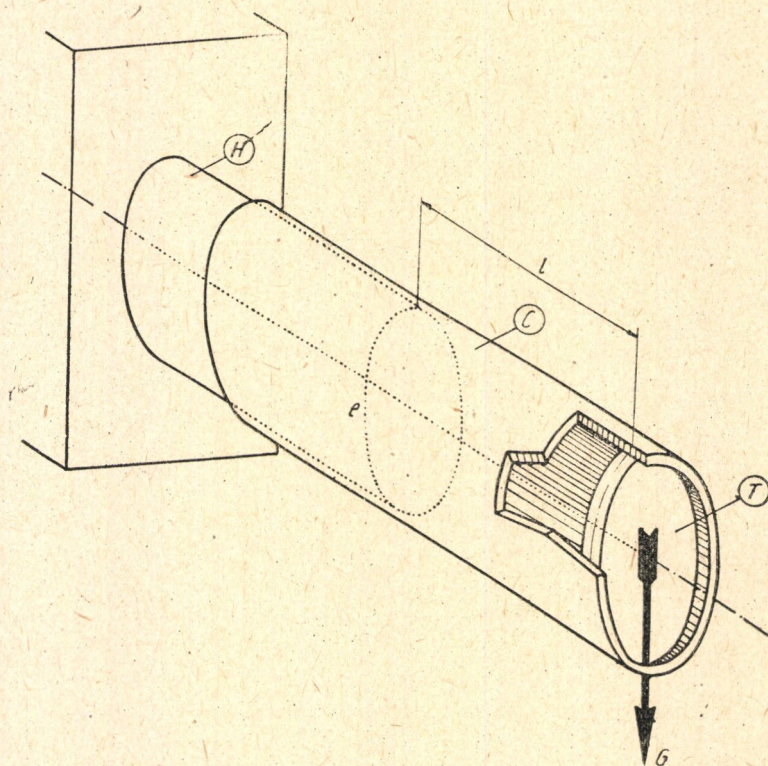
Nagy erőművek részére készülő villamos generátorok tervezésénél igen súlyos problémát jelent a generátor forgórészének a tengelyvégekre való felerősítési módja. A probléma helyes megoldása igen fontos, mert az e téren elkövetett hiba esetén számolnunk kell a generátor robbanásszerű elpusztulásával, amely tönkreteszi azt az épületet is, amelyben a generátort elhelyeztük, emberéletekben és az egész ország villamos energiaszolgáltatásában helyrehozhatatlan károkat okozhat.

Ezen tanulmány célja megvizsgálni a forgórész felerősítésének azt a módját, melynél a forgórészt és a tengelyvégeket egy mindkettőre felfekvő cső köti egymáshoz, amely a forgórészre keskeny, a tengelyvégre széles sávon illeszkedik.

A konstrukció alkalmazása előtt el kell bírálni, hogy az alkalmas-e, és ha igen, akkor milyen feltételekkel alkalmas a fokozott biztonsági követelmények mellett és a forgórész üzembiztos megfogására és hogyan kell a gyűrűt méretezni.

A jelen cikk a Ganz Villamossági Vállalat megbízásából készült számításokat tartalmazza, amelyeknek alapján a konstrukció elbírálható és méretezhető.

Az 1. ábra szerinti C vékonynak tekinthető cső egyik végén a H merevnek tekintett tömör hengeres testre, másik végén a T vékony, de merevnek tekinthető tárcsára fekszik fel. A tömör henger befogottnak tekinthető és a tárcsát saját síkjában (centrikusan) ható G erő terheli. A cső az ábra szerint közvetlenül a tárcsa után véget ér. A C cső feladata: a tömör hengert és a tárcsát külső erőhatások mellett is egymáshoz képest koaxiálisan tartani. A cső belső átmérője felhúzás előtti, feszültségmentes állapotban kisebb a tárcsa és tömör henger külső átmérőjénél. (A cső és tárcsa, illetőleg tömör henger túlfedéssel illeszkednek.) A cső a tömör hengerre és a tárcsára történő felhúzásakor rugalmas alakváltozást szenved. Az így keletkező rugalmas erőhatásoknak — és csak ezeknek — feladata a tárcsa rögzítése.



1. ábra

Ebben a cikkben megvizsgáljuk, hogy

1. milyen rugalmas alakváltozások és mekkora feszültségek keletkeznek a csőben a G erő, továbbá a tárcsára és tömör hengerre történő felhúzás következtében,

2. a cső felfekvése a tárcsán, illetőleg a tömör hengeren — vagyis a tárcsa rögzítése — milyen feltételek mellett tekinthető elegendően »biztosnak« (a biztonság követelményeit később adjuk meg).

A forgás közben fellépő centrifugális erőter hatását is tekintetbe vesszük.

A cikk alapvető feltevése, hogy a deformációk a rugalmassági határon belül maradnak.

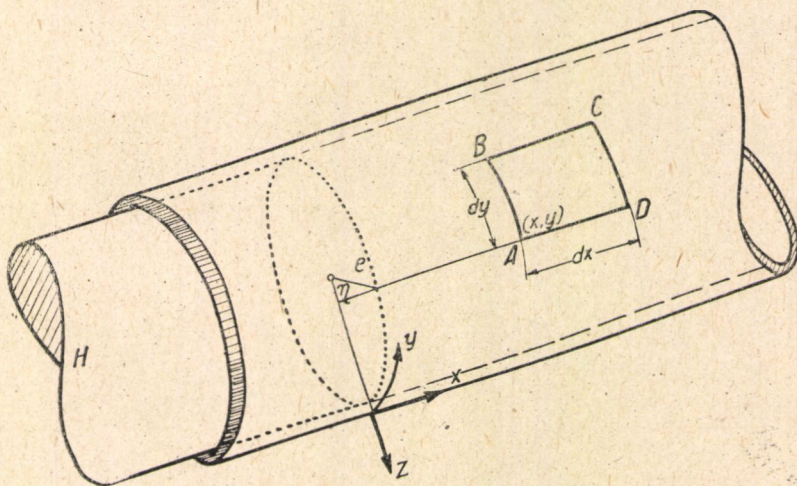
Az említett feladatok megoldásának eszközei a hengeres héjak rugalmasságtani alapegyenletei. Bár ezek lineárisak, olyan sok változót tartalmaznak, hogy feladatunk csak bizonyos elhanyagolások árán oldható meg. Ezeket az elhanyagolásokat jelen dolgozatban szereplő héj speciális terhelési viszonyai, a rugalmasságtani alapegyenletek speciális határfeltételei teszik lehetővé. Ezért mindenekelőtt ezekkel az alapegyenletekkel és ezeknek speciális határfeltételek melletti leegyszerűsítésével foglalkozunk.

I. Rész. A csőre, mint vékony héjra vonatkozó közelítő számítás

A. Rugalmasságtani alapegyenletek

Tegyük vizsgálat tárgyává olyan vékonynak tekinthető hengeres héj rugalmas alakváltozását, amelyet két tengelyére merőleges sík határol s amelyet ezek között vonalon, vagy felületen megoszló erők vesznek igénybe, és a két határoló síklapon külső erők és nyomatékok támadnak (2. ábra).

Vezessük be a henger felszínén történő helymeghatározásra az ábra szerinti hengerkoordinátarendszert.



2. ábra

A hengeres héjból a 2. ábra szerint kivágott $dx dy$ területű darabot általában a 3. ábra szerinti erők és nyomatékok terhelik. A 3a. ábra szerint

a henger két hosszmetszetével és két alapkörének síkjával határolt elemi testrész

$CDC'D'$ lapját a

σ_x a lapra normálisan ható húzófeszültség,
 τ_{xy} a felület érintősíkjaiban ható nyírófeszültség,

és

τ_{xz} a henger hosszmetszetében ható nyírófeszültség terheli,

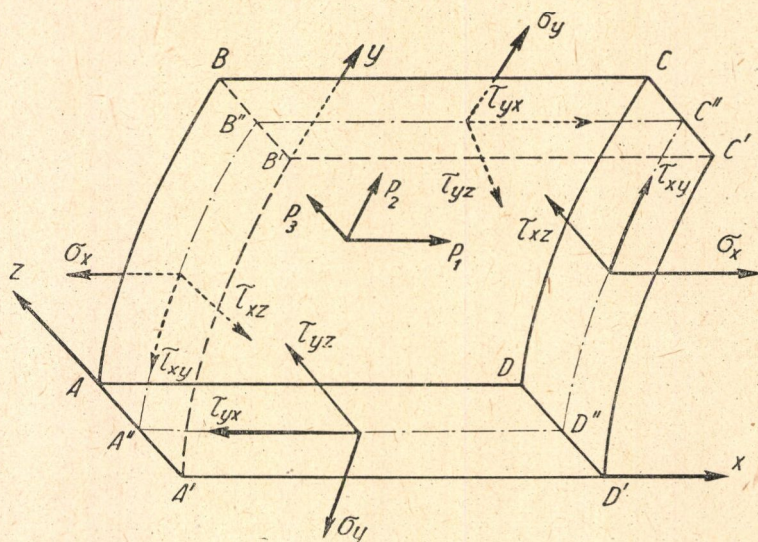
a $BCB'C'$ lapot a

σ_y a lapra normálisan ható húzófeszültség,
 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ felület érintősíkjaiban ható nyírófeszültség

és

τ_{yz} az alapsíkkal párhuzamos síkban ható nyírófeszültség terheli.

Jelentse továbbá ν a Poisson-féle számot, E a rugalmassági modulust, és $A''B''C''D''$ a 3a. ábra szerint a kivágott $dx dy$ felületű csődarabka »semleges felületét. és h a cső vastagságát.

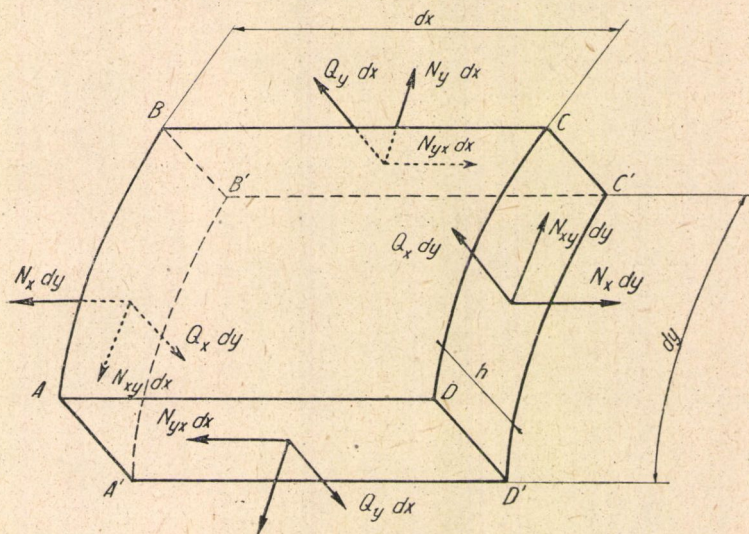


3a. ábra

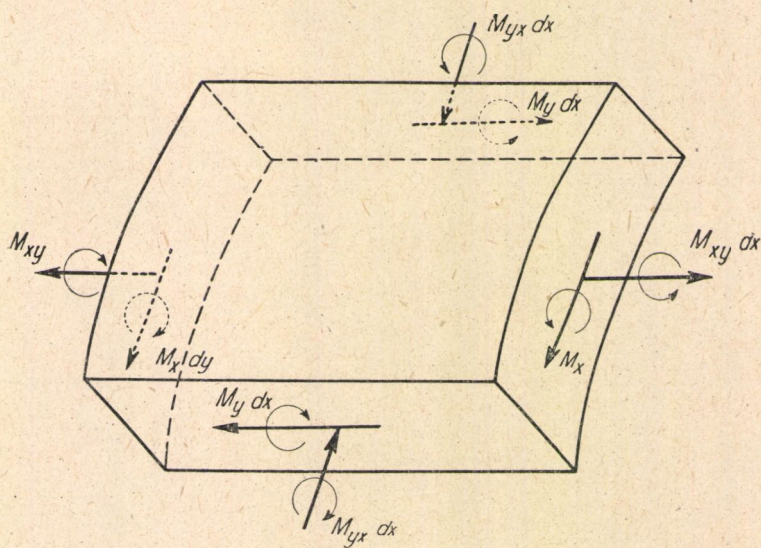
Ezekből a héjak elméletében szokásos módon a következő hosszegységre ható erőket és nyomatékokat vezetjük le:

$$N_x = \int_0^h \sigma_x dz, \quad N_y = \int_0^h \sigma_y dz, \quad N_{xy} = N_{yx} = \int_0^h \tau_{xy} dz;$$

$$Q_x = \int_0^h \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_0^h \tau_{yz} dz;$$



3b. ábra



3c. ábra

$$M_x = - \int_0^h \sigma_x \cdot z \, dz, \quad M_y = - \int_0^h \sigma_y \cdot z \, dz, \quad M_{xy} = M_{yx} = - \int_0^h \tau_{xy} \cdot z \, dz.$$

$$(N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y \text{ dimenziója } \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}, M_x, M_y, M_{xy}\text{-é dyn}).^*$$

A továbbiakban a héj közepes sugarát R -el, vastagságát h -val és az eT szakasz hosszát l -el jelöljük.

Jelölje a héj valamely pontjában

ϵ_1 a semleges szál x -irányú fajlagos megnyúlását,

ϵ_2 a semleges szál y -irányú fajlagos megnyúlását,

γ a $B''A''D''$ csökkenését.

Tegyük fel, hogy a héjat a kiválasztott tartományon csak a felületen megoszló külső erők terhelik. Legyen a felületegységre ható terhelés $+x$ irányban $P_1(x, y)$ (dyn/cm²), $+y$ irányban $P_2(x, y)$, $+z$ irányban $P_3(x, y)$.

Legyen a deformáció után a henger alapkörével párhuzamos síkmetszet görbületi sugara a vizsgált pontban R' , a henger meridiánmetszetének deformáció után legyen R'' a görbületi sugara. Jelentse az $A''B''C''D''$ felületdarab

görbületváltozásait az M_x és M_y nyomatékok hatása alatt $\chi_x = \frac{1}{R'}$, $\chi_y = \frac{1}{R'}$ és M_{xy} következtében χ_{xy} . (V. ö. [1] 414–419. old., [2] 385–393. o.) Ismeretes, hogy a hengeres héj rugalmas alakváltozása a következő egyenletekkel írható le:

Egyensúlyi egyenletek:

$$\begin{aligned} (1a) \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = -P_1, \\ (1b) \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{1}{R} Q_y = -P_2, \\ (1c) \quad & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{1}{R} N_y = -P_3, \\ (1d) \quad & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + Q_x = 0, \\ (1e) \quad & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0. \end{aligned}$$

Az erők és nyomatékok összefüggése a deformációkkal:

$$(2a) \quad \epsilon_1 = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y),$$

* N_x stb. dimenziója tehát nem erő, M_x stb.-é nem nyomaték. Miután azonban félreértést nem okoz, jobb híján mégis erőnek és nyomatéknak nevezzük. (Német művekben pl. »Schnittkraft« néven emlegetik.)

$$(2b) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (-\nu N_x + N_y),$$

$$(2c) \quad \gamma = \frac{2}{Eh} (1 + \nu) N_{xy},$$

$$(2d) \quad \chi_x = \frac{12}{Eh^3} (M_x - \nu M_y),$$

$$(2e) \quad \chi_y = \frac{12}{Eh^3} (-\nu M_x + M_y),$$

$$(2f) \quad \chi_{xy} = \frac{12}{Eh^3} (1 + \nu) M_{xy}.$$

Legyenek a henger kijelölt (x, y) pontjának deformáció alatt történő elmozdulásai x, y , illetőleg z irányban U, V , illetőleg W . A megnyúlások és görbületváltozások visszavezethetők ezekre az alábbi formulák szerint:

$$(2g) \quad \varepsilon_1 = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$(2h) \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{R},$$

$$(2j) \quad \gamma = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$(2k) \quad \chi_x = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2},$$

$$(2l) \quad \chi_y = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{W}{R^2}, *$$

$$(2m) \quad \chi_{xy} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

B. Redukció dimenzió nélküli mennyiségekre

Az egyenletekben szereplő mennyiségek nagyságrendjének összehasonlításához szükség van arra, hogy azokat — függetlenül eredeti dimenziójuktól — egyforma egységekben fejezhessük ki. Ezért olyan transzformációnak vetjük őket alá, hogy mérőszámaik dimenzió nélküli számok legyenek. Ezáltal t. i. elérjük, hogy a problémát karakterizáló paraméterek (h, R, E) száma lecsökken egyre (ν -t nem érdemes kiküszöbölni, bár ez lehetséges volna, az alkalmazott acélnál az 1 nagyságrendű konstansnak: 0,3-nak tekinthető). Ha az alkalmazott terhelés hengerszimmetrikus, fenti egyenletrendszer jó közelítéssel egyetlen negyedrendű differenciálegyenletre vezethető vissza: *

* V. ö. [2], 373. old.

(2l) és (2m) egyenletek Timoshenkonál ([1]) kissé más alakban szerepelnek, de z ugyanarra az eredményre vezet, mint fenti egyenletek.

$$(3) \quad \frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2 R^2} W = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} P_3(x, y).$$

Ez kézenfekvővé teszi, hogy az x hosszúságot a dimenzió nélküli

$$(4) \quad \xi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} x$$

változóval helyettesítsük.

W mérésére vezessünk be valamilyen f mértékegységet. (Ez lehet például hengeres héj belső sugarának a tömör hengerre való felhúzásánál az e élen elszenvedett megnövekedése.) Legyen tehát

$$W = f \cdot w.$$

A megoszló terhelést is transzformáljuk a

$$P_3 = f \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)} p$$

képlet szerint. Ezáltal (3) differenciálegyenletünk a következő alakot ölti:

$$(3') \quad \frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = 4p.$$

Visszatérve a nem-hengerszimmetrikus esetre, analóg módon az y helyett is a dimenzió nélküli

$$(5) \quad \eta = \frac{y}{R}$$

szöveget használjuk. (V. ö. 2. ábra.) Legyen most is

$$(6) \quad W(x, y) = fw(\xi, \eta).$$

Evidens a következő szimbolikus egyenlőség érvényessége:

$$\frac{\partial}{\partial y} : \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \frac{\partial}{\partial \eta} : \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

* Ez a differenciálegyenlet — *Egerváry Jenő* akadémikus egy megjegyzése szerint — levezethető a következő egyszerű modell alapján is:

A hengeres gyűrűt alkotóirányban haladó rudakra bontjuk fel. A rudakat az N_y erőknek megfelelően keresztirányban rugalmas szalagokkal vagy rugókkal kötjük össze. (Ezek a rugalmas szalagok helyettesítik a hengernek alkotók menti összefüggését, amelyet modellünkben elhagytunk.) A rugalmas szalagok a rudakra a sugárirányú deformációval arányos megoszló terhelést adnak át. A rudaknak ez az igénybevétele épp a (3) differenciálegyenletre vezet.

