MATRIXOK DIADIKUS ELŐÁLLÍTÁSÁN ALAPULÓ MÓDSZER BILINEÁRIS ALAKOK TRANSZFORMÁCIÓJÁRA ÉS LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSÁRA[1]

EGERVÁRY J.

Összefoglalás.

A lineáris egyenletrendszer gyakorlati (numerikus, gépi) megoldására szolgáló módszerek — a matrixtechnika kibontakozásával párhuzamosan — több fejlődési fokon mentek át. Első a determinánsok elméletén alapuló, matrixmentes módszer. Ezt követi a determinánsokat és matrixokat egyaránt igénybevevő módszer, mely a matrixaritmetika eszközeit, elsősorban a reciprok matrixot alkalmazza. Az utolsó fejlődési fokra jellemző, hogy az a determinánselméletet, sőt a reciprok matrixot is teljesen mellőzi és kizárólag a matrixok összeadási és szorzási szabályán épül fel.

Az első és az utolsó fejlődési fokozat közti különbséget találóan jellemzi *Forsythe* a következő példával: Egy $n = 26$ ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásához az ú. n. »Cramer-szabály« egyenes alkalmazása mellett $(n + 1)! \sim 10^{27}$ szorzás lenne szükséges, melyet egy — mp-ként 2600 szorzást végző — elektromos számológép cca 10^{17} év alatt tudna elvégezni. Ezzel szemben a matrixtechnikán alapuló módszernél a megoldáshoz csupán $\frac{n^3}{3} \sim 6000$ szorzás szükséges, azaz nem egész 3 mp.

Lehetséges — és talán a gyakorlati érdeklődésű olvasók számára rokonszenvesebb — volna a matrixtechnikán felépülő módszert az elmélet mellőzésével, rövid gyakorlati szabályok formájában megfogalmazva bemutatni. Jelen esetben azonban az elmélet és gyakorlat egységének követelményét feltétlenül kielégítendőnek véljük, mert a matrixtechnikai tárgyalásmód egyidejűleg szolgáltatja a megoldás elméleti alapjait és gyakorlati kiviteli formáját. Továbbá a lineáris egyenletek matrixtechnikai megoldása és a bilineáris (kvadratikus) alakok transzformációja közt olyan szoros kapcsolat áll fenn, melyet következetlenség volna figyelmenkívül hagyni.

A dolgozat olvasásához csak a matrixaritmetika elemeinek ismerete szükséges.

Jelölések

$a, b, c, \ldots$	skalárok,	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	matrixok,
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \ldots$	oszlopvektorok,	$\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \ldots \mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots$	sorvektorok.

n sort és m oszlopot tartalmazó matrix:

$$\underset{(n,m)}{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}].$$

[1] A dolgozat olvasásához csak a matrixaritmetika elemeinek ismerete szükséges. L. pl. a szerzőnek a M. T. A. III. osztálya közleményeiben megjelent dolgozatát: Matrixfüggvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. I. és II. fejezet. 1953. **III.** 4. szám. 417—458. o.

A $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_r$-ik sorát és $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_s$-ik oszlopát tartalmazó minormatrix:

$$\mathbf{A}^{\beta_1\beta_2\dots\beta_r}_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_s} = \begin{bmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} \dots a_{\beta_1\gamma_s} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{\beta_r\gamma_1} \dots a_{\beta_r\gamma_s} \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ transzponáltja, $\varrho(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ rangja,

$|\mathbf{A}| = \mathbf{A}$ determinánsa.

$$<a_1, a_2, \dots a_n> = \begin{bmatrix} a_1\, 0 \dots 0 \\ 0\, a_2 \dots 0 \\ \dots\dots \\ 0\, 0 \dots a_n \end{bmatrix} \text{ diagonálmatrix ;}$$

$$<1, 1, \dots 1> = \mathbf{E}$$

$<\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots> =$ diagonális hipermatrix $(= \mathbf{A} \dotplus \mathbf{B} \dotplus \mathbf{C} \dotplus \dots)$

Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_r]$ és $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_s]$, akkor $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_r\, \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_s]$.

Noha a lineáris egyenletek elmélete *Kronecker*, *Frobenius*, *Rouché* és *Fontené*[2] munkáival lezártnak tekinthető, a lineáris egyenletek gyakorlati (numerikus, gépesített) megoldási módszereire vonatkozó kutatások újabban is számos dolgozatnak képezték a tárgyát.[3]

A gyakorlati módszerekre vonatkozó vizsgálatok azonban túlnyomó részben a kvadratikus, nem-szinguláris koefficiensmatrix-szal bíró rendszerekkel foglalkoznak, a szinguláris v. nem-kvadratikus koefficiensmatrix-szal bíró rendszereket illetőleg többnyire csak az általános elméletre hivatkozó utalások találhatók.