Miután a továbbiakban sűrűn elő fog fordulni ez a szintén dimenzió nélküli mennyiség, legyen röviden

$$(7) \quad \frac{1}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} = \varepsilon.$$

Miután feltevésünk értelmében a hengeres héj vastagsága kicsi sugarához képest, ($h \ll R$),

$$\varepsilon^2 \ll 1.$$

Az (1) és (2) egyenletekben szereplő többi mennyiséget a következőképp transzformáljuk:

Hasonlóan a hengerszimmetrikus esethez

$$(8a,b,c) \quad \begin{aligned} P_1(x,y) &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot \frac{E}{R} \varepsilon^3 \cdot p_1(\xi, \eta) & P_2(x,y) &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot \frac{E}{R} \varepsilon^2 \cdot p_2(\xi, \eta), \\ P_3(x,y) &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot \frac{E}{R} \varepsilon^2 p_3(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Továbbá:

$$(9a,b) \quad U(x,y) = f \cdot \varepsilon \cdot u(\xi, \eta), \quad V(x,y) = f \cdot \varepsilon^2 \cdot v(\xi, \eta), \quad W(x,y) = f \cdot w(\xi, \eta);$$

$$(10a,b,c) \quad \begin{aligned} N_x &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E \varepsilon^4 n_\xi(\xi, \eta), \quad N_y = \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E \varepsilon^2 n_\eta(\xi, \eta), \\ N_{xy} &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E \varepsilon^3 n_{\xi\eta}(\xi, \eta); \end{aligned}$$

$$(11a,b,c) \quad \begin{aligned} M_x &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E R \varepsilon^4 m_\xi(\xi, \eta), \quad M_y = \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E R \varepsilon^4 m_\eta(\xi, \eta), \\ M_{xy} &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E R \varepsilon^5 m_{\xi\eta}(\xi, \eta); \end{aligned}$$

$$(12a,b,c) \quad Q_x = \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E \varepsilon^3 q_\xi(\xi, \eta), \quad Q_y = \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E \varepsilon^4 q_\eta(\xi, \eta).$$

Természetesen ez csak egy önkényesen kiválasztott lehetőség arra, hogy az egyenleteinkben szereplő mennyiségeket dimenzió nélküli mennyiségekkel helyettesítsük.

Elvileg szabadságunkban állna pl. (8), (9), (10) stb. képletekben más ε -hatványok alkalmazása, vagy az ε hatványok teljes elhagyása. A transzformációs képletek felhasználásával az 1. és 2. egyenletek bal- és jobboldalai ε olyan polinomjai lesznek, melynek együtthatói a kis betűvel jelölt dimenzió nélküli mérőszámokból és azoknak ξ , illetve η szerinti deriváltjaiból alakított kifejezések.

A transzformációs formulákat úgy választottuk meg, hogy

1. h , R és E külön ne szerepeljenek az egyenletekben, tehát ezek csak az ε mérőszámon keresztül befolyásolják egyenleteinket.

2. Minden változó legalább egyszer legalacsonyabb hatványon is előforduljon valamelyik egyenletben.

3. Az ε -ban legalacsonyabbfokú tag legalább két redukált mennyiséget tartalmazzon.

Meg fog mutatkozni, hogy a cikkben tárgyalt feladat és számos más probléma esetében a kisbetűvel jelzett dimenzió nélküli mennyiségek 0-tól általában különböző, véges határértékhez tartanak, ha $\varepsilon \rightarrow 0$. Miután pedig arra törekszünk, hogy — tekintetbe véve a héj vékonyságát — bizonyos mennyiségeket elhanyagoljunk, a vonással jelzett mennyiségek nagyságrendjének változatlan volta segítségünkre lesz a nagyságrendek megítélésében.

Írjuk a deformációmennyiségek (2g)–(2m) kifejezéseit a (2a)–(2f) egyenletekbe és helyettesítsük be a (8)–(12) dimenzió nélküli mennyiségeit.

Egyensúlyi egyenletek.

$$(12a) \quad \frac{\partial n_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial n_{\xi\eta}}{\partial \eta} = -p_1,$$

$$(12b) \quad \frac{\partial n_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial n_{\eta}}{\partial \eta} + \varepsilon^2 q_{\eta} = -p_2,$$

$$(12c) \quad \frac{\partial q_{\xi}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial q_{\eta}}{\partial \eta} - n_{\eta} = -p_3,$$

$$(12d) \quad \frac{\partial m_{\xi}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial m_{\xi\eta}}{\partial \eta} + q_{\xi} = 0,$$

$$(12e) \quad \frac{\partial m_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial m_{\eta}}{\partial \eta} + q_{\eta} = 0.$$

Deformációk, erők és nyomatékok összefüggése.

$$(13a) \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = \varepsilon^2 n_{\xi} - \nu n_{\eta},$$

$$(13b) \quad \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + w = -\varepsilon^2 \nu n_{\xi} + n_{\eta},$$

$$(13c) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = 2(1 + \nu) n_{\xi\eta},$$

$$(13d) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{4}{1 - \nu^2} (m_{\xi} - \nu m_{\eta}),$$

$$(13e) \quad \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + w \right) = \frac{4}{1 - \nu^2} (-\nu m_{\xi} + m_{\eta}),$$

$$(13f) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{4}{1 - \nu^2} m_{\xi\eta}.$$

C. A rendszer közelítő megoldása

Ha $\varepsilon = 0$ mellett vannak a (12)–(13) egyenletrendszernek olyan $n_{\xi}, \dots, m_{\xi}, \dots, u, v, w$ megoldásai, amelyek feladatunk (egyelőre nem részletezett) határfeltételeit is kielégítik, ezek a megoldások tekinthetők az exakt megoldás első közelítésének.

A közelítő megoldás használhatósága nyilvánvalóan függ a határfeltételektől. Pl. a héj felületén megoszló terhelés esetén bizonyos határfeltételek mellett úgy számíthatók ki a deformációk, mintha a héj csak saját felületének érintősíkjába eső erőket adna át, hajlítónyomatékokat nem. (Membránszerű terhelés.) De ha a határfeltételek olyanok, hogy a héj peremén nyomatéknak kell átadódnia, (pl. a héj pereme a terhelések eredőjére merőleges síkon be van fogva), a membránelmélet nem használható.

Az alábbiakban tehát megvizsgáljuk, hogy az egyenletrendszernek van-e $\varepsilon = 0$ mellett megoldása és milyen határfeltételek elégíthetők ki a megoldások rendszerével.

Figyelemreméltó, hogy egyenletrendszerünkben az ε első hatványát tartalmazó tagok kiestek, tehát a közelítő megoldás $\varepsilon^2 = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{h}{R}$ nagyságrendű relatív hibával elégíti ki az egyenletrendszert.

Az ε^2 -os tagok elhagyása után (13d) és (13e) egyenletekkel az m_ξ és m_η W -re vezethető vissza. Továbbmenve (12d)-ből és (12c)-ből most már q_ξ , majd n_ξ is kifejezhető w -vel, végül (13d)-be helyettesítve a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$(14) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4w = 4p_3(\xi, \eta).$$

Ha a hengerpalástra merőleges terhelés legfeljebb a határokon van:

$$(14a) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4w = 0.$$

(14) általános megoldása

$$(15) \quad w = w_0(\xi) + A(\eta) \operatorname{ch} \xi \cos \xi + B(\eta) \operatorname{ch} \xi \sin \xi + C(\eta) \operatorname{sh} \xi \cos \xi + D(\eta) \operatorname{sh} \xi \sin \xi,$$

ahol $w_0(\xi)$ a (14) egyenletnek egy partikuláris megoldása* és $A(\eta)$, $B(\eta)$, $C(\eta)$, $D(\eta)$ η -től általában még függő integrálási állandók.

Ha w ismert, az összes többi változó kiszámítható, tekintetbevéve (14) differenciálegyenletet is. Képleteink egyszerűbb írásmódja kedvéért vezessünk be olyan $s_1(\xi, \eta)$, $s_2(\xi, \eta)$, $s_3(\xi, \eta)$ η -ban 2π szerint periódikus függvényeket, amelyekre

$$p_1 = \frac{1}{4} \frac{\partial^5 s_1}{\partial \xi^5}, \quad p_2 = \frac{1}{4} \frac{\partial^5 s_2}{\partial \xi^5}, \quad p_3 = \frac{\partial^4 s_3}{\partial \xi^4}.$$

Ezekkel:

$$(16a) \quad m_\eta = \frac{\nu}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2},$$

$$(16b) \quad m_{\xi\eta} = \frac{1-\nu}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$(16c) \quad m_\xi = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2},$$

* w_0 meghatározását illetően v. ö. [3], 28. old.

$$(16d) \quad q_{\xi} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3},$$

$$(16e) \quad q_{\eta} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta},$$

$$(16f) \quad n_{\eta} = w = -\frac{1}{4} \frac{\partial^4 (w-s)}{\partial \xi^4},$$

$$(16g) \quad n_{\xi\eta} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^4 (w-s_2-s_3)}{\partial \xi^3 \partial \eta} + E(\eta) \right],$$

$$(16h) \quad n_{\xi} = -\frac{1}{4} \left[\frac{\partial^4 (w+s_1-s_2-s_3)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + E'(\eta) + F(\eta) \right],$$

$$(16j) \quad u = \frac{\nu}{4} \frac{\partial^3 (w-s_3)}{\partial \xi^3} + G(\eta),$$

$$(16k) \quad v = \frac{2+\nu}{4} \frac{\partial^3 (w'-s_3)}{\partial \xi^2 \partial \eta} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^3 s_2}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \left[\frac{1+\nu}{2} E(\eta) - G'(\eta) \right] \xi + H(\eta).$$

E, F, G, H η -tól függő integrálási állandók.

D. Határfeltételek

A határfeltételek a henger két alapkörén ható erők, nyomatékok és deformációk között adnak összefüggéseket.

Tegyük fel (ami a leggyakoribb eset), hogy a határfeltételek két vegyes csoportra oszthatók:

1. A hajlítással összefüggő mennyiségek $\left(w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}, m_{\xi}, m_{\xi\eta}, m_{\eta}, q_{\xi}, q_{\eta} \right)$ közötti összefüggések és

2. a felületen belüli deformációval kapcsolatos mennyiségek: $n_{\xi}, n_{\xi\eta}, n_{\eta}, u, v$ közötti összefüggések.

Legyen a héj két alapköre

$$\xi = \xi_1 \quad \text{és} \quad \xi = \xi_2$$

Tegyük még fel, hogy a határfeltételek

$$(18a) \quad a_1^{(i)} w(\xi_1, \eta) + b_1^{(i)} w(\xi_2, \eta) + a_2^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\xi_1} + b_2^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\xi_2} + \dots$$

$$\dots + b_8^{(i)} q_{\eta}(\xi_2, \eta) = F^{(i)}(\eta), \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

illetőleg

$$(18b) \quad c_1^{(i)} n_{\xi}(\xi_1, \eta) + d_1^{(i)} n_{\xi}(\xi_2, \eta) + c_2^{(i)} n_{\xi\eta}(\xi_1, \eta) + \dots + d_5^{(i)} v(\xi_2, \eta) = G^{(i)}(\eta), \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

alakúak, ahol az a, b, c, d számok η -tól is független állandók, az $F^{(i)}(\eta)$ és $G^{(i)}(\eta)$ pedig η -nak 2π szerint periodikus, Fourier-sorba fejthető függvényei.

Ilyen feltételek mellett kimondhatjuk, hogy a (16) egyenletek általában (kivételes esetektől eltekintve) jó közelítő megoldását adják a (13) egyenletrendszernek. Ugyanis a (18a)-ban használt feltételek a (15) egyenlet A, B, C, D együtthatóira lineáris egyenletrendszert adnak, amelynek mindig van megoldása, hacsak a rendszer determinánsa nem 0. Továbbá: ha ez a lineáris egyenletrendszer inhomogén, az A, B, C, D együtthatók közül legalább egy nem tűnik el azonosan és így a (15) szerint $w(\xi, \eta) - w_0(\xi, \eta)$ sem lesz azonosan 0. A kapott $w(\xi, \eta) - w_0(\xi, \eta)$ függvény η -nak 2π szerint periodikus Fourier-sorba fejthető függvénye. w ismeretében a (18b) egyenletek a (16) egyenletekben szereplő $E(\eta), F(\eta), G(\eta), H(\eta)$ függvényekre a következő alakú elsőrendű differenciálegyenletrendszert kapjuk:

$$(19) \quad \alpha^{(i)} E + \beta_1^{(i)} E' + \sigma_2^{(i)} F + \alpha_3^{(i)} G + \beta_3^{(i)} G' + \alpha_4 H = \varphi^{(i)}(\eta), (i = 1, 2, 3, 4)$$

ahol az α, β számok állandók, a φ -k pedig 2π szerint periodikus, Fourier-sorba fejthető függvények.

Ismeretes, hogy a rendszernek mindig van 2π szerint periodikus megoldása, ha egy

$$(20) \quad |\alpha_1^{(i)} + k\beta_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha^{(i)} + k\beta^{(i)}, \alpha_4^{(i)}| \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

determináns sem tűnik el. Ha a $w - w_0$ -ra kapott megoldás valódi függvénye η -nak is (tehát az előbb vázolt hajlítási probléma $w - w_0$ megoldása nem hengerszimmetrikus), akkor a (16) egyenletek alapján könnyen belátható, hogy az $n_\eta, n_{\xi\eta}, n_\xi, u, v$ függvények nem tűnnek el azonosan.

Ezzel tehát konstruktív úton kimutattuk, hogy *kivételes esetektől eltekintve van a leegyszerűsített (13) egyenletrendszernek ε^2 -től független megoldásrendszere, amelynek egy függvénye sem tűnik el*, tehát ε^2 nagyságrendű hibától eltekintve kielégíti a pontos (13) egyenletrendszert.*

E. A megoldásra vonatkozó megjegyzések

1. Nagy számítástechnikai könnyebbséget jelent, hogy feladatunknak a héj hajlítására vonatkozó részének megoldása ugyanúgy alakul, mint a hengerszimmetrikus esetben, tehát ugyanazzal a modellel szemléltethető. (Alkotóirányú tartókkal és azokat keresztirányban összekötő rúgókkal.) Egy-egy alkotómenti rúd deformációja, a benne ébredő feszültségek csak az alkotó mentén, illetőleg annak végén ható erőktől függ. Így minden alkotóra külön megoldandó közönséges differenciálegyenletrendszert kapunk. Ezért a továbbiakban a parciális differenciálegyenlet helyett mindenütt közönséges differenciálegyenletet írunk, ahol ez nem adhat félreértésre okot, és η -t egyszerű paraméternek tekintjük. A közönséges differenciálás jele tehát mindenütt a $\frac{\partial}{\partial \xi}$ jelet helyettesíti.

* Ha egy vagy több függvény azonosan eltűnik, akkor megeshetnének, hogy valamely egyenletről minden ε^2 -től független tag kiesnék és az elhanyagolt ε^2 nagyságrendű tagok dominálónak válnának.

2. Ez a megoldás csak olyan külső erőket és terheléseket vesz tekintetbe, amelyekre a (9)–(12) transzformációk utáni (kisbetűvel jelölt) értékek 1 nagyságrendűek. Tehát pl.

$$Q_x + AQ_y = 0$$

alakú határfeltétel

$$q_\xi = 0$$

egyenletbe megy át a transzformáció után, ha A 1 nagyságrendű állandó és csak akkor kapunk

$$q_\xi + aq_\eta = 0$$

alakú határfeltételt, ha A nagy szám $\left(\frac{1}{\varepsilon}$ nagyságrendű), tehát Q_y sokkal nagyobb súllyal szerepel a határfeltételben, mint Q_x .

3. Az előző megjegyzés értelmében a határfeltételek a (9)–(12) redukció során erősen leegyszerűsödhetnek. Ezért igen fontos gyakorlati esetek határfeltételei vezethetnek ellentmondó egyenletrendszerre.

Így $h \ll R$ esetén megoldásunk kielégíti a gyakorlat által megszabott pontossági követelményeket, különös tekintettel a méretezésnél felhasznált empirikus számadatok (E , ν , megengedett feszültségek) bizonytalanságára.

4. Figyelemreméltó, hogy a relatív hiba ε^2 -tel (és nem ε -nal) arányos. *Ugyanekkora nagyságrendű hibát követünk el, ha a szokásos módon elhanyagoljuk a Q_x nyíróerők szögtorzító hatását, a hajlítónyomatékok okozta görbületváltozás mellett.**

5. A (12), (13) egyenletrendszer (15), (16) képletek által meghatározott

* A hengeres héj problémájánál a nyíróerő szögtorzító hatását elhanyagolva az (1), (2) egyenletrendszerhez jutunk. Ha ezt a megoldást a nyíróerő szögtorzító hatásának figyelembevételével finomítani akarjuk, az (1) és (2) alapján kiszámítjuk Q_x nyíróerő értékét. Evvel megbecsülhető a szögtorzulás. Írjuk fel megoldásunkat

$$\bar{W} = W + W^*$$

alakban, ahol $\bar{W}$ a deformáció pontosabb értéke, W az (1), (2) egyenletek alapján számítható közelítő érték, W^* pedig a Q_x szögtorzító hatása következtében alkalmazandó korrekciós tag.

Közelítésben feltesszük, — miután a deformációnak a nagyságrendjét akarjuk megbecsülni, — hogy a τ_{xz} nyírófeszültség a h vastagság mentén egyenletesen oszlik el:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x}{h}.$$

A síkbeli feszültségeloszlás elmélete alapján a henger alapsíkjával párhuzamos síkmetszet és a hengeralkotó szögének torzulása közelítőleg $\frac{Q_x}{h}$ nyírófeszültség következtében

$$\frac{\partial W^*}{\partial x} = \frac{Q_x}{\frac{\nu}{2(1+\nu)} E h}.$$

megoldása finomítható a perturbációszámítás módszerei szerint. Legyen pl. (12a)-ban

$$\begin{aligned}\eta_{\xi} &= n_{\xi 0} + \varepsilon^2 \Delta n_{\xi}, \\ n_{\xi \eta} &= n_{\xi \eta 0} + \varepsilon^2 \Delta n_{\xi \eta},\end{aligned}$$

ahol $n_{\xi 0}, n_{\xi \eta 0}$, a (15), (16) alapján meghatározható nulladik közelítést jelentő megoldások. Akkor az ismeretlen $\varepsilon^2 \Delta n_{\xi}, \varepsilon^2 \Delta n_{\xi \eta}$ korrekciós tagokra érvényes differenciálegyenlet

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta n_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\Delta n_{\xi \eta}) = 0.$$

Hasonlóképp vehetők figyelembe a határfeltételekben is az esetleg elhanyagolt tagok.

Legyen valamely határfeltétel alakja pl.

$$L(n_{\xi}^{(1)}, n_{\xi}^{(2)}, n_{\xi \eta}^{(1)}, \dots) + \Delta \varepsilon (n_{\xi}^{(1)}, n_{\xi}^{(2)}, n_{\xi \eta}^{(1)}, \dots) = f(\eta),$$

ahol L és Δ az $n_{\xi}^{(1)} \dots$ állandó együtthatójú lineáris függvényei és az (1) felső index a ξ_1 abszcisszájú határkörre vonatkozó értékeket jelöl. $n_{\xi 0}, n_{\xi \eta 0}, \dots$, kielégítik az

$$L(n_{\xi 0}, n_{\xi \eta 0}, \dots) = 0$$

egyenletet. Ha $n_{\xi 0} = n_{\xi} + \varepsilon \cdot \Delta n_{\xi}$, stb., akkor $\Delta n_{\xi}, \dots$ kielégítik az

$$L(\Delta n_{\xi}^{(1)}, \Delta n_{\xi}^{(2)}, \Delta n_{\xi \eta}^{(1)}, \dots) = -\Delta (n_{\xi 0}^{(1)}, n_{\xi 0}^{(2)}, n_{\xi \eta 0}^{(1)}, \dots).$$

Tehát a $\Delta n_{\xi}, \dots$ értékekre vonatkozó határfeltételek hasonló alakúak, mint az $n_{\xi 0}, \dots$ értékekre vonatkozó feltételek.

Ilyen egyenletrendszerre vezetnek pl. általában a következő típusú határfeltételek:

$$L^{(i)}(n_{\xi}, n_{\xi \eta}, n_{\eta}) = F^{(i)}(\eta),$$

ahol $L^{(i)}$ a felületirányú n -erők (18b) szerinti lineáris kombinációi, vagy:

$$L^{(i)}(u, v) = F^{(i)}(\eta).$$

Tehát megoldásunk általában nem használható, ha a határfeltételek olyanok, hogy a henger mindkét végén előírják a felületirányú erőket, sem pedig akkor, ha a deformációkat írják elő.

Hogy ezt összehasonlíthassuk a $\frac{\partial W}{\partial x}$ értékkel, redukáljuk képleteinket dimenzió nélküli alakra a (4), (6), (12) képletek alapján:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w^*}{\partial \xi} &= \frac{2(1+\nu)}{\nu} q_{\xi} \cdot \varepsilon^2, \text{ és} \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} &= \frac{2(1+\nu)}{\nu} \frac{\partial q_{\xi}}{\partial \xi} \cdot \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Ez a tag tehát a (13d) egyenletben ε^2 nagyságrendű hibát okoz, tehát ugyanolyan nagyságrendű hibát, mint a többi elhanyagolt tag.

Abban az esetben, ha a hengerfelületre ható terhelés egy része valamilyen a hengerfelületre írt $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ görbék mentén oszlik meg, amelyek bizonyos símasági követelményeket tesznek (pl. a kiterített hengerpaláston analitikus görbék megfelelőek), a (14) differenciálegyenlet jobboldala γ_1 -en, γ_2 -n, $\dots$ nincs értelmezve. q_ξ -nek — és egyúttal w''' -nek is, — γ_1 -en, γ_2 -n, $\dots$ a görbén megoszló terhelésnek megfelelő ugrása van. Ez könnyen igazolható, ha a γ_k görbén ható terhelést először egy δ szélességű sávra »kenjük szét« — erre érvényesek a (14)–(15)–(16) egyenletek — azután $\delta \rightarrow 0$ határátmenetet végzünk. A határátmenet elvégzésével igazolható, hogy a (16) egyenletek görbékre koncentrált terhelés esetén is érvényben maradnak. Ugyanis a vonal mentén megoszló terhelés miatt γ_1 -en, γ_2 -n $\frac{\partial^3 s_i}{\partial \xi^3}, \frac{\partial^3 s_i}{\partial \xi^2 \partial \eta}, \frac{\partial^3 s_i}{\partial \xi \partial \eta^2}$ véges ugrást szenved. Ennélfogva a (16) egyenletek jobboldalai mind korlátos függvények. γ_k és γ_{k+1} között érvényes marad a (14) egyenlet is. Ennek alapján w éppúgy szakaszról szakaszra haladva határozható meg, mint koncentrált erőkkel és megoszló terheléssel terhelt tartó lehajlása.

II. RÉSZ

A vékony héjak elméletének alkalmazása

A. Határfeltételek.

A bevezetésben körvonalazott műszaki probléma megoldása a vékony hengeres héjak elméletének alkalmazását kívánja. A méretezendő cső alkotóirányú mérete nem tekinthető olyan hosszúnak, hogy a H hengerrel, illetőleg T tárcsával való érintkezési vonalak következtében fellépő hajlítófeszültségek csak »Randstörung«-ot jelentsenek és így gyorsan csillapodó tranziens hullámot adjanak. (Ez az első rész eredményeinek felhasználásával azt jelenti, hogy a ξ dimenzió nélküli paraméternek a cső teljes szabad hosszával (l) számított legnagyobb értéke, λ , sem nagy az egységgel összehasonlítva. (Vagyis a cső méretezéséhez a felhasználható legegyszerűbb elméletnek is tekintetbe kell vennie a hajlítófeszültségeket.)

Meg kell tehát állapítanunk, hogy az I. részben ismertetett közelítő eljárás alkalmazható-e feladatunk megoldásához. Mint láttuk, ez elsősorban a határfeltételek jellegétől függ.

Vizsgáljuk meg a cső végeinek rögzítési módját a megoldandó műszaki feladat esetében.

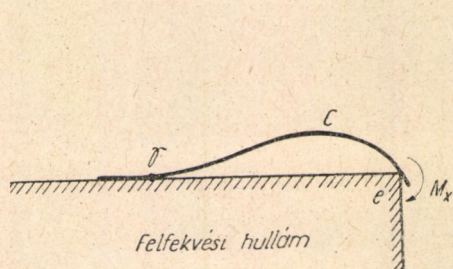
Ahhoz, hogy a hengeres héj műszakilag kielégítő módon rögzítse egymáshoz a H tömör hengert és a T tárcsát, szükséges, hogy

1. C a teljes kerületen érintse T -t,
2. C a tömör henger alaplapjának teljes e élhosszán érintse H -t,
3. A cső e -n kívül legalább még egy γ , a tömör henger palástján körbefutó görbe teljes hosszán érintse H -t.

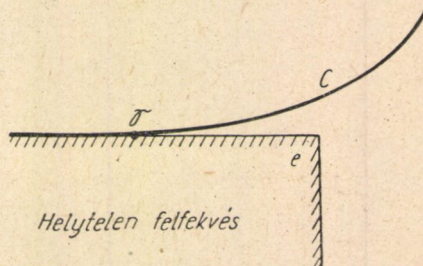
Az 1. feltétel biztosítja, hogy a cső T -n oly módon van rögzítve, hogy nyomatékot nem visz át, 2. és 3. pedig, hogy — befogáshoz hasonlóan — nyomatékot is át tud venni H -tól.

A továbbiakban végig feltételezzük ennek a három feltételnek a teljesülését, még akkor is, amikor azt tesszük vizsgálat tárgyává, hogy milyen feltétellel teljesül ez a három műszaki követelmény, az ezek alapján levezetett egyenletekből állapítjuk meg érvényességük határát.

Az e él általában C -nek egy olyan szakaszával határos, amely nem érintkezik H -val. Ugyanis az érintkezés azt jelentené, hogy a henger radiális deformációja állandó, ez pedig — feltételezve, hogy (14)–(15)–(16) egyenleteink jó közelítést adnak, ami utólag igazolható, — azt eredményezné, hogy a $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$ és vele m_ξ , amely nyilván nem azonosan 0 az e -nek T felé eső szomszédságában, az e élen ugrással menne át 0-ba. Ez pedig végtelen nagy q_ξ -t adna (16d) értelmében. Ésszerűbb feltennünk, hogy $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$ folytonosan változik és C csak távolabb, egy olyan γ görbén éri el újra a hengert, ahol a (14) egyenletek alapján kiszámított $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0$. Innen már símán ráfekszik a cső a hengerre (4a. ábra). A csőnek 4b. ábra szerinti deformációja műszaki szempontból nem nyújt elegendő biztonságot, nem engedhető meg.



4a. ábra



4b. ábra

A megoldás megkonstruálásával igazoljuk, hogy a 4a. ábra szerinti megoldás van. Másrészt, ha (14), (15), (16) egyenletek érvényesek, akkor bebizonyítjuk (v. ö. II. rész 3. pont), hogy γ után C nem válhat el többé H -tól, hacsak H -nak elegendő hosszú szakasza áll még rendelkezésre a sima felfekvés céljára.

Az I. részben bebizonyítottak alapján a (14)–(15)–(16)-ot kielégítő megoldás létezése — mint alább látni fogjuk — egymagában elegendő az alkalmazott elhanyagolások jogosságának igazolására.

Megközelítőleg sem tekinthető a cső a hengeren befogottnak, t. i. különösen kis l értékeknél, illetőleg ha e -n nagy M_x nyomaték hat, a számítás igen nagy Q_x nyíróerőt eredményezne, ami azonban a valóságban nem lép fel az e csőkeresztmetszet elfordulásából adódó nagyobb rugalmasság miatt.

A cső a γ görbe egyik oldalán H -t teljes palástja mentén érinti. Jelöljük az érintkezés területét t -vel. Miután H átmérője nagyobb a cső belső átmérőjénél és H merevnek tekinthető tömör henger, a cső és henger között C felsajtolásakor a csőben keletkező gyűrűs húzófeszültségből kiszámítható jelentékeny tapadó súrlódási erők lépnek fel a t felületrészen. Ez a súrlódás az elcsuszás határán a teljes, felületre normális erőhatással arányos, tehát végeredményben t terü-

tével. Ezért a biztos erőátvitel érdekében megkívánhatjuk, hogy t területe legyen elegendő a tapadás létrehozásához, tehát legyen t -n belül egy olyan e -vel párhuzamos k kör, amelyen C a terhelés hatása alatt is mozdulatlan marad.

Foglalkozzunk C -nek k és T közti szakaszával. Erre a szakaszra a következő külső erők hatnak:

1. k és γ között a felsajtolás következtében keletkező felületen megoszló, felületre normális terhelés.

2. k és γ között a tapadó súrlódás, mint felületen megoszló, a felületelem érintősíkjába eső terhelés,

3. γ -n a felületre merőleges, vonal mentén megoszló terhelés (reakcióerő),

4. e -n a felületre merőleges irányban ható vonal mentén megoszló terhelés (a felsajtolás következtében és reakcióerő),

5. A hengerpalást érintősíkjába eső súrlódás mint az e élen és γ -n megoszló terhelés.

Ezeken kívül a határokon:

6. T -n a felületre merőleges, jó közelítéssel vonal mentén megoszló terhelés (a felsajtolás és a G erő következtében). A felületi érintősíkjába eső terhelés nincs, tehát feltesszük, hogy a tárcsán a cső szabadon elcsúszhat. (A fellépő súrlódás elhanyagolható.) Ennélfogva a tárcsa nem gyakorol C -re a felületi érintősíkjába eső erőhatást: $N_x = N_{xy} = 0$. A Q_x nyíróerő nagyságát a felsajtolás okozta sugárnövekedés és a G erő szabja meg. Hasonlóképp feltehetjük, hogy a tárcsa nem gátolja C -nek a T érintője körüli elfordulását, tehát itt is $M_x = 0$.

7. A k -n esetleg fellépő, a felületi érintő síkjában fellépő erők ismeretére nincs szükségünk a további vizsgálatokhoz. Viszont feltesszük, hogy itt a felület érintősíkjába eső elmozdulás nincs:

$U = 0, V = 0$. Miután k mentén C érinti H -t, itt

$$W = f, W' = 0.$$

Az 1., 2., 3., 4. terhelésekre alkalmazhatók az (1)–(2) egyenletek. Az 5. és 6. szerint a hajlításra vonatkozó határfeltételek el vannak választva a felületirányú erőkre és deformációkra vonatkozó (membránszerű) határfeltételektől. Ez azt jelenti, hogy az I. rész C . pontja szerint a hajlítási probléma a felület érintősíkjában ható erőktől és elmozdulásoktól elkülönítve tárgyalható. Tegyük fel, hogy a hajlítási problémát megoldottuk a hajlítással összefüggő határfeltételek figyelembevételével.

Akkor megoldásunk helyessége utólag verifikálható. Ugyanis (19) egyenleteink most a következőképp alakulnak, tekintetbevéve

$$\xi = \xi_1 \text{-nél } u = 0, v = 0,$$

$$\xi = \xi_2 \text{-nél } n_\xi = 0, n_{\xi\eta} = 0$$

határfeltételeket:

$$E(\eta) = -\frac{1}{4} \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^3 \partial \eta} (w - s_1 - s_2 - s_3) \right]_{\xi=\xi_2} \equiv \dot{\varphi}_1(\eta)$$

$$E'(\eta) + F(\eta) = -\frac{1}{4} \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} (w - s_1 - s_2 - s_3) \right]_{\xi=\xi_2} \equiv \varphi_2(\eta)$$

$$G(\eta) = -\frac{\nu}{4} \left[\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} (w - s_3) \right]_{\xi = \xi_1} \equiv \varphi_3(\eta)$$

$$\left[\frac{1+\nu}{2} E(\eta) - G'(\eta) \right]_{\xi_1} + H(\eta) =$$

$$-\frac{2+\nu}{4} \left[\frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} (w - s_3) \right]_{\xi = \xi_1} - \frac{1+\nu}{2} \left[\frac{\partial^3 s_2}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\xi = \xi_1} \equiv \varphi_4(\eta).$$

($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ -nak 2π szerint periodikus függvényei). Nyilvánvaló, hogy ennek az egyenletrendszernek mindig van η -ban periodikus megoldása, ha w és s_1, s_2, s_3 η -ban periodikus függvények.

Tehát: Ha a »membránszerű« terhelés jellemző mennyiségeire nincs szükségünk, elegendő az elkülönített hajlítási problémával foglalkoznunk (amely csak n_η -n keresztül függ össze a membránszerű terhelés mennyiségeivel, és önállóan megoldható. A megoldás a (kisbetűs) dimenzió nélküli mennyiségek segítségével történik és létezése egymagában igazolja az elhanyagolások jogosságát.

Differenciálegyenletrendszerünk k -tól T -ig terjedő tartománya három csatlakozó részre bontható fel.

1. T -től e -ig.

2. e -től γ -ig.

3. γ -tól k -ig. Itt hajlítási probléma egyáltalán nincs a mondottak értelmében, vagyis ezzel a szakasszal külön foglalkoznunk felesleges.

Vegyük fel koordinátarendszerünk ξ -tengelyét (v. ö. 2. ábra) a henger valamely kiválasztott alkotóján oly módon, hogy az origó e -re essék, a pozitív ξ -tengely T felé mutasson. Legyen a (4) egyenlet szerint redukált eT távolság λ , továbbá ezen az alkotón hasonlóképpen mérve γ abszcisszája $-\varrho$. Tehát

$$\lambda = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\hbar R} l, \quad \varrho = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\hbar R} l_0,$$

ahol l az e él és T valódi távolsága és l_0 a »felfekvési hullám« hossza, amely még a kiválasztott alkotó η középponti szögétől függ.

Legyen a (6) egyenlet szerint W mérésére választott f egység a cső sugarának az e élre történő felhúzásnál elszenvedett megnövekedése. (f mindig pozitív konstans). Tehát $W(0, y) = f$.

Legyen továbbá

$$W(l, y) = f^*(y) = f_0 + f_1^*(y)$$

ahol $f^*(y)$ jelenti a T síkjában lévő csőkeresztmetszetre a tárcsa által rákényszerített teljes radiális deformációt (eredő sugárnövekedés). f_1 a súlyterhelés nélkül pusztán a nagyobb átmérőjű tárcsára történő felsajtolás által előidézett sugárnövekedést (ez y -tól független) és $f_1^*(y)$ a G erő következtében létrejövő nem tengelyszimmetrikus sugárnövekedés értékét.

Feltéve, hogy C a deformáció alatt is érinti T -t teljes kerületén és a tárcsa középpontjának G irányába eső kitérése f_1 ,

$$f_1^*(y) = f_1 \cdot \cos \eta.$$

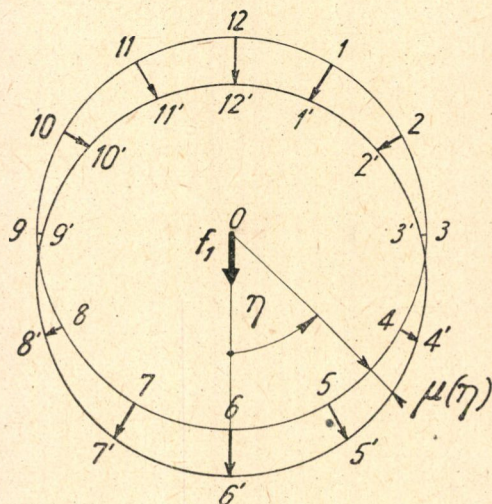
A következőkben G helyett f_1 -et tekintjük adottnak és keressük, hogy az f, f_0 és f_1 deformációk másutt milyen deformációkat és feszültségeket okoznak.
Legyen

$$f^*(y) = f \cdot \mu(\eta)$$

ahol $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén $\mu(\eta) = O(1)$.

Tekintettel a transzformációs formulákra, $\varepsilon \ll 1$ esetén $U \ll \mu_{\max} \cdot f$ és $V \ll \mu_{\max} \cdot f$ ($\mu_{\max}$ jelenti $\mu(\eta)$ legnagyobb értékét). Ebből azt a meglepő következtetést vonhatjuk le, hogy a C cső T síkjában lévő K keresztmetszetének pontjai a G erő hatása alatt nem függőlegesen, hanem sugárirányban mozdulnak el! (v. ö. 5. ábra). Ez azt eredményezi, hogy ha G függőlegesen lefelé hat, a K pontjai felül távolodnak egymástól, alul közelednek, vagyis K felül erős nyúlást, alul zsugorodást szenved.

Az 1., és 2. szakasz hajlítási problémája következőkép fogalmazható :



5. ábra

Keressük a (14a) differenciálegyenlet olyan w_1 és w_{11} megoldásait, amelyekre érvényesek a következő feltételek :

1) *Határfeltételek a $w_1(\xi)$ megoldásra. (eT szabad csőszakasz)*

$$(22a) \quad w_1(0) = 1$$

$$(22b) \quad w_1(\lambda) = \mu(\eta)$$

$$(22c) \quad w_1''(\lambda) = 0$$

(a tárcsa saját érintője körül forgatónyomatékokat nem ad át a csőnek).

2) *Határfeltételek a $w_{II}(\xi)$ megoldásra. ($e\gamma$ felfekvési hullám)*

$$(23a) \quad w_{II}(-\varrho) = 1,$$

$$(23b) \quad w'_{II}(-\varrho) = 0,$$

$$(23c) \quad w''_{II}(-\varrho) = 0,$$

(γ -n m_ξ nyomaték nem lép fel, v. ö. (16c)–(16d) egyenletek),

$$(23d) \quad w_{If}(0) = 1.$$

3) *Csatolási feltételek.*

$$(24a) \quad w'_I(0) = w'_{II}(0) = \kappa \quad (\text{a cső } e\text{-n nem törik meg})$$

$$(24b) \quad w''_I(0) = w''_{II}(0) = m \quad (\text{a nyomaték } e\text{-n folytonosan változik}).$$

w_I és w_{II} általános megoldása (15) szerint összesen 8 szabadon választható állandót tartalmaz. Miután fentiekben 9 feltételt kaptunk, a feladat rögzített ϱ mellett túlhatározottá válnék.

Tehát ϱ nagysága a kilencedik ismeretlen egyenletrendszerünkben: a γe felfekvési hullám hossza a terheléstől függ.

Feladatunkat három lépésben oldjuk meg:

I. Meghatározzuk (22) és (24a) határfeltételekkel megadott w_I függvényt, miközben κ értéket ismertnek tekintjük. (Ezáltal (24a) is határfeltétellé válik.)

II. Meghatározzuk w_{II} -t a (23) és (24a) határfeltételek segítségével. Ezáltal ϱ és κ között összefüggést kapunk.

III. (24b) egyenlet segítségével egy újabb összefüggést kapunk κ -ra és ϱ -ra, amiből κ és külön-külön meghatározhatókká válnak.

Megjegyezzük, hogy II. és III. együttesen nemlineáris összefüggést adnak

$$w'_I(0) \text{ és } w''_I(0)$$

között, amely negyedik — nemlineáris — határfeltételt ad w_I számára a meglévő három lineáris (22a, b, c) mellé.