Egyébként a szinguláris koefficiensmatrix-szal bíró rendszerekkel kapcsolatban *Jacobi* még a következőket írta:[4]

»Tehát, ha a determináns eltűnik, igen különböző eseteknek a sokaságát kellene megkülönböztetni és az egyes esetek számára algebrai kritériumokat kellene megadni. Ez azonban tetszőleges számú lineáris egyenlet esetén nagyon hosszadalmasnak látszik«.

*Jacobi*nak ez a megállapítása azért különösen figyelemreméltó, mert éppen a bilineáris alakok *Jacobi*tól származó transzformációjának matrixelméleti analogonja: a diadikus előállítás fog alkalmasnak bizonyulni — a jelen dolgozatban kifejtendő módon — egy, az elmélet és gyakorlat igényeit egyaránt kielégítő, tetszőleges rendszerre kivétel nélkül alkalmazható megoldási módszer megalapozására.

[2] *L. Baltzer*, Determinanten. 2. Aufl. (1864) S. 62. Frobenius, Journ. f. Math. 82 (1877) S. 236. Rouché, C. R. 81 (1875). Fontené, Nouv. ann. 14 (1875).

[3] *Th. Banachiewitz*, Méthode de résolution numérique des équations linéaires, Bull. intern. Acad. Polonaise, 1938. 393—404. o. *R. Zurmühl*, Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungsysteme. ZAMM. 1949. S. 76—84. Фаддеева, Успехи математических наук (1950.)

[4] L. pl. *E. Pascal*, Repertorium der höheren Mathematik (1910) I. Band. S. 78.

A klasszikus elveken alapuló megoldási módszerek[5] matrixtechnikailag úgy jellemezhetők, hogy a megoldandó $\mathbf{Ax} = 0$ homogén egyenletrendszer koefficiensmatrixát két tényezőre bontjuk oly módon, hogy az $\mathbf{Ax} \equiv \mathbf{CBx} = 0$ egyenletből $\mathbf{Bx} = 0$ következzék, továbbá a $\mathbf{B}$ tényező a $\mathbf{Bx} = 0$ egyenlet gyakorlati megoldása szempontjából kedvező struktúrával bírjon.

A jelzett követelményeket legtökéletesebben az a faktorizáció elégíti ki, mely valamely matrixnak Hermite-féle normálalakra[6] való redukálásánál szerepel. Ez esetben ugyanis az $\mathbf{A} = \mathbf{CB}$ szorzat első tényezője nem-szinguláris és a második tényező hermitikus normálalakú felső háromszögmatrix a következő tulajdonságokkal:

1. a fődiagonális-elemek 0 vagy 1 értékkel bírnak,
2. a 0 fődiagonális-elemeket tartalmazó sorok csupa 0-ból állnak,
3. az 1 fődiagonális-elemeket tartalmazó oszlopok (az 1-esen kívül) csupa 0-ból állanak.

Könnyen belátható, hogy ez a »hermitikus« faktorizáció már az egyenletrendszer végleges megoldását szolgáltatja. Ugyanis $|\mathbf{C}| \neq 0$ miatt $\mathbf{CBx} = 0$-ból $\mathbf{Bx} = 0$ következik. A $\mathbf{B}$ tényező pedig a fentebb körülírt struktúrájával az ismeretleneket automatikusan két csoportba osztja:

a »szabad« ismeretlenekre, melyek a 0 fődiagonális-elemekkel megegyező indexűek, és

a »kötött« ismeretlenekre, melyek az 1 fődiagonális-elemekkel megegyező indexűek. A $\mathbf{Bx} = 0$ egyenletből következő skaláregyenletek pedig éppen a kötött ismeretleneket fejezik ki homogén lineáris módon, mint a tetszőleges paraméterekként szereplő szabad ismeretlenek függvényeit.

A hermitikus faktorizáció kivitelére alkalmas, közvetlen és gyakorlati eljárás nem ismeretes, de a faktorizáció elvén alapuló megoldási módszerek mindegyikénél felismerhető az a tendencia, hogy az egyik faktormatrix minél jobban hasonlítson a hermitikus normálformához.