B. A szabadonfutó eT csőszakasz hajlítási problémája

A hajlítást leíró (14a) egyenlet homogén lineáris differenciálegyenlet, és a w_I -re vonatkozó (22), (24a) határfeltételek is lineárisak, ezért alkalmazhatjuk rá a szuperpozíció elvét. Ennek megfelelően az alábbi határfeltételcsoportokat kielégítő megoldásokat keressük:

$$\begin{aligned} 1) \quad & w_I(0) = 0, & w_I(\lambda) &= 1, \\ & w'_I(0) = 0, & w''_I(\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & w_2(0) = 1, & w_2(\lambda) &= 0, \\
 & w_2'(0) = 0, & w_2''(\lambda) &= 0. \\
 3) \quad & w_3(0) = 0, & w_3(\lambda) &= 0, \\
 & w_3'(0) = 1, & w_3''(\lambda) &= 0.
 \end{aligned}$$

Akkor (22) és (24a) értelmében

$$(25) \quad w_1(\xi) = \mu(\eta) w_1(\xi) + w_2(\xi) + \kappa w_3(\xi).$$

A három megoldás meghatározásánál az általános (15) egyenletből kiszámítjuk a konstansokat. A 2) és 3) megoldások meghatározására célszerű koordináta-rendszerünk kezdőpontjának $\xi = \lambda$ -ba való áthelyezése. A megoldások állandói a trigonometrikus és hiperbolikus függvények elemi összefüggéseinek felhasználásával erősen egyszerűsödnek. Eredményeink:

$$(26a) \quad w_1 = a_1(\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi) + b_1 \operatorname{sh} \xi \sin \xi,$$

$$(26b) \quad w_2 = a_2 \operatorname{ch}(\lambda - \xi) \sin(\lambda - \xi) + b_2 \operatorname{sh}(\lambda - \xi) \cos(\lambda - \xi),$$

$$(26c) \quad w_3 = a_3 \operatorname{ch}(\lambda - \xi) \sin(\lambda - \xi) + b_3 \operatorname{sh}(\lambda - \xi) \cos(\lambda - \xi),$$

ahol

$$(27a,b) \quad a_1 = -2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}, \quad b_1 = 2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda},$$

$$(27c,d) \quad a_2 = -2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda - \operatorname{sh} \lambda \sin \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}, \quad b_2 = 2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda + \operatorname{sh} \lambda \sin \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda},$$

$$(27e,f) \quad a_3 = -2 \frac{\operatorname{sh} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}, \quad b_3 = 2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}.$$

Tekintetbevéve a (10) redukciós képleteket, w -ból a következőkép számítható az y irányban ható σ_2 gyűrűs feszültség:

$$\sigma_2 = \frac{N_y}{h} = E \frac{f}{R} n_\eta,$$

és (16f) alapján

$$\sigma_2 = \frac{Ef}{R} w.$$

A szélső szálban ébredő y -tengely körül hajlító feszültség értéke

$$\sigma_{xh} = \frac{6M_x}{h^2} = \frac{Ef}{R} \cdot 2 \sqrt{\frac{3}{1 - \nu^2}} \cdot m_\xi;$$

és (16c) alapján

$$\sigma_{xh} = \frac{Ef}{R} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{1 - \nu^2}} w''.$$

Az 1—6. mellékletekben közöljük a legfontosabb feszültségek meghatározásához szükséges

$$(28) \quad \varphi = w \quad \text{és} \quad \psi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} w''$$

mennyiségek görbéit. (ψ segítségével kényelmesebb a hajlítófeszültség számítása, mint w'' -vel és aránya φ -hez megadja a hajlító- és gyűrűsfeszültség arányát.)

A gyűrűsfeszültség :

$$(29a) \quad \sigma_2 = \frac{Ef}{R} \varphi.$$

A hajlítófeszültség :

$$(29b) \quad \sigma_{\text{zh}} = \frac{Ef}{R} \psi.$$

A nyírófeszültségek (főként τ_{xz}) meghatározása szélsőséges esetekben szintén fontos (különösen kis λ értékek esetén, amikor igen nagy lehet a nyírófeszültség). Helyszűke miatt azonban q_ξ görbéinket, amelyekből τ_{xz} kiszámítható, nem közöljük.

Miután a cső tervezésénél a csőhossz adottnak tekinthető, mindenesetre egy meglévő konstrukciónál a terheléstől függetlenek, ξ helyett olyan t független változót vezettünk be, amellyel a teljes eT szakasz $t = 1$ -nek felel meg, tehát a

$$t = \frac{x}{l} = \frac{\xi}{\lambda}$$

változót.

Meghatározzuk még

$$m = w''(0)$$

értékét. (25) alapján $m = \mu m_1 + m_2 + \kappa m_3$, ahol

$$m_1 = w_1''(0), \quad m_2 = w_2''(0), \quad \text{és} \quad m_3 = w_3''(0)$$

•Elemi számolással kiadódik

$$(30a) \quad m_1 = \frac{2 (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda)}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda},$$

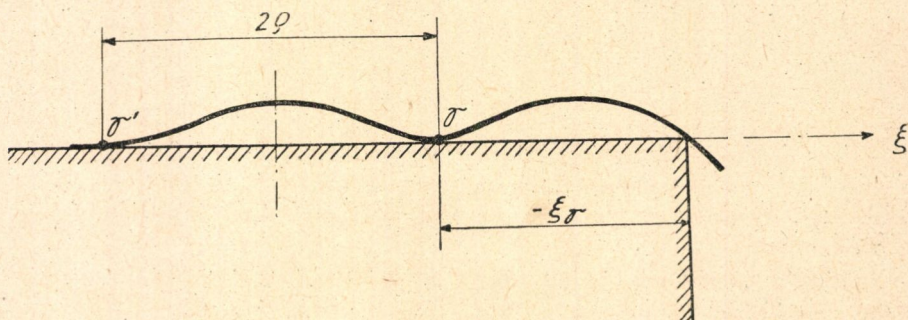
$$(30b) \quad m_2 = - \frac{\operatorname{sh} 2\lambda + \sin 2\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda},$$

$$(30c) \quad m_3 = - \frac{\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}.$$

C. A felfekvési hullám

Bebizonyítjuk, hogy ha H elegendő hosszú, csak egy felfekvési hullám alakulhat ki, tehát γ egyik oldalán valóban olyan t területet határol, amelyen C rásimul H -ra. Ugyanis tegyük fel, hogy C γ mindkét oldalán elválík H -tól. Ez annak a következménye kell hogy legyen, hogy γ -n $M_x > 0$. Alkalmazzuk a (14) differenciálegyenlet homogén alakját a második elválási szakaszra. Miután itt $w > 1 > 0$, következésképp $w^{IV} < -4$, — kell hogy legyen minden alkotón, ahol az elválás létrejön, egy további γ' pont, ahol a cső újból érintkezik a görbével (6. ábra), mert ellenkező esetben, tetszésszerinti feltételek is legyenek γ -n, kimutathatjuk az egyenlőtlenség két oldalának integrálásával, hogy lehet olyan $\xi_\alpha < \xi_\gamma$ abszcisszát találni, amelytől kezdve balfelé

$$w''' < -a, \quad a > 0 \text{ rögzített állandó.}$$



6. ábra

A gondolatmenetet hasonlóan folytatva további háromszori integrálással kimutatható olyan $\xi_\beta < \xi_\gamma$ létezése, amelytől balfelé $w < 1$ volna, ha H nem gyakorolna további erőt C -re.

Mármint γ és γ' között érvényes a homogénra tett (14) differenciálegyenlet a következő határfeltételekkel:

$$(21a) \quad w_\gamma = w'_{\gamma'} = 1,$$

$$(21b) \quad w'_{\gamma} = w_{\gamma'} = 0.$$

A feladat megoldása (15) figyelembevételével az A, B, C, D meghatározására redukálódik. Vegyük fel a koordinátarendszer kezdőpontját a henger kiválasztott alkotóján γ és γ' között középen és legyen a $\gamma\gamma'$ távolság ugyanitt 2ρ , a (4) egyenlet szerinti hosszúságredukció végrehajtása után. Akkor az együtthatókat (21) egyenletekből meghatározva kapjuk:

$$w = A \operatorname{ch} \xi \cos \xi + B \operatorname{sh} \xi \sin \xi,$$

ahol (a hyperbolikus függvények elemi relációinak felhasználásával)

$$A = 2 \frac{\operatorname{ch} \rho \sin \rho + \operatorname{sh} \rho \cos \rho}{\operatorname{sh} 2\rho + \sin 2\rho}, \quad B = 2 \frac{\operatorname{ch} \rho \sin \rho - \operatorname{sh} \rho \cos \rho}{\operatorname{sh} 2\rho + \sin 2\rho}.$$

Elemi átalakításokkal

$$A - 1 = -2 \frac{(\operatorname{ch} \varrho - \cos \varrho)(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)}{\operatorname{sh} 2\varrho + \sin 2\varrho}.$$

Miután az itt szereplő törtnek számlálója is és nevezője is minden $\varrho > 0$ -ra pozitív, következik:

$$A < 1.$$

Azonban

$$w(0) = A,$$

tehát a (21) határfeltételek következikésképp C átmérője $\xi = 0$ -ban H átmérőjénél kisebb volna, ami nem lehetséges.

Ezután határozzuk meg az egyetlen létrejövő hullám alakját.

A (23) egyenleteket kielégítő w az előző pontbeli megoldásokhoz hasonlóan számítható ki. Értéke:

$$(31) \quad w_{II} = \operatorname{ch}(\xi + \varrho) \cos(\xi + \varrho) + b_{II} [\operatorname{ch}(\xi + \varrho) \sin(\xi + \varrho) - \operatorname{sh}(\xi + \varrho) \cos(\xi + \varrho)],$$

ahol

$$(32) \quad b_{II} = \frac{1 - \operatorname{ch} \varrho \cos \varrho}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho}; \quad -\varrho \leq \xi \leq 0.$$

Ebből leszarmaztathatók κ és m . Egyszerű átalakítások után

$$(33) \quad \kappa = w'_{II}(0) = f(\varrho) \equiv - \frac{(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)^2}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho}, \text{ és}$$

$$(34) \quad m = w''_{II}(0) = g(\varrho) \equiv - \frac{(\operatorname{ch} \varrho - \cos \varrho)(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho}.$$

A 7. és 8. melléklet feltünteti $w_{II} = \varphi_{II}(\xi)$ és a hajlítófeszültség számításához

szükséges $\sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} w''_{II} = \psi_{II}(\xi)$ görbéit. Külön ábrán szemléltettük (9. melléklet) a maximális gyűrűs feszültséget adó $\varphi_{\max}$, κ és a maximális hajlítófeszültséget adó $\psi(0)$ függését ϱ -tól (a felfekvési hullám relatív hosszától). Látható az ábrából, hogy kis ϱ esetén kitérés alig van, de nagyobb ϱ értékekre φ rohamosan megnő. A mellékletek görbéiből épp úgy állapíthatók meg a fellepő feszültségek, mint az eT szakasz esetén.

D. Csatolási egyenlet

(24), (25), továbbá (33) és (34) alapján

$$(35) \quad \mu \cdot m_1 + m_2 + f(\varrho) m_3 = g(\varrho),$$

ahol $m_1 = w'_1(0)$, $m_2 = w''_2(0)$, $m_3 = w''_3(0)$ és $\mu = \mu(\eta)$ a kiválasztott alkotó végpontjára a T tárcsa által kényszerített sugárirányú kitérés.

Részletesen kiírva (30), (33), (34) alapján

$$\begin{aligned}
 (35a) \quad & 2\mu \frac{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda} - \frac{\operatorname{sh} 2\lambda + \sin 2\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda} + \\
 & + \frac{(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)^2}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda} = \\
 & = - \frac{(\operatorname{ch} \varrho - \cos \varrho)(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho}
 \end{aligned}$$

Így (35) ϱ számára transzcendens egyenletet ad, amelyből az meghatározható.

ϱ meghatározására a 10. melléklet ad nomogrammot, amelyből λ ismeretében meghatározható ϱ és a hozzá tartozó κ érték κ ismeretében az 1–9. mellékletek segítségével a cső bármely pontján fellépő legfontosabb deformációk és feszültségek megállapíthatók, ha ismerjük f , f_0 és f_1 értékét.

$\lambda \rightarrow \infty$ esetén (30) alapján $m_1 \rightarrow 0$, $m_2 \rightarrow -1$, $m_3 \rightarrow -1$, tehát (35) a következőképpen alakul:

$$1 + f(\varrho) = g(\varrho).$$

Vagyis elég nagy λ esetén (amikor a tárcsa nincs nagy befolyással a hengeren kialakuló deformációkra) a gyűrődési szakasz hossza független f -től! Az elválási feltételek és a nyíróerők szempontjából túlságosan kis λ kedvezőtlen, mint ezt később látni fogjuk. Ebből az a meglepő, műszakilag fontos tény adódik, hogy ha a számítás műszakilag megengedhetetlenül nagy ϱ -t adna, ezen nem segíthetünk a henger sugarának növelésével, a nagyobb túlfedés egyáltalában nem teszi C -nek H -n való rögzítését befogáshoz hasonlóbbá.

A kialakuló nagyobb gyűrűsfeszültség és hajlítófeszültség pedig egyenesen hátrányossá teszi a henger és cső közt alkalmazott túlfedés növelését.

Ez a következtetés plauzibilissé válik, ha meggondoljuk, hogy a nagyobb f megnöveli az eT szakasz által e -nél átadott nyomatékot is, és ez a nagyobb nyomaték növeli az elválás mértékét, tehát ellene dolgozik a nagyobb gyűrűsfeszültség simító hatásának.

E. Megoldás létezésének kritériumai

Megvizsgáljuk, hogy (35) egyenletnek milyen feltételek mellett van és ha van, hány olyan megoldása van, amelyre $w_{II}(\cdot) \geq 1$, a teljes $(-\varrho, 0)$ szakaszon. Modellünk ugyanis kizárja, hogy a felfekvési hullám bárhol benyomódjék a hengerbe.

Előrebocsátjuk, hogy 1. ennek szükséges feltétele

$$(36) \quad m^* = \mu(\gamma)m_1 + m_2 < 0.$$

Ugyanis $m_3 < 0$ következik (30c)-ből. (35) alapján tehát

$$\begin{aligned}
 (37) \quad & -(\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho) m^* = |m_3|(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)^2 + \\
 & + (\operatorname{ch} \varrho - \cos \varrho)(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho).
 \end{aligned}$$

Tekintetbevéve, hogy (37) egyenlet jobboldala minden $\varrho > 0$ -ra pozitív,

$$(38) \quad \text{sign } m^* = -\text{sign}(\text{ch } \varrho \sin \varrho - \text{sh } \varrho \cos \varrho) = \text{sign } \kappa.$$

Azonban $\kappa < 0$ szükséges a felfekvési hullám létrejöttéhez.

2. (36) elégséges is ahhoz, hogy (35)-nek legyen olyan ϱ_0 pozitív megoldása, melyre teljesül $\varrho_3 < \varrho_1$, ahol ϱ_1 a

$$(39) \quad \text{tg } \varrho = \text{th } \varrho$$

egyenlet legkisebb pozitív gyöke, ($\varrho_1 \approx 3.927$)

Legyen

$$-(\text{ch } \varrho \sin \varrho - \text{sh } \varrho \cos \varrho) m^* = \Phi(\varrho)$$

$$\text{és} \quad |m_3|(\text{sh } \varrho - \sin \varrho)^2 + (\text{ch } \varrho - \cos \varrho)(\text{sh } \varrho - \sin \varrho) = \Psi(\varrho).$$

Meg kell állapítanunk, hogy $\varrho \rightarrow 0$ esetén $\Phi(\varrho) \varrho^3$ sebességgel, $\Psi(\varrho)$ pedig ϱ^5 sebességgel tart 0-hoz. Tehát elég kis $\varrho_2 > 0$ és $m^* > 0$ esetén

$$0 < \Psi(\varrho_2) < \Phi(\varrho_2).$$

Viszont

$$\Psi(\varrho_1) > \Phi(\varrho_1) = 0.$$

Tehát kell, hogy legyen, tekintettel Φ és Ψ folytonosságára, legalább egy ϱ_0 , melyre $0 < \varrho_3 < \varrho_1$, és

$$\Psi(\varrho_0) = \Phi(\varrho_0).$$

3. (35)-nek csak végeszámú pozitív megoldása lehet.

Nyilvánvaló, mert $\varrho \rightarrow +\infty$ esetén

$$\Phi(\cdot) = O(\epsilon \varrho)$$

$$\text{és } \Psi(\varrho) = O(\epsilon^2 \varrho).$$

De $\Psi(\varrho)$ monoton növekvő függvény, tehát elég nagy ϱ esetén $\Phi(\varrho) = \Psi(\varrho)$ nem lehetséges.

4. (35) egyenletnek csak egy ϱ_1 -nél kisebb gyöke lehet.

Ennek bizonyítására előre kell bocsátanunk, hogy $\Psi(\varrho)$ akárhányszorosan monoton függvény. Ugyanis $\text{ch } \varrho - \cos \varrho$ illetőleg $\text{sh } \varrho - \sin \varrho$ tiszta pozitív tagú Mac-Laurin sorba fejthető, ezek a sorok minden ϱ -ra konvergálnak, vagyis akárhányszorosan monoton függvények. De akkor pozitív együtthatójú szorzatösszegük is az.

Tegyük fel, hogy van (37)-nek ϱ_0 -n kívül még egy $\bar{\varrho}_0$ gyöke, amelyre

$$0 < \varrho_0 < \bar{\varrho}_0 < \varrho_1, \quad \text{és}$$

$$\Phi(\varrho_0) = \Psi(\varrho_0),$$

$$\Phi(\bar{\varrho}_0) = \Psi(\bar{\varrho}_0).$$

Cauchy középértéktétele alapján ebből következik, hogy található olyan ϱ'_0 és $\bar{\varrho}'_0$, amelyre

és

$$0 < \varrho'_0 < \varrho_0 < \bar{\varrho}'_0 < \bar{\varrho}_0,$$

$$\Phi'(\varrho'_0) = \Psi'(\varrho'_0),$$

$$\Phi'(\bar{\varrho}'_0) = \Psi'(\bar{\varrho}'_0).$$

Azonban $\Phi'(\varrho) = -2m^* \operatorname{sh} \varrho \sin \varrho$, tehát ha $\pi < \varrho < \varrho_1$, $\Phi'(\varrho) < 0$. Viszont $\Psi'(\varrho) > 0$ a $\Psi(\varrho)$ akárhányszoros monotonitása miatt. Így ϱ'_0 és $\bar{\varrho}'_0$ tartománya megszükhíthető:

$$0 < \varrho'_0 < \varrho_0 < \bar{\varrho}'_0 < \pi.$$

$\Phi'(0) = 0$ tehát újra alkalmazható a Cauchy-közéértéktétel a $(0, \varrho_0)$ és (ϱ_0, π) szakaszra. Kimutatható, hogy van olyan ϱ''_0 és $\bar{\varrho}''_0$, amelyre

$$0 < \varrho''_0 < \varrho'_0 < \bar{\varrho}''_0 < \bar{\varrho}'_0, \text{ és}$$

$$\Phi''(\varrho''_0) = \Psi''(\varrho''_0),$$

$$\Phi''(\bar{\varrho}''_0) = \Psi''(\bar{\varrho}''_0).$$

Az eddigiekhez hasonlóan okoskodva kiderül, hogy

$$\varrho''_0 < \varrho_2,$$

ahol ϱ_2 a

$$\operatorname{tg} \varrho = -\operatorname{th} \varrho$$

egyenlet legkisebb pozitív gyöke, és végül, hogy létezik olyan ϱ'''_0 és $\bar{\varrho}'''_0$, amelyre

$$0 < \varrho'''_0 < \varrho''_0 < \bar{\varrho}'''_0 < \frac{\pi}{2},$$

és

$$\Phi'''(\varrho'''_0) = \Psi'''(\varrho'''_0),$$

$$\Phi'''(\bar{\varrho}'''_0) = \Psi'''(\bar{\varrho}'''_0).$$

Ez azonban ellentmondás, mert

$$\Phi'''(\varrho) = 4 \operatorname{ch} \varrho \cos \varrho$$

(amint újbóli differenciálással meggyőződhetünk róla) a $(0, \frac{\pi}{2})$ szakaszon monoton csökkenő, $\Psi'''(\varrho)$ a $\Psi(\varrho)$ akárhányszoros monotonitása miatt monoton növekedő. Ennélfogva az $y = \Phi'''(\varrho)$ és $y = \Psi'''(\varrho)$ görbének $(0, \pi)$ -en csak egy metszéspontja lehet. Tehát a kiindulási feltevés hibás, (35)-nek csak egy ϱ_1 -nél kisebb gyöke van.

Hasonló módszerrel becsülhetjük (35) esetleges többi gyökének eloszlását is, erre azonban nem térünk ki, tekintettel arra, hogy ez főfeladatunk szempontjából érdektelen.

5. A (35) legkisebb $\varrho_0 > 0$ megoldásával kiszámított $w_{II}(\xi)$ kielégíti a $w_{II}(\xi) > 1$ követelményt $-\varrho_0 < \xi < 0$ szakaszon.

Bizonyítás : (31) alapján

$$\begin{aligned}
 (40) \quad & \frac{w_{II} - 1}{\operatorname{ch}(\xi + \varrho_0) \sin(\xi + \varrho_0) - \operatorname{sh}(\xi + \varrho_0) \cos(\xi + \varrho_0)} = \\
 & \frac{1 - \operatorname{ch} \varrho_0 \cos \varrho_0}{\operatorname{ch} \varrho_0 \sin \varrho_0 - \operatorname{sh} \varrho_0 \cos \varrho_0} = \\
 & \frac{1 - \operatorname{ch}(\xi + \varrho_0) \cos(\xi + \varrho_0)}{\operatorname{ch}(\xi + \varrho_0) \sin(\xi + \varrho_0) - \operatorname{sh}(\xi + \varrho_0) \cos(\xi + \varrho_0)} = \\
 & \equiv \chi(\varrho_0) - \chi(\xi + \varrho_0).
 \end{aligned}$$

Itt

$$0 < \xi + \varrho_0 < \varrho_0 < \varrho_1.$$

A baloldal nevezője pozitív, tekintettel arra, hogy kis $\xi + \varrho_0$ értékekre Mac-Laurin-sora szerint pozitív és első jelváltási helye ϱ_1 volna. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \chi(\varrho) = 0.$$

Tegyük fel, hogy $w_{II} < 1$, állításunkkal ellenkezően. Akkor $\chi(\xi + \varrho) > \chi(\varrho)$. $\chi(\varrho)$ azonban $(0, \varrho_1)$ zárt szakaszon folytonos (0 felé a szakasz zárttá tehető, ha megállapodunk $\chi(0) = 0$ -ban), tehát kell, hogy létezzen olyan $0 < \omega < \xi + \varrho$, amelyre

$$\chi(\omega) = \chi(\varrho_0)$$

Ez azonban lehetetlen, mert

$$\chi'(\varrho) = \frac{(\operatorname{sh} \varrho \cos \varrho)^2 + (\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho)^2}{(\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho)^2} > 0,$$

tehát $\chi(\varrho)$ $(0, \varrho_1)$ -ben monoton nő. Ezzel állításunkat igazoltuk.

6. $\varrho_0 < \varrho_1$ szükséges feltétel is, mert különben $w > 1$ nem teljesül az egész $(-\varrho_0, 0)$ szakaszon. (Ezzel a felfekvési hullám hosszára felső korlátot kaptunk.)

A (40) szerint $\chi(\varrho)$ függvény $(0, \varrho_1)$ szakasz befutásakor minden pozitív értéket felvesz (pontosan egyszer). Legyen $\varrho > \varrho_1$. Akkor találhatunk olyan ξ -t, amelyre

$$0 < \xi + \varrho_0 < \varrho_1, \quad \text{és}$$

$$\chi(\xi + \varrho_0) < \chi(\varrho_0).$$

Az első feltétel miatt a baloldal nevezője pozitív, tehát erre a ξ -re

$$w_{II}(\xi) - 1 < 0.$$

F. A tárcsasüllyedés meghatározása

Idáig feltettük, hogy a tárcsának a G erő hatása alatt való f_1 süllyedése ismeretes. A valóságban azonban nem f_1 , hanem G van adva. Sajnos, mint előző pontban kiderült, a cső deformációproblémájának egyik határfeltétele

nemlineáris. Ebből már következik, hogy f_1 általában nem arányos G -vel és a szuperpozíció elve nem érvényes, tehát ha valamilyen G_1 , a tárcsára saját síkjában ható erő f_1 , és G_2 , a G_1 hatásvonalába eső erő f_2 nagyságú tárcsakitérést okozna, és $f_1 + f_2 = f$, akkor általában

$$G_1 + G_2 \neq G.$$

Tekintettel ezekre a nehézségekre, $f_1^*(\eta)$ meghatározására közelítő eljárást alkalmazunk.

Mindenekelőtt f_0 -t és f_1 -et ismertnek feltételezve meghatározzuk G -t.

Miután a cső a tárcsa után közvetlenül véget ér, a T -vel szomszédos, H felé eső csőkeresztmetszetben keletkező Q_x , Q_y nyíróerők tartanak egyensúlyt G -vel. A (12) képletek alapján Q_y egy ε nagyságrenddel kisebb Q_x -nél. Ezért (elég durva) közelítésképpen úgy számolunk, mintha csak a hQ_x erők tartanának G -vel egyensúlyt. Tehát G -t az $f^* = f_0 + f_1 \cos \eta$ deformációk hatása alatt fellépő nyíróerő szerinti integrál adja meg.

A (12a) transzformációs képlet, továbbá (16d) egyenlet alapján kiadódik:

$$(41) \quad Q_x(l) = - \frac{f \cdot E}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2} w'''(\lambda).$$

Vezessük be az

$$\frac{1}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} w_1'''(\lambda) = \omega_1, \quad \frac{1}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} w_2'''(\lambda) = \omega_2, \quad \frac{1}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} w_3'''(\lambda) = \omega_3$$

jelöléseket.

Akkor, figyelembevéve (25) egyenletet

$$(42) \quad Q_x(l) = -fE \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2} [\mu(\eta) \omega_1 + \omega_2 + \kappa \omega_3].$$

ω_1 , ω_2 , ω_3 elemi számolással kiadódik (26) és (27) alapján

$$(43a) \quad \omega_1 = - \frac{1}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \frac{\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\lambda + 2}{2(\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda)},$$

$$(43b) \quad \omega_2 = \frac{1}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \frac{2 \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda},$$

$$(43c) \quad \omega_3 = \frac{1}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \frac{\operatorname{sh} \lambda \cos \lambda + \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}.$$

A 11. melléklet görbéi megadják az ω értékeket, mint λ függvényeit.

Ha az $\eta = 0$ -nak a legelső alkotó felel meg, függőlegesen lefelé irányuló G esetén,

$$(44) \quad G = R \int_0^{2\pi} Q_x(l) \cos \eta d\eta.$$

Sajnos, (42)-ben κ nemlineáris függvénye a 4. pontban mondottak értelmében $\mu(\eta)$ -nak és λ -nak. Ezért tulajdonképpen a kerület minden pontjára meg kellene határozni valamilyen adott $\mu(\eta) = \mu_0 + \mu_1 \cos \eta$ esetére κ értékét és az így nyert $\kappa(\eta)$ -t (44)-be helyettesíteni. Ehelyett a következő közelítő módszert célszerű alkalmazni.

Legyen $\kappa(\eta)$ Fourier-sora

$$\kappa(\eta) = \kappa_0 + \kappa_1 \cos \eta + \kappa_2 \cos 2\eta + \dots,$$

ahol

$$\kappa_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(\eta) \cos \eta d\eta.$$

Tekintettel a többi tagoknak $\cos \eta$ -ra vonatkozó orthogonalitására, a (44) integrál értékét csak a $\kappa_1 \cos \eta$ tag befolyásolja:

$$(45) \quad G = fE\pi \frac{h^{3/2}}{R^{1/2}} \int_0^{2\pi} (\mu_1 \omega_1 + \kappa_1 \omega_3) \cos^2 \eta d\eta = fE\pi \frac{h^{3/2}}{R^{1/2}} (\mu_1 \omega_1 + \kappa_1 \omega_3).$$

Vezessük be a dimenzió nélküli g mennyiséget G mértékéül:

$$(46) \quad G = fE\pi \frac{h^{3/2}}{R^{1/2}} g.$$

Akkor

$$g = \mu_1 \omega_1 + \kappa_1 \omega_3.$$

Hátra van még κ_1 közelítő meghatározása. E célból az ismertetett módszerrel meghatározzuk adott μ_0 -ra és ismert vagy felvett μ_1 -re $\kappa(0)$, $\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right)$ és $\kappa(\pi)$ értékét. $\kappa\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ meghatározása a G arányára vonatkozó szimmetria miatt nem ad újat: $\kappa\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \kappa\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Tekintettel a feladat nemlineáris jellegére

$$\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq \frac{\kappa(0) + \kappa(\pi)}{2},$$

ami pedig szükséges volna ahhoz, hogy

$$\kappa(\eta) = \kappa_0 + \kappa_1 \cos \eta$$

lehesse.

Közelítsük κ ismert négy értékét a legkisebb négyzetek elve alapján $\kappa_0 + \kappa_1 \cos \eta$ alakú polinommal. A számítás, mint ismeretes,

$$\kappa_1 = \frac{\kappa(0) - \kappa(\pi)}{2}$$

értéket adja. Ha κ -t mint $\mu(\eta)$ függvényét fogjuk fel,

$$\kappa(\eta) = k[\mu(\eta)] = k(\mu_0 + \mu_1 \cos \eta),$$

ahol k a 10. melléklet nomogrammjá szerint függ μ -tól (és természetesen λ -tól). Akkor

$$\kappa_1 = \frac{k(\mu_0 + \mu_1) - k(\mu_0 - \mu_1)}{2}$$

és

$$(47) \quad g = \mu_1 \omega_1 + \frac{k(\mu_0 + \mu_1) - k(\mu_0 - \mu_1)}{2} \omega_3.$$

Mármost, ismert f_0 és G esetén (ami a gyakorlatban előforduló eset) az eljárás a következő:

1. meghatározzuk (46), illetőleg $f_0 = \frac{f_0}{f}$ alapján g és μ_0 értékét.
2. meghatározzuk a 11. melléklet görbéi alapján ω_1 és ω_3 értékét a csőhossz (eT) által megadott λ -ra.
3. Iterációt végzünk μ_1 meghatározására. Ennek első lépéseként oly módon számolunk, mintha a cső H -n be volna fogva, tehát $\kappa = 0$ lenne. Ezzel (47) szerint

$$\mu_1^{(0)} = \frac{g}{\omega_1}.$$

4. $\mu = \mu_0 + \mu_1^{(0)}$ értékkel a 10. melléklet nomogrammjából leolvassuk $k(\mu_0 + \mu_1^{(0)})$ értékét. Hasonlóképp meghatározzuk $k(\mu_0 - \mu_1^{(0)})$ értékét.

5. A kapott értékeket helyettesítjük (42) egyenletbe és így megkapjuk μ_1 javított értékét:

$$\mu_1^{(1)} = \mu_1^{(0)} + \frac{1}{2} [k(\mu_0 - \mu_1^{(0)}) - k(\mu_0 + \mu_1^{(0)})] \frac{\omega_3}{\omega_1}.$$

(A formulából következik, hogy általában $\mu_1^{(1)} > \mu_1^{(0)}$).

6. A 3–5. lépéseket megismételjük $\mu_1^{(1)}$ -re, és esetleg a kapott $\mu_1^{(2)}$ -re stb. egészen addig, amíg a következő lépések elvégzése által várható korrekció alatta marad a megkívánt és műszakilag észszerű pontossági határnak.

7. Ezután ajánlatos, ha több η értékre meghatározzuk

$$\kappa(\eta) = k(\mu_0 + \mu_1 \cos \eta)$$

értékét és a $\kappa(\eta)$ függvény felrajzolása és harmonikus analízise útján ellenőrizzük a

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} [k(\mu_0 - \mu_1) - k(\mu_0 + \mu_1)]$$

feltevés helyességét, illetőleg az általa elkövetett hibát.

G. A kielégítő feltételek feltételei

Mint említettük, az adott műszaki probléma megköveteli a tárcsáról a hengerre való biztos erőátvitel érdekében, hogy

1. A tárcsa egész kerülete résztvegyen az erőátadásban, tehát érintse C -t és arra pozitív nyíróerőt gyakoroljon.

2. A henger teljes e élhosszán érintse C -t és arra teljes kerületén pozitív (radiálisan kifelé irányuló) (megoszló) erőt gyakoroljon.

3. $\kappa = w'(0) < 0$. Ebből a feltételből — mint az E . pontban bizonyítottuk — következik, hogy van még egy H -t körülvevő zárt görbe, melynek mentén H érinti C -t és rá sugarirányban kifelé ható erőt gyakorol.

Mielőtt hozzáfognánk a feltételek részletes tárgyalásához, előre kell bocsátanunk néhány megjegyzést.

I. $\mu = 1$ és elég kis λ esetén megoldásunk eleget tesz az 1., 2. és 3. feltételeknek.

Bizonyítás:

Először meghatározzuk ϱ közelítő értékét $\mu = 1$ és $\lambda \ll 1$ mellett, (35a) egyenlet alapján.

$\mu = 1$ tekintetbevételével a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} & - \frac{2(\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda)(\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda)}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda} + \frac{(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)^2}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho} \frac{\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda} = \\ & = - \frac{(\operatorname{ch} \varrho - \cos \varrho)(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho}. \end{aligned}$$

$\lambda \rightarrow 0$ esetén az első tag számlálójában ötöd-, nevezője harmadfokon tűnik el. A második tag második tényezőjének viszont a nevezője tűnik el magasabb fokokon. Ebből következik a fizikailag is nyilvánvaló $\varrho \rightarrow 0$. Fejtsük sorba valamennyi tag számlálóját és nevezőjét és álljunk meg az első el nem tűnő tagnál. Ezáltal a következő egyszerűbb egyenletet kapjuk:

$$\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\varrho^3}{4\lambda} = \frac{\varrho^2}{2}.$$

Az egyenletet $\frac{\varrho}{\lambda}$ -ra megoldva azt kapjuk, hogy annak egyetlen pozitív gyöke

$$(48) \quad \varrho = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \lambda \cong 0,618 \lambda.$$

A kapott közelítő ϱ értékkel meghatározhatjuk κ értékét, továbbá a nyíróerők értékét e -n és T -n.

(33) alapján evidens, hogy ϱ kis értékeire $\kappa < 0$, tehát a 3. követelmény teljesül:

$$(49) \quad \kappa \cong - \frac{\varrho^3}{2} < 0.$$

A nyíróerő értéke a tárcsán (42) és (43) szerint

$$Q_x = fE \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2} (\omega_1 + \omega_2 + \kappa \omega_3) = \\ = \frac{fE \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{(\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda)^2 - \kappa (\operatorname{sh} \lambda \cos \lambda + \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda)}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}.$$

λ kis értékeire ez is biztosan pozitív, $\kappa < 0$ mellett. Tehát a 2. követelmény is teljesül.

Végül határozzuk meg az »e« által a héjra gyakorolt erő irányát.

Helyettesítsük egy pillanatra e -t változó nagyságú megoszló q^* terheléssel és legyen C csak $\xi = -\varrho$ és $\xi = +\lambda$ helyeken rögzítve. A $(-\varrho, \lambda)$ szakasz végpontjain érvényes határfeltételek:

$$w(-\varrho) = 1, \quad w(\lambda) = 1, \\ w''(-\varrho) = 0, \quad w''(\lambda) = 0.$$

A $q^* = 0$ melletti megoldás legyen w_1 ; viszont ugyanilyen határfeltételek és $q^* = 1$ melletti megoldás legyen w^* . Akkor

$$w = w_1 + q^* w^*.$$

Mármost kimutatható, hogy $w_1(\xi) < 1$ hacsak

$$-\varrho < \xi < \lambda.$$

Vegyük fel koordináta-rendszerünk kezdőpontját $\frac{\lambda - \varrho}{2}$ -ben, és legyen $\frac{\varrho + \lambda}{2} = \tau$, $\bar{\xi} = \xi - \frac{\lambda - \varrho}{2}$. w_1 értéke könnyen kiszámítható a határfeltételek figyelembevételével:

$$w_1 = \frac{\operatorname{ch} \tau \cos \tau \operatorname{ch} \bar{\xi} \cos \bar{\xi} + \operatorname{sh} \tau \sin \tau \operatorname{sh} \bar{\xi} \sin \bar{\xi}}{\operatorname{ch}^2 \tau \cos^2 \tau + \operatorname{sh}^2 \tau \sin^2 \tau}.$$

Fejtsük w_1 számlálóját, $\bar{w}_1$ -t kétváltozós Taylor-sorba és írjuk fel a sor első tagjait:

$$\bar{w}_1 = 1 - \frac{5}{6} \tau^4 + \bar{\xi}^2 \tau^2 - \frac{\bar{\xi}^4}{6} + \dots = 1 - \frac{1}{6} (\tau^2 - \bar{\xi}^2) (5\tau^2 - \bar{\xi}^2) + \dots$$

w_1 nevezője elég kis τ -ra nagyobb 1-nél, (mint erről sorbafejtéssel meggyőződhetünk), ennél könnyen belátható, hogy $|\bar{\xi}| < \tau$ és τ elég kis értékei esetén

$$w_1 < 1.$$

Miután e -n $W(0) = 1$, következik

$$q^* \cdot w^*(0) < 0.$$

Miután azonban $w^*(0) > 0$, hiszen az erő hatásvonalába eső pont nyilvánvalóan az erő irányában mozdul el (ami természetesen $w^*(\xi)$ effektív kiszámításával is igazolható), következésképp

$$q^* > 0$$

ami bizonyítandó volt.

II. q^* , $q(\lambda)$ és κ λ -nak és μ -nek folytonos függvényei. λ igen kis értékei és $\mu = 1$ mellett, mint az I. megjegyzésben igazoltuk, mindhárom mennyiség pozitív. Válasszunk ki egy elég kis λ_1 -et. A (λ, μ) síkban a $(\lambda_1, 1)$ pontból tetszésszerűen folytonos görbe mentén haladva mindaddig, amíg q^* , $q(\lambda)$ és κ egyike sem válik 0-sá, megoldásunk kielégíti az 1., 2., 3. követelményeket. Nevezzük határgörbéknek a $q^* = 0$, illetőleg $q(\lambda) = 0$, illetőleg $\kappa = 0$ értékeinek megfelelő pontok összességét. Ezek a határgörbék a (λ, μ) síkot két tartománycsoportra osztják fel:

Az egyikben $q^* > 0$, $q(\lambda) > 0$ és $\kappa > 0$, a másikban legalább az egyik mennyiség negatív. Csak az első tartománycsoport területén felvett (λ, μ) értékpár engedhető meg az elválás veszélye nélkül. I. szerint van legalább egy az első kategóriába tartozó (jó) tartomány.

A helyes felfekvés elégséges feltételeit megkapjuk tehát, ha a (λ, μ) síkon meghatározzuk azokat a görbéket, amelyeken $\kappa = 0$ vagy $q^* = 0$, vagy $q(\lambda) = 0$ és a (λ, μ) sík pontjai közül kizárjuk azokat a pontokat, amelyekbe nem juthatunk el $\mu = 1$ és λ valamely elég kis értéke által meghatározott pontból folytonos görbén haladva valamelyik határgörbe átmetszése nélkül.

G. Az elválási határgörbék

$$\alpha) q(\lambda) = 0.$$

Ezt a határgörbét a (35) és $q(\lambda)$ egyenletek együttes érvényessége jellemzi, tehát (30), (35) és (42) szerint

$$(50) \quad 2\mu (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda) - (\operatorname{sh} 2\lambda + \sin 2\lambda) - (\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\lambda) f(q) = \\ = g(q) (\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda)$$

és

$$(51) \quad \mu (\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\lambda + 2) - 4 \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda - 2 (\operatorname{sh} \lambda \cos \lambda + \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda) f(q) = 0$$

A két egyenletből μ kiküszöbölése után λ és q között a következő összefüggést kapjuk elemi számolások elvégzése után:

$$(52) \quad A(\lambda) f(q) + g(q) + B(\lambda) = 0,$$

ahol

$$A(\lambda) = \frac{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}{\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\lambda + 2}, \quad B(\lambda) = \frac{\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\lambda}{\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\lambda + 2}; \\ f(q) = - \frac{(\operatorname{sh} q - \sin q)^2}{\operatorname{ch} q \sin q - \operatorname{sh} q \cos q}, \quad g(q) = - \frac{(\operatorname{ch} q - \cos q) (\operatorname{sh} q - \sin q)}{\operatorname{ch} q \sin q - \operatorname{sh} q \cos q}.$$

(52) egyenlet megadja ϱ -t mint λ (implicit) függvényét. ϱ -nak mint λ *explicit* függvényének meghatározása legegyszerűbb nomográfiai úton. Az alkalmazott nomogramm elve látható a 7. ábrán.