A koefficiensmatrix faktorizációjának elve először *Cholesky* és *Banachiewitz*nél mutatkozik kifejezetten, akik kvadratikus, nem-szinguláris koefficiensmatrix esetére adtak egy módszert, melynél a koefficiensmatrix két háromszögmatrix szorzatára bomlik. Az ennél a módszernél fellépő matrixtényezők még csupán a háromszögstruktúra tekintetében hasonlítanak a hermitikus normálformához. Azonban — mint közismert — ez a struktúra már lehetővé teszi az ismeretleneknek közvetlen, rekurzív módon való kiszámítását.

Cholesky és *Banachiewitz* módszerének a Gauss-féle eliminációs algoritmussal való kapcsolatát (l. I. §) *Bodewig* tárta fel, amennyiben kimutatta, hogy a Gauss-féle eliminációs eljárásnak matrixtechnikai eszközökkel való kivitele pontosan a koefficiensmatrixnak *Cholesky* és *Banachiewitz* által megadott faktorizációjára vezet.

A háromszögmatrix-tényezőkre való bontásnak meg van az az előnye, hogy — megfelelő számológép használatánál — kevesebb írásmunkát igényel, mint a klasszikus módszer. Ezzel szemben gyakorlati szempontból lényeges hiányossága a módszernek, hogy csak akkor alkalmazható, ha a koefficiensmatrixnak összes sarokminorai 0-tól különbözők, ennek a feltételnek a teljesülése pedig — miután a minorok előzetes effektív kiszámítása gyakorlati

[5] Iteratív megoldási módszereket illetőleg l. pl. *G. E. Forsythe* Bull. Amer. Math. Soc. 59 (1953) 299—329. o.

[6] *Ch. Hermite,* Journ. f. Math. (1851) 191—216. o.

szempontból nem jöhet tekintetbe — csak a számítás folyamán dől el és így állandóan indexcserék és egyéb korrekciók válhatnak szükségessé.

Ha mármost tekintetbe vesszük, hogy a lineáris egyenletrendszernek a koefficiensmatrix faktorizációja útján történő megoldásánál mindig csupán az egyik faktormatrixnak van kitüntetett szerepe, akkor önként felmerül a kérdés hogy lehet-e a tényezőkre bontáshoz oly módszert megadni, mely direkt, kivétel nélkül alkalmazható és az egyenletrendszer megoldása szempontjából lényeges tényezőt az ismeretlenek kiszámítására alkalmas, a Hermite-féle normálformát minél jobban megközelítő matrix alakjában szolgáltatja.

A jelen dolgozatban egy, az elmélet és gyakorlat igényeit egyaránt kielégítő megoldási módszert fogunk ismertetni, mely tetszőleges, nemkvadratikus koefficiensmatrix esetén kivétel nélkül alkalmazható, formailag az egyenletrendszer koefficiensmatrixának diadikus előállításán[7] alapszik és lényegében úgy a Gauss-féle elimináció, valamint a Jacobi-féle transzformáció[8] matrixelméleti analogonjának tekinthető és a lényeges tényezőt a Hermite-féle normálforma 1. és 2. tulajdonságaival rendelkező háromszögmatrix alakban szolgáltatja.

Diadikus előállítás[7] alatt értjük valamely matrixnak a saját rangjával megegyező számú elsőrangú matrix, azaz *diád* összegére való

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \cdots + \mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^*, \qquad \varrho(\mathbf{A}) = r \tag{1}$$

alakú felbontását.

Egy matrix (1) alakú diadikus előállításának — miként azt a 2. §-ban bővebben kifejtjük — a következő tulajdonságai vannak:

Az előállítás minimális abban az értelemben, hogy $\mathbf{A}$ nem állítható elő kevesebb diád összegeként.

Az előállításban szereplő baloldali $\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_r$ tényezők, valamint a jobboldali $\mathbf{v}_1^* \ldots \mathbf{v}_r^*$ tényezők lineárisan független vektorrendszerek (a matrix oszlopvektor-terének, ill. sorvektor-terének bázisai).

Egy matrixnak diádok összegeként való előállítása legegyszerűbben alkalmas diádok szukcesszív leválasztásával nyerhető és csupán másodrendű determinánsok számítását igényli. Ennélfogva a diadikus előállítás a matrix rangjának gyakorlati meghatározására és evidenciába helyezésére is alkalmas.

Egy diadikus előállítás a matrix faktorizációjával ekvivalens az

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \cdots + \mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^* = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} = \underset{(nr)}{\mathbf{U}}\,\underset{(rm)}{\mathbf{V}^*} \tag{2}$$ [9]

[7] A diadikus előállítás egyéb alkalmazásaira nézve l. *E. Egerváry*, On a property of the projector matrices, On a Lemma of Stieltjes on matrices, Acta Szeged Tom. XV. 1—6, o. 99—103. o.