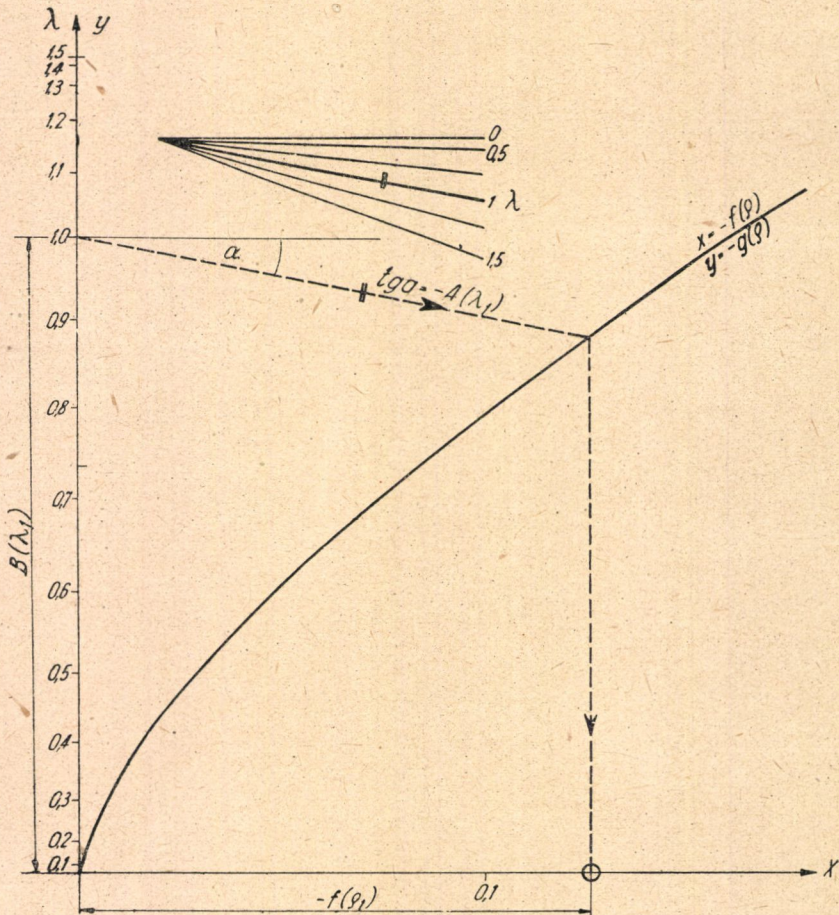
Fejezzük még ki (46) egyenletből $\mu(\eta)$ -t :

$$(53) \quad \mu(\eta) = C(\lambda) f(\varrho) + D(\lambda),$$

ahol

$$C(\lambda) = \frac{2(\operatorname{sh} \lambda \cos \lambda + \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda)}{\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\lambda + 2}, \text{ és } D(\lambda) = \frac{4 \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\lambda + 2}.$$

(53) egyenlet alapján kiszámítható μ mint λ függvénye.



7. ábra

$$\beta) q^* = 0.$$

Ha az e él nem gyakorol C -re erőhatást, akkor az egész $(-\varrho, \lambda)$ szakaszra érvényes a (14a) differenciálegyenlet. A megoldás túlhatározott, mert negyedrendű differenciálegyenlet megoldására 6 feltételt kell szabnunk.

A hat feltétel közül ötnek kielégítésére a negyedrendű differenciálegyenlet általános megoldásában szereplő négy paraméteren kívül még szabadon rendelkezhetünk ϱ felett. A hatodik feltétel megadja a λ és μ közötti keresett összefüggést.

A megoldásra előírt hat feltétel:

$$\begin{aligned} w(-\varrho) &= 1, & w(0) &= 1, & w(\lambda) &= \mu, \\ w'(-\varrho) &= 0, \\ w''(-\varrho) &= 0, & w''(\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

A $-\varrho$ és 0 helyekre kirótt határfeltételek kielégíthetők a (31), (32) egyenletek által megadott megoldással.

Az utolsó két (λ helyre vonatkozó) feltétel figyelembevétele két egyenletet ad:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\varrho + \lambda) \cos(\varrho + \lambda) + b_{II} [\operatorname{ch}(\varrho + \lambda) \sin(\varrho + \lambda) - \operatorname{sh}(\varrho + \lambda) \cos(\varrho + \lambda)] &= \mu \\ -\operatorname{sh}(\varrho + \lambda) \sin(\varrho + \lambda) + b_{II} [\operatorname{ch}(\varrho + \lambda) \sin(\varrho + \lambda) + \operatorname{sh}(\varrho + \lambda) \cos(\varrho + \lambda)] &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszerből

$$(54) \quad b_{II} = \frac{\operatorname{sh}(\varrho + \lambda) \sin(\varrho + \lambda)}{\operatorname{ch}(\varrho + \lambda) \sin(\varrho + \lambda) + \operatorname{sh}(\varrho + \lambda) \cos(\varrho + \lambda)} \equiv P(\varrho + \lambda),$$

$$(55) \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh}^2(\varrho + \lambda) + \sin^2(\varrho + \lambda)}{\operatorname{ch}(\varrho + \lambda) \sin(\varrho + \lambda) + \operatorname{sh}(\varrho + \lambda) \cos(\varrho + \lambda)} \equiv Q(\varrho + \lambda).$$

Másrészt (32) szerint

$$(56) \quad b_{II} = \frac{1 - \operatorname{ch} \varrho \cos \varrho}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho} \equiv R(\varrho).$$

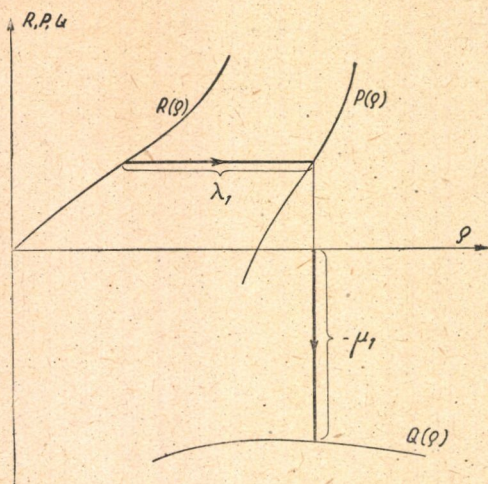
Az (54)–(56) egyenletek grafikusán a (8a, b) ábrák szerint oldhatók meg.

$\gamma) \kappa = 0$ határgörbe.

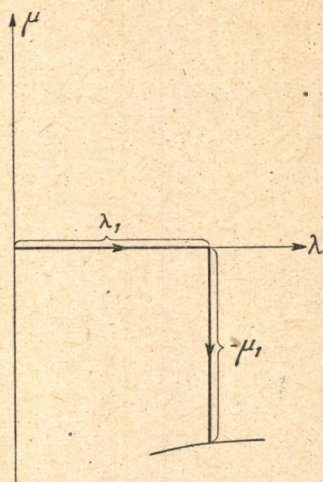
(33) egyenlet alapján $\kappa = 0$ csak $\varrho = 0$ esetén lehetséges. Ennélfogva $\xi = 0$ -ban érvényesek a $-\varrho$ -ban előírt (23b) követelmények is. Ezáltal feladatunk az általános megoldás négy konstansára egyszeresen túlhatározottá válik, tehát a λ, μ paraméterek számára marad egy feltételünk.

A határfeltételek most:

$$\begin{aligned} w(0) &= 1, & w(\lambda) &= \mu, \\ w'(0) &= 0, \\ w''(0) &= 0, & w''(\lambda) &= 0. \end{aligned}$$



8a. ábra



8b. ábra

Az első három feltételből a 3. pontbeli megoldáshoz hasonlóan

$$w = \operatorname{ch} \xi \cos \xi + b (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi);$$

a második két feltétel a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda + b (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda) &= \mu, \\ -\operatorname{sh} \lambda \sin \lambda + b (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

b kiküszöbölése és elemi átalakítások után

$$(57) \quad \mu = \frac{\operatorname{sh} 2\lambda + \sin 2\lambda}{2 (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda)}.$$

Az α), β), γ) szerinti határgörbék ábrája látható a 12. mellékleten.

Nem foglalkozhatunk annak bizonyításával, hogy a határgörbéken való áthaladáskor valóban olyan tartományba jutunk, amelyben a helyes felfekvés feltételei már nem teljesülnek; sem annak vizsgálatával, hogy nincs-e olyan »jó« tartomány, amelybe csak határgörbék metszésével juthatunk el a kis λ -val és $\mu = 1$ -el meghatározott pontból folytonos görbe mentén haladva. Műszaki szempontból kielégítő megoldás, ha a jó felfekvés elégséges feltételeit adjuk, amelyekről úgy véljük, hogy szükséges is.

Legyen a jó felfekvés tartományát a nagyobb μ -értékek felé elhatároló valamely görbe egyenlete

$$\mu = M_1(\lambda),$$

ugyanott a kis μ -értékek felé elhatároló görbe egyenlete

$$\mu = M_2(\lambda).$$

Akkor a biztos felfekvéshez meg kell kívánni, hogy

$$\mu_0 + \mu_1 < M_1(\lambda)$$

és

$$\mu_0 - \mu_1 > M_2(\lambda)$$

legyen (μ_0 a tárcsa nagyobb átmérője miatti relatív csőátmérőnövekedés, μ_1 a G súlyterhelés következtében előálló deformáció Fourier-sorának $\cos \eta$ -t tartalmazó tagjának együtthatója a II. rész E. pont szerint.)

Az egyenlőtlenségből

$$\mu_1 < \frac{M_1(\lambda) - M_2(\lambda)}{2}.$$

λ kis értékeire ez a különbség nagyon kicsi, tehát veszély nélkül súlyterhelést nem alkalmazhatunk. Viszont, ha a $\operatorname{tg} \lambda = -\operatorname{th} \lambda$ egyenlet első pozitív gyökét λ_0 -val jelöljük ($\lambda \approx 2.365$), akkor $\lambda_0 < \lambda < 4$ esetén elválási veszély egyáltalában nem lép fel, ha a $\mu_0 > \mu_1$ követelményt betartjuk. (V. ö. 12. melléklet.)

Tehát nemcsak azért célszerű a cső szabad részét hosszúra választani, hogy ezáltal veszélyes nyírófeszültségek ne lépjenek fel, hanem azért is, hogy a tárcsáról vagy hengerről való leválás veszélyét elkerüljük.

8. A centrifugális erő figyelembevétele

Legyen egy végtelen hosszú R sugarú saját tengelye körül ω szögsebességgel forgó végtelen hosszú tömör henger radiális deformációja (sugárnövekedése) a centrifugális erő hatása alatt f_c , egy ugyanilyen sugarú, vékony tárcsán f_c^* , egy R sugarú vékony cső radiális deformációja F_c .

A centrifugális erő hatása figyelembe vehető, ha számításunkban a H tömör henger T tárcsa és C cső terheletlen méreteit a f_c , f_c^* , F_c méretekkel korrigáljuk. (Mintha a tömör hengert, a tárcsát, illetőleg csövet a centrifugális erő okozta tágulással nagyobb átmérőjűre gyártották volna.) Tehát a számításban szereplő f , illetőleg f^* túlfedések helyett

$$\bar{f} = f + f_c - F_c,$$

illetőleg

$$\bar{f}^* = f^* + f_c^* - F_c$$

túlfedésekkel számolunk.

Ez az eljárás mindenesetre közelítő, mert 1. a hengeren a cső csak közelítéssel vehető végtelennek, 2. mert a henger az e él közelében jobban kitágul a centrifugális erő hatása alatt, mintha végtelen volna. Azonban ez utóbbi eltérés egyrészt nem túlságosan nagy, másrészt az egész f_c tágulás is kicsiny F_c -vel összehasonlítva.

$$(f_c^* = \frac{1-\nu}{4} F_c = 0,175 F_c; f_c \approx f_c^*.$$

f_c^* , illetőleg F_c kiszámítását illetően lásd [4].

Budapest, 1952. december 13.

- [1] *Timoshenko*: Théorie de la stabilité élastique. Paris, 1947. ch. Béranger.
- [2] *Girkmann*: Flächentragwerke. Wien, Springer, 1948.
- [3] *Schwank*: Randwertaufgaben. Leipzig, Teubner, 1951.
- [4] *Timoshenko*: Théorie de l'élasticité. Paris—Liège, 1948. Librairie Polytechnique ch. Béranger; 71. old.

ПЕРЕВОД СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ С ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБКОЙ

Ш. ПАЛ

Резюме

Работа содержит вычисления, касающиеся измерения и обсуждения конструкции, служащей для прикрепления поворотной части турбогенераторов на хвостовиках.

Тонкостенная трубка надвинута с перекрытием на массивный цилиндр и тонкий диск. Цилиндр считается охватываемым, а диск нагружен силой, нападающей центрально в своей плоскости.

Работа познакомит с общим методом вычисления, относящимся к тонким цилиндрическим оболочкам. Этот метод и по внешнему подчеркивает отношения порядка величин, полученные при исчислении деформации тонких цилиндрических оболочек, и показывает очевидными условия правильности пренебрежений. Таким образом получается, что по отношению к деформации отдельных компонентов оболочки приблизительно действительно то же обыкновенное дифференциальное уравнение, которое играет роль в случае нагрузки с цилиндрической симметрией.

Потом решается дифференциальное уравнение загиба оболочки для отрезки «смятия» над массивным цилиндром, далее для части трубки между оболочкой и диском, потом решения припасовываются друг к другу. Для практического исполнения припасовки сообщаются номограммы и кривые, с помощью которых определимы параметры, характеризующие форму «смятия». При помощи этих результатов исследуются условия безопасного прилегания трубки на цилиндре и диске.

Величины, характеризующие деформацию трубки, напряжения, возникающие в ней при нагрузке, легко определимы с помощью приложенных семейств кривых.

LA TRANSMISSION D'UNE CHARGE STATIQUE MOYENNANT UN TUYAU À PAROI MINCE

S. PÁL

RÉSUMÉ

L'article contient des calculs se rapportant au jugement et à l'établissement des dimensions de la construction qui sert pour fixer la partie rotative des turbo-générateurs sur les bouts d'essieu.

Sur un cylindre massif et un disque mince un tuyau à paroi mince est pressé avec surcouverture. Le cylindre peut être considéré encastré, tandis que le disque est chargé d'une force attaquant centriquement dans le plan propre du disque.

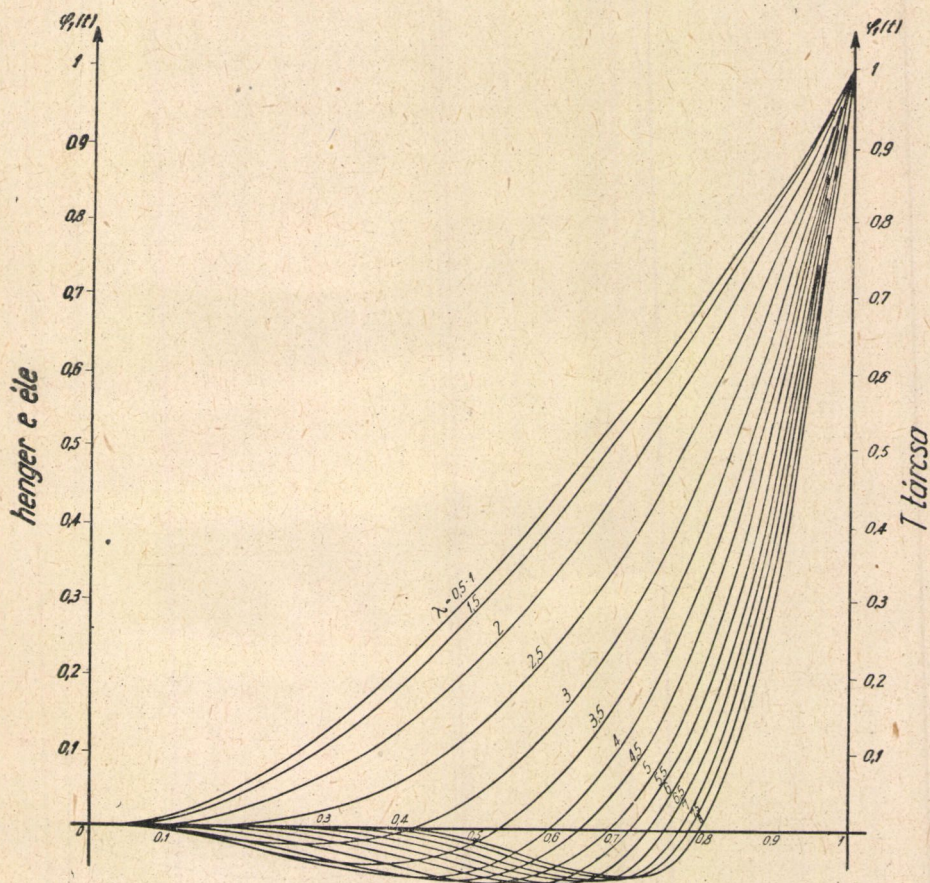
L'article décrit une méthode de calcul générale, se rapportant à des coques cylindriques minces, par laquelle les conditions d'ordre de grandeur qui résultent dans le calcul de la déformation de coques cylindriques minces, sont mises en relief extérieurement aussi, et qui rend évidentes les conditions sous lesquelles les négligements sont justifiés. On trouve par ce moyen que, concernant les déformations des génératrices individuelles de la coque, c'est approximativement la même équation différentielle ordinaire qui est valable, comme dans le cas d'une charge cylindrico-symétrique.

Ensuite l'article résout l'équation différentielle se rapportant à la flexion de la coque pour la section «de froissure» au-dessus du cylindre massif, puis pour la partie de tuyau située entre la coque et le disque, et enfin, il ajuste ces solutions l'une à l'autre. Pour mettre en oeuvre l'ajustage dans la pratique, l'article donne un nomogramme et des courbes à l'aide desquelles il est possible d'établir les paramètres caractérisant la forme de la «froissure». En possession de ces derniers, l'article examine les conditions de la pose sûre du tuyau sur le cylindre et sur le disque.

Les quantités caractéristiques pour la déformation du tuyau sont les efforts qui, produits dans le tuyau quand il est chargé, peuvent être déterminés facilement à l'aide des familles de courbes annexées.

Radiális deformációk és gyűrűs feszültségek meghatározása eT szabad csőszakon I.

Jelmagyarázat a 3. sz. mellékleten
 φ_1 görbék

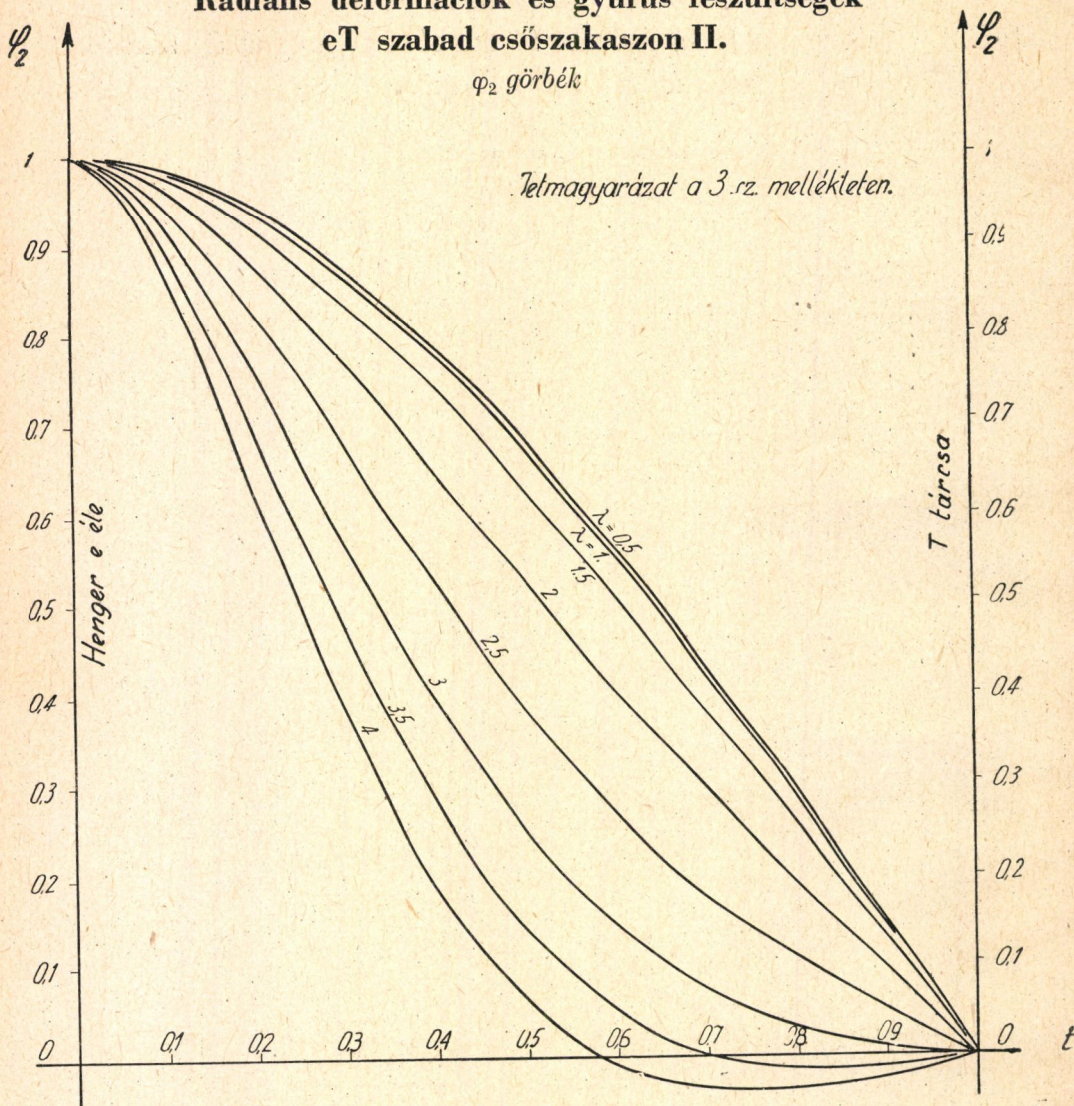


1. melléklet

Radiális deformációk és gyűrűs feszültségek eT szabad csőszakaszon II.

φ_2 görbék

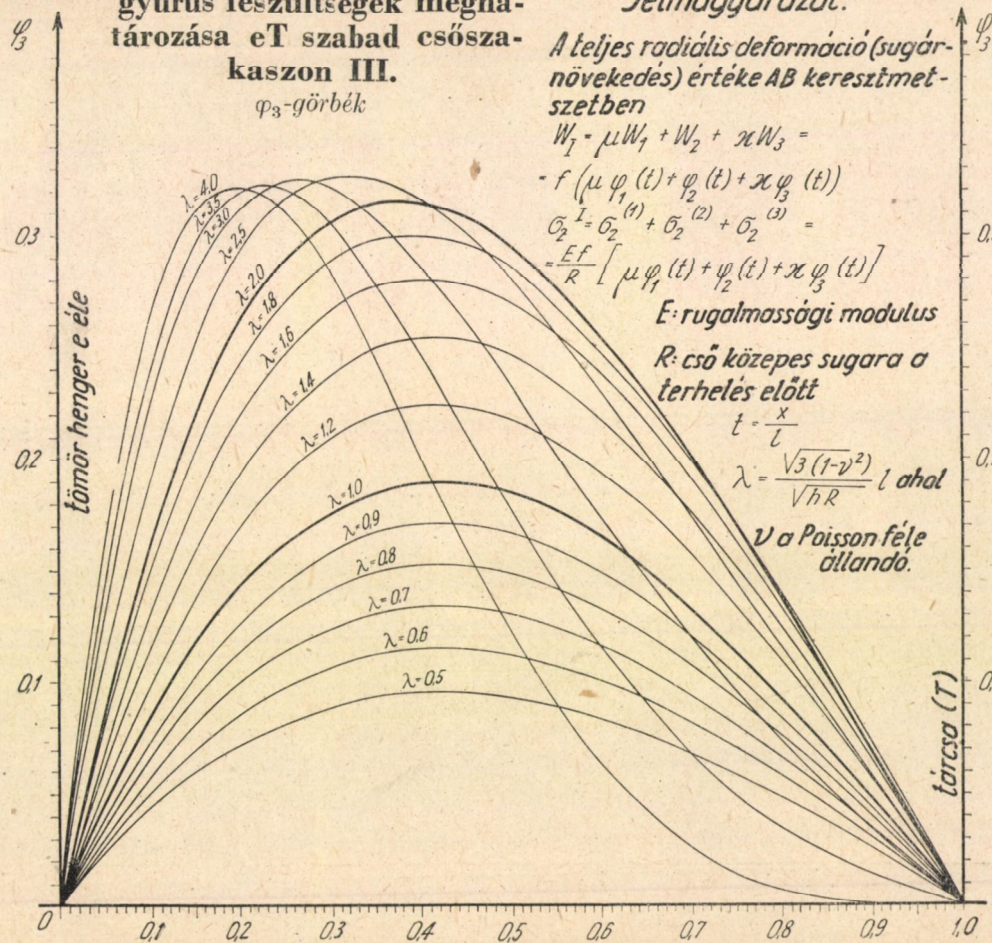
Telmagyarázat a 3.sz. mellékleten.



2. melléklet

Radiális deformációk és gyűrűs feszültségek meg- határozása eT szabad csőszá- kazon III.

φ_3 -görbék



Jelmagyarázat.

A teljes radiális deformáció (sugár-
növekedés) értéke AB keresztmet-
szetben

$$W_1 = \mu W_1 + W_2 + \kappa W_3 =$$

$$= f(\mu \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \kappa \varphi_3(t))$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^{(1)} + \sigma_2^{(2)} + \sigma_2^{(3)} =$$

$$= \frac{Ef}{R} [\mu \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \kappa \varphi_3(t)]$$

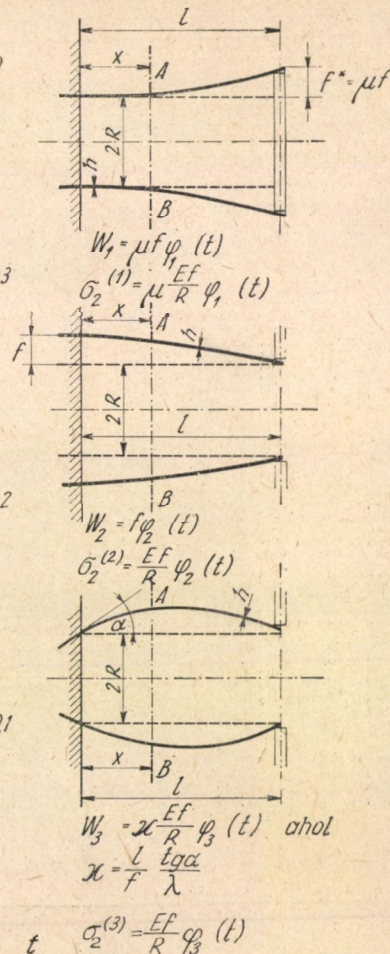
E : rugalmassági modulus

R : cső közepes sugara σ
terhelés előtt

$$t = \frac{x}{L}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{h}R} l \text{ ahol}$$

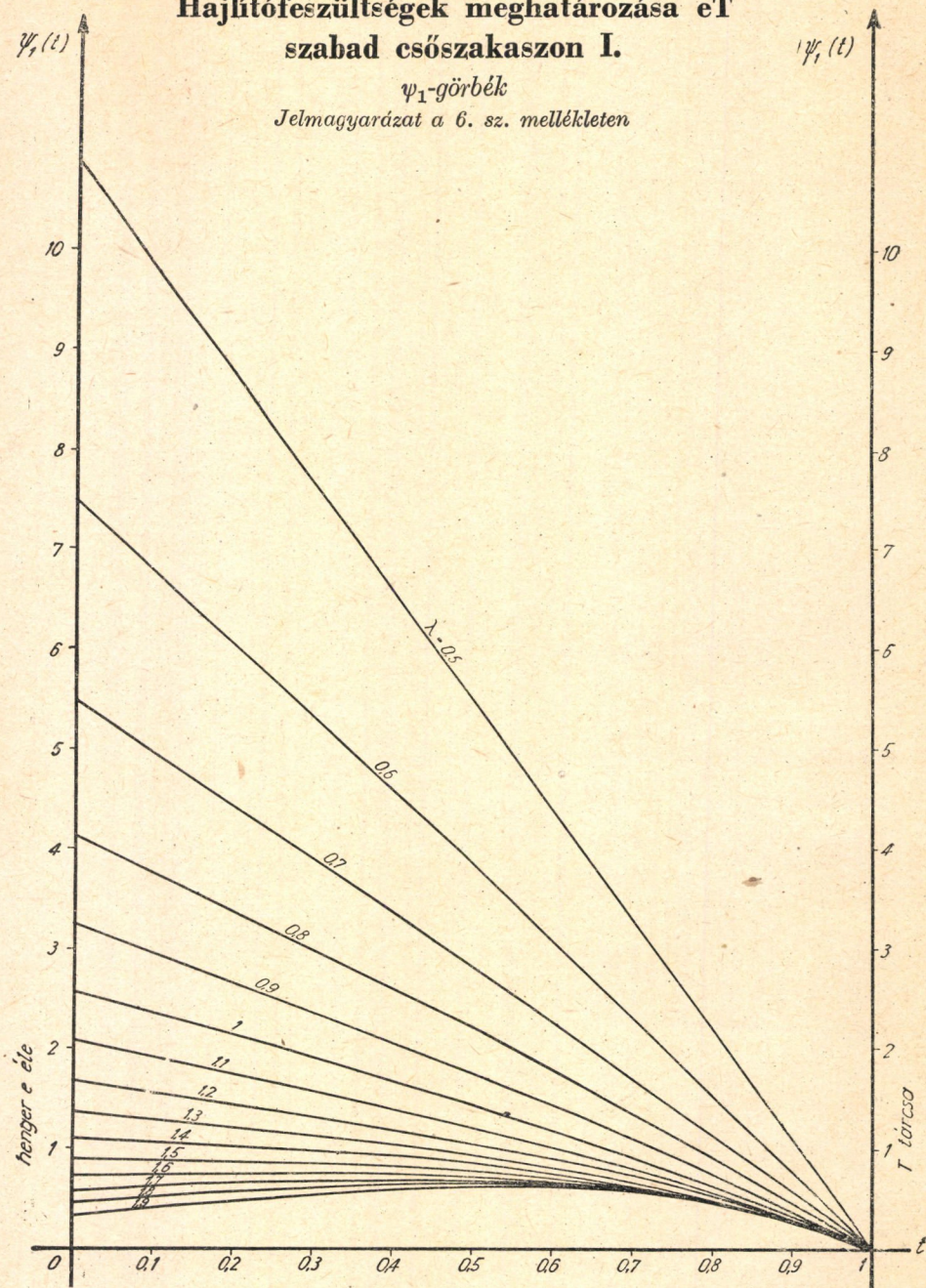
ν a Poisson fele
állandó.



Hajlítófeszültségek meghatározása eT szabad csőszakaszon I.

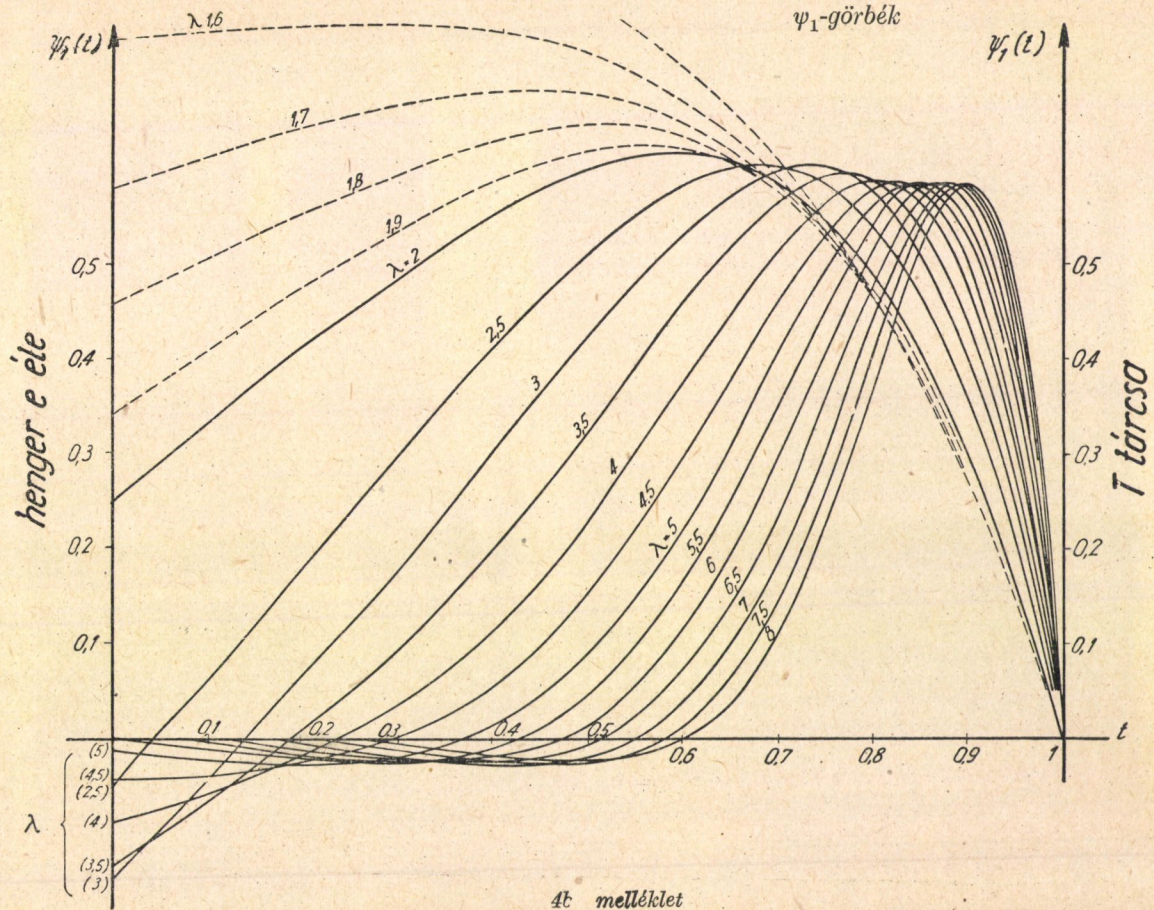
ψ_1 -görbék

Jelmagyarázat a 6. sz. mellékleten



4a. melléklet

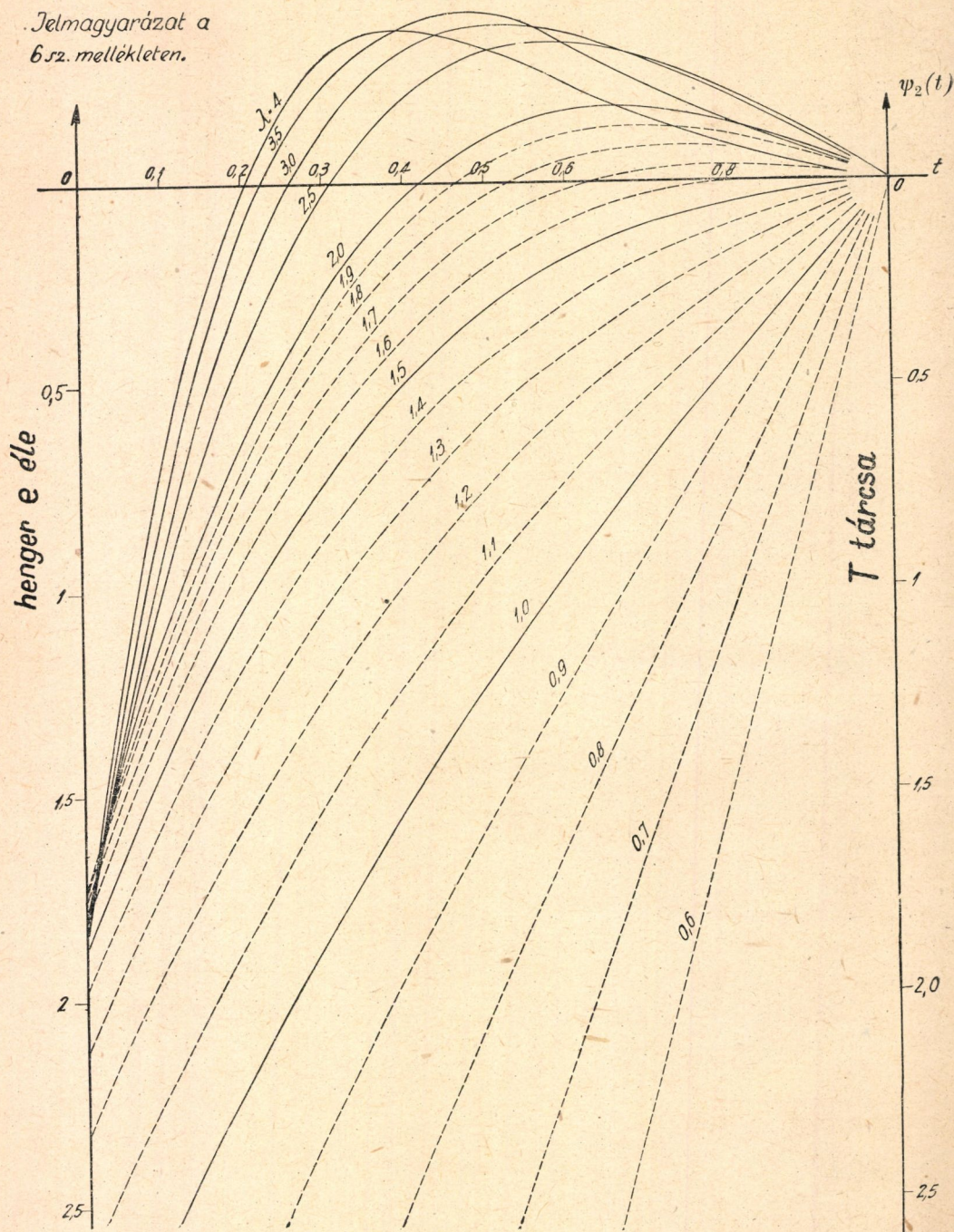
Hajlítófeszültségek meghatározása eT szabad csőszakaszon I.



Hajlító feszültségek meghatározása eT szabad csőszakaszon II.

ψ_2 -görbék

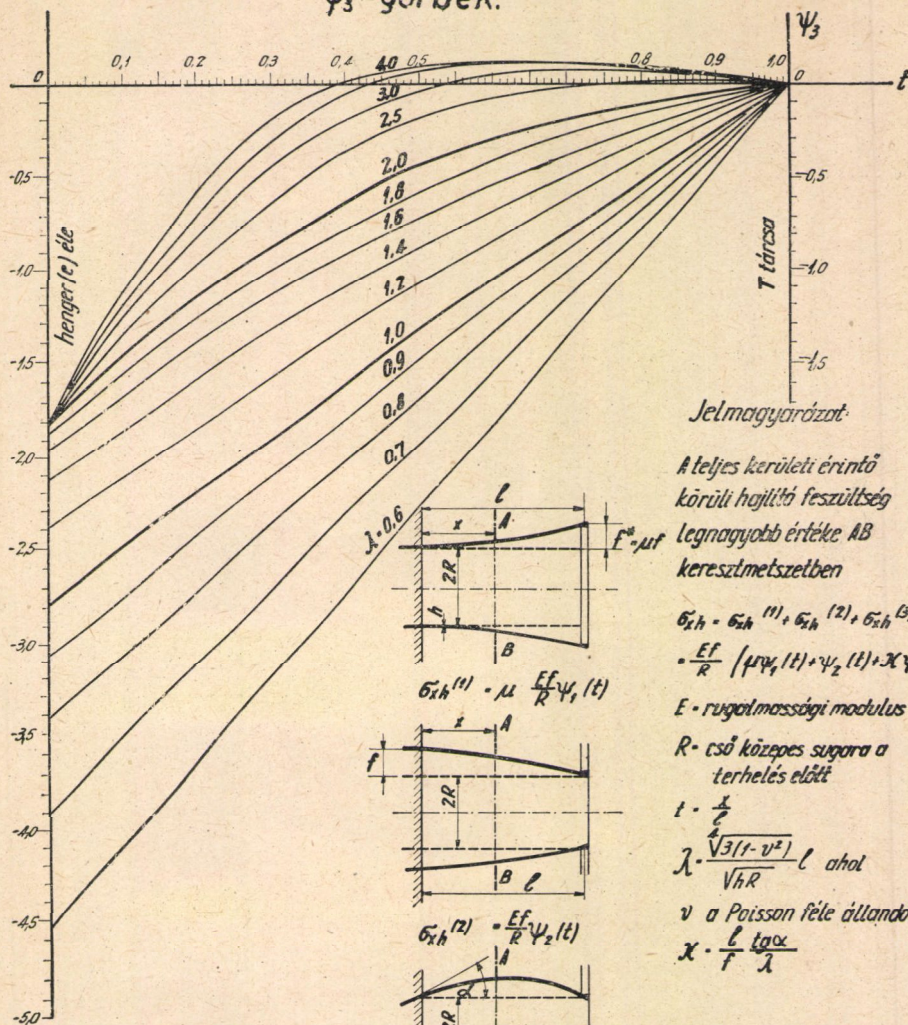
Jelmagyarázat a
6.sz. mellékleten.



5. melléklet

Hajlító feszültségek meghatározása eT szabad csőszakaszon III.

ψ_3 -görbék.



Jelmagyarázat.

A teljes körületi érintő körüli hajlító feszültség legnagyobb értéke AB keresztmetszetben

$$\sigma_{zh} = \sigma_{zh}^{(1)} + \sigma_{zh}^{(2)} + \sigma_{zh}^{(3)} = -\frac{Ef}{R} (\mu \psi_1(t) + \psi_2(t) + \chi \psi_3(t))$$

E - rugalmassági modulus

R - cső közepes sugara a terhelés előtt

$$t = \frac{x}{l}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} l \text{ ahol}$$

ν a Poisson féle állandó

$$\chi = \frac{l}{f} \tan \alpha$$

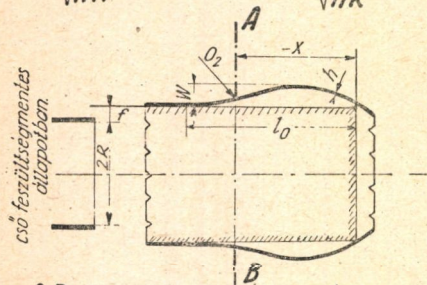
$$\sigma_{zh}^{(3)} = \chi \cdot \frac{Ef}{R} \psi_3(t)$$

6. melléklet

Radiális deformációk és gyűrűs feszültségek $e\gamma$ felfekvési hullám mentén

φ_{II} görbék

$$\xi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} x, \quad \rho = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} l_0$$



AB keresztmetszetben mért

sugárnövekedés: $W = f \varphi_{II}(\xi)$

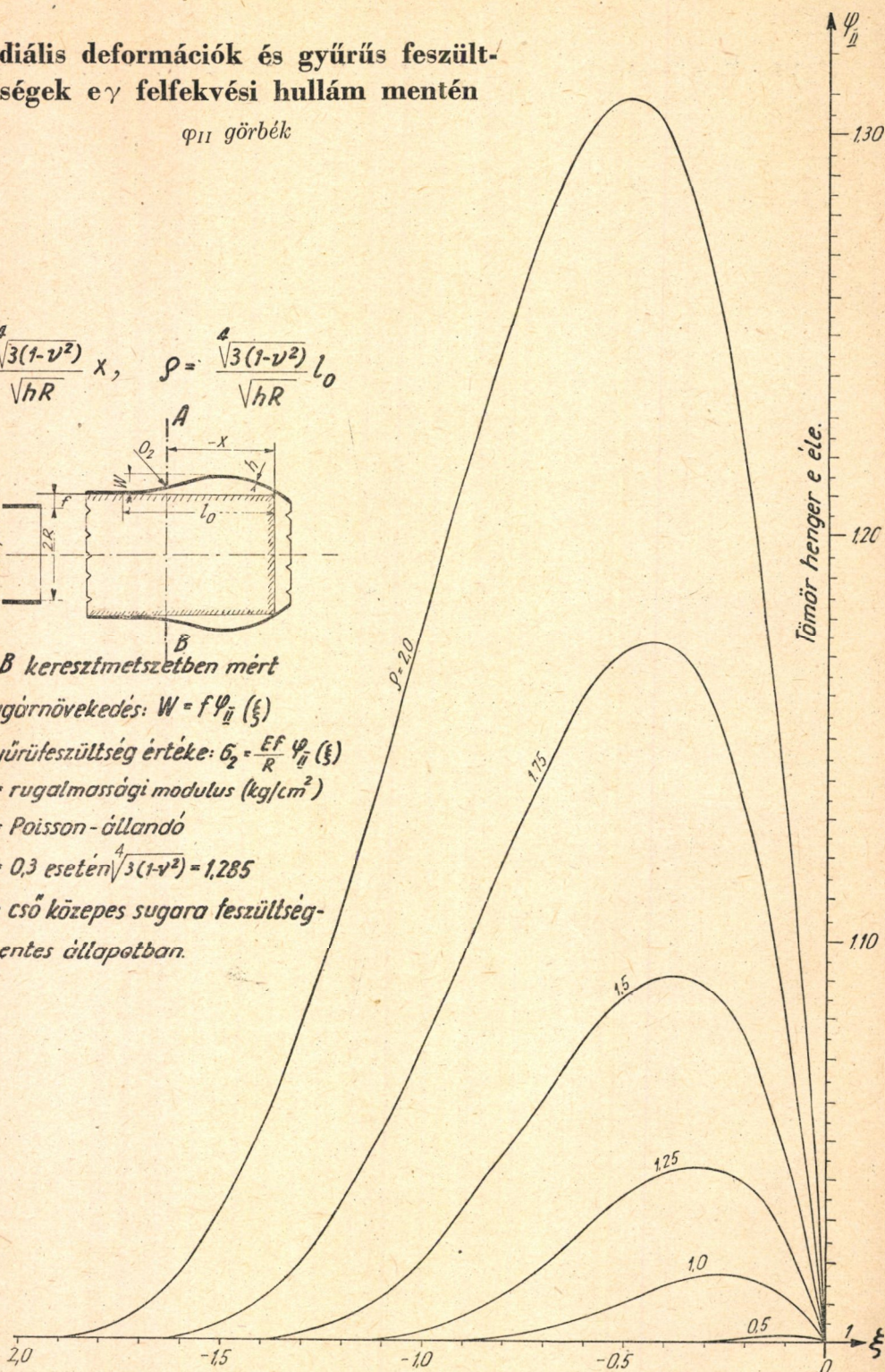
gyűrűfeszültség értéke: $\sigma_2 = \frac{E f}{R} \varphi_{II}(\xi)$

E = rugalmassági modulus (kg/cm^2)

ν = Poisson-állandó

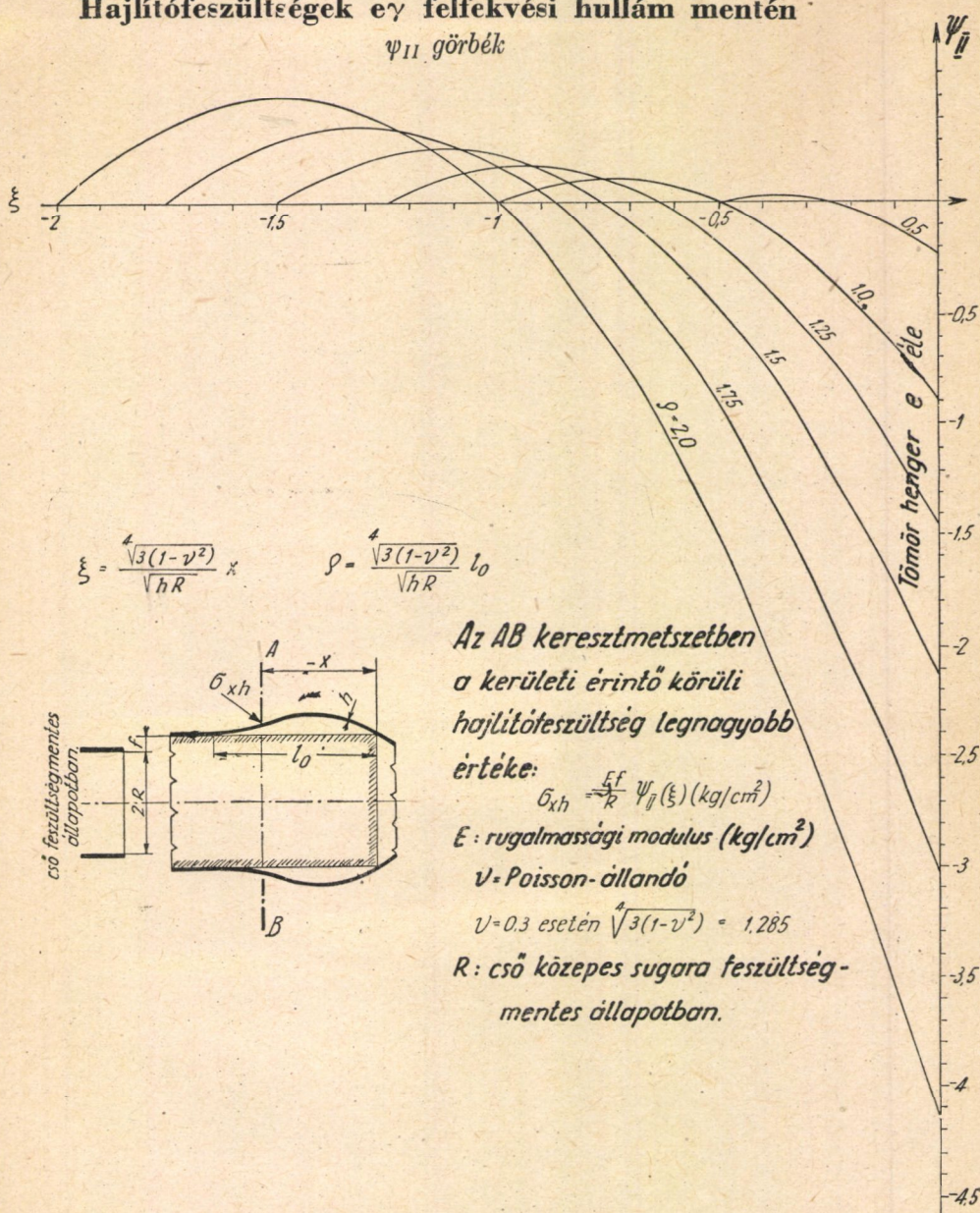
$\nu = 0,3$ esetén $\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} = 1,285$

R : cső közepes sugara feszültségmentes állapotban.



Hajlítófeszültségek egy felfekvési hullám mentén

ψ_{II} görbék



$$\xi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} x$$

$$\rho = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} l_0$$

Az AB keresztmetszetben
a kerületi érintő körüli
hajlítófeszültség legnagyobb
értéke:

$$\sigma_{xh} = \frac{Ef}{R} \psi_{II}(\xi) \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

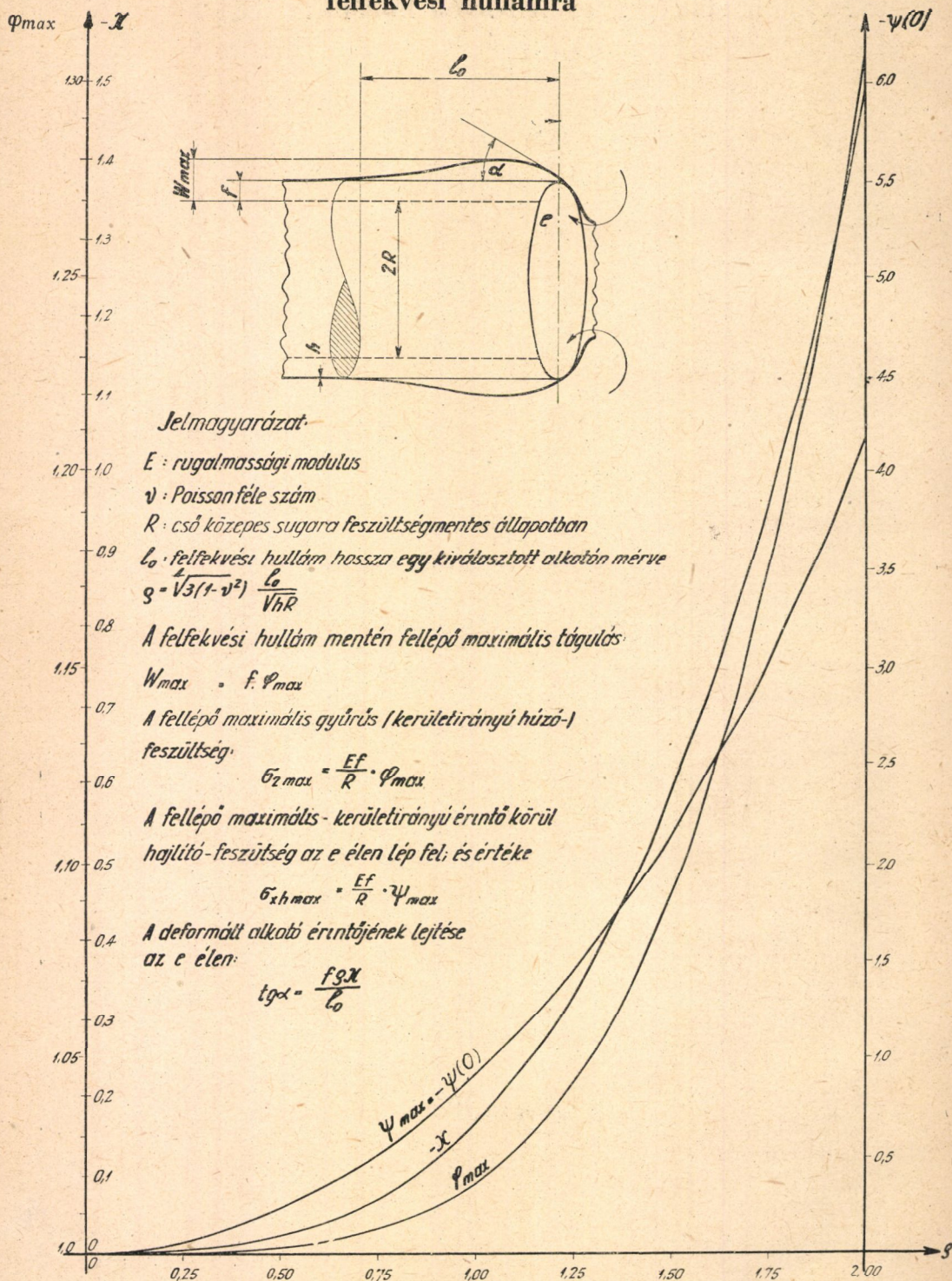
E : rugalmassági modulus (kg/cm²)

ν = Poisson-állandó

$$\nu = 0.3 \text{ esetén } \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} = 1.285$$

R : cső közepes sugara feszültség-
mentes állapotban.

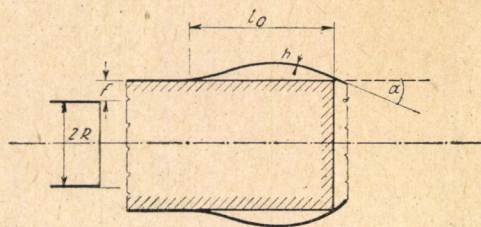
Maximális deformációk és feszültségek egy felfekvési hullámra



Nomogramm φ és κ meghatározására

λ
0,6
0,7
0,8
0,9
1
1,1
1,2
1,3
1,4
1,6
1,7
1,8
1,9
2
2,1
2,2
2,3
2,4
2,5

μ
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
1,6
1,7
1,8
1,9
2
2,1
2,2
2,3
2,4
2,5



$$\varphi = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} l_0$$

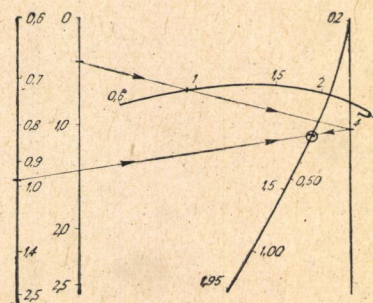
feltételezett hullám
redukált hossza

$$\kappa = \frac{l_0}{F} \frac{lg \alpha}{g}$$

R : a cső sugara feszültségmentes
állapotban

ν : Poisson-féle szám

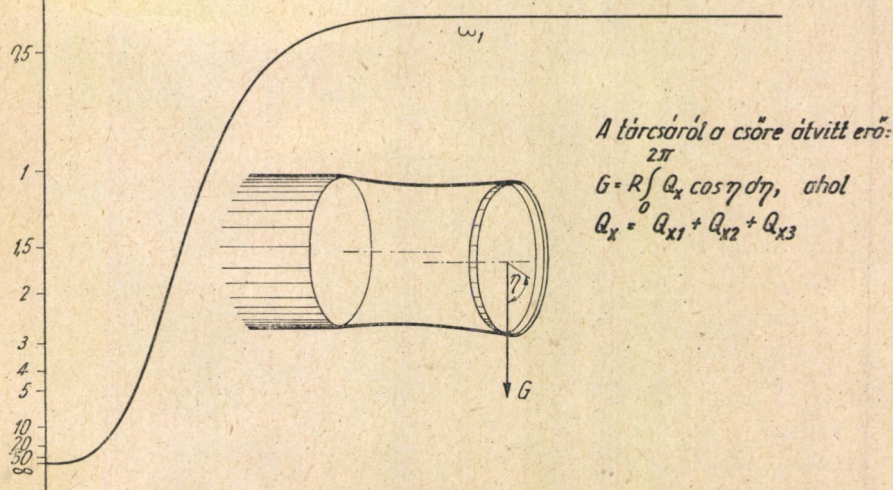
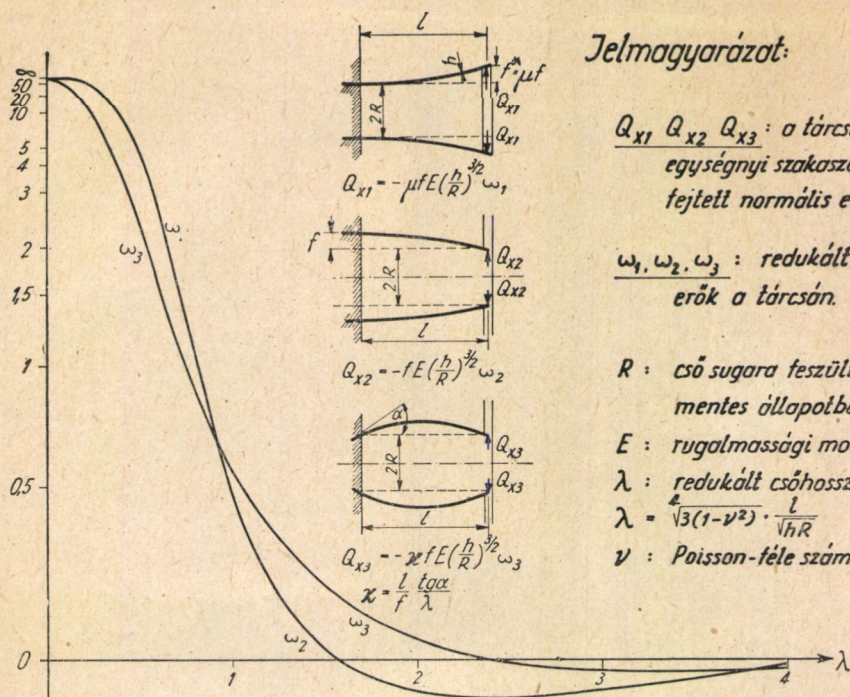
λ



φ

κ

Diagramm a tárcsát kitérítő erő meghatározásához



A cső biztos felfekvésének feltételei