[8] L. pl. [4] S. 120—121. o.

[9] Az $\mathbf{U}\mathbf{V}^*$ szorzat két különböző előállítása közül az irodalomban legtöbbször az $[\mathbf{u}^i\mathbf{v}_j]$ alak szerepel, míg a (2)-ben közölt és a particionált matrixok műveleti szabályainak speciális eseteként jelentkező $\Sigma\mathbf{u}_i\,\mathbf{v}^i$ alak alig van említve. L. pl. *A. C. Aitken*, Determinants and Matrices. Edinburgh, 1948. 24—25. o.

identitás következtében és ebből az összes többi $(nr) \times (rm)$ típusú faktorizációk az $(\mathbf{UT})\,(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{V}^*)$ alakban adódnak, ahol $\mathbf{T}$ tetszőleges r-edrendű nem-szinguláris matrixot jelent.

Egy adott $\mathbf{A}$ matrixnak bármely (2) alakú előállítása mármost a következő feladatok közvetlen megoldását teszi lehetővé:

I. Az $\mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}$ bilineáris alaknak minimális számú formapár szorzatösszegére való redukálását a (2)-ből közvetlenül folyó

$$\mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^*\left(\sum_1^r \mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*\right)\mathbf{x} = \sum_1^r (\mathbf{y}^*\mathbf{u}_k)\,(\mathbf{v}_k^*\mathbf{x})$$ [10]

azonosság alapján.

II. Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ (ill. $\mathbf{y}^*\mathbf{A} = 0$) homogén lineáris egyenletrendszernek minimális számú egyenletből álló, ekvivalens rendszerre való redukálását Ugyanis (2) szerint az

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\sum_1^r \mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*\right)\mathbf{x} = \mathbf{u}_1(\mathbf{v}_1^*\mathbf{x}) + \cdots + \mathbf{u}_r(\mathbf{v}_r^*\mathbf{x}) = 0$$

egyenlet az $\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_r$ vektorok lineáris függetlensége folytán akkor és *csak akkor* van kielégítve, ha

(3) $$\mathbf{v}_1^*\mathbf{x} = 0, \ldots \mathbf{v}_r^*\mathbf{x} = 0.$$

Ezzel az $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ egyenlet az $\mathbf{A}$ matrix rangjával egyező számú lineárisan független skaláregyenletre van visszavezetve.

Miután minden matrixnak a fentiek szerint végtelen sok diadikus előállítása van, önként felmerül a kérdés, hogy ezek közül melyik előnyös az I. és II. feladatok gyakorlati megoldása szempontjából.

Nyilván mindkét feladat megoldása szempontjából természetes követelmény, hogy a (2) felbontásban szereplő diádok elemei az adott $\mathbf{A}$ matrix elemeiből egyszerű (numerikus, gépi számításra alkalmas) műveletekkel adódjanak.

A lineáris egyenletek megoldása szempontjából lényeges követelmény továbbá, hogy a (3) alatti, redukált egyenletrendszer együtthatói — a Gauss-féle eliminációs elvnek megfelelően — lényegileg (azaz esetleges sorcseréktől eltekintve) — háromszögmatrixot alkossanak.

Mindkét követelménynek megfelel a diadikus előállítás effektív kivitelére szolgáló — a II. §-ban kifejtendő módszer — mely diádok szukcesszív leválasztásából áll és lényegileg a Jacobi-transzformációval ekvivalens.

Ha továbbá figyelembevesszük, hogy nagyszámú egyenletből álló rendszer effektív megoldása folyamán lehetőleg minden sor- ill. indexcsere elkerülendő, akkor kívánatosnak látszik a diadikus előállításnak egy olyan megválasztása, melynek alkalmazása mellett a redukált egyenletrendszer minden sor- ill. indexcsere nélkül háromszögmatrix-szal bír, tehát közvetlenül rekurzíve megoldható.

[10] Ez az azonosság definit (v. semidefinit) $\mathbf{A}$ esetére az $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alaknak négyzetösszegbe való transzformálását szolgáltatja.

Ez a további követelmény is kielégíthető, ha a matrix hermitikus normálformájának fentidézett definíciójában rejlő alapgondolatot kihasználva az egyes diádok leválasztására egy olyan sorrendet jelölünk ki, mely az egyik (pl. a jobboldali) matrixtényezőt automatikusan a hermitikushoz közelálló struktúrájú alakban szolgáltatja.

* * *

A lineáris egyenletek megoldására vonatkozólag eddig elmondottak a homogén rendszerekre vonatkoztak. Azonban az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ inhomogén egyenlet különálló tárgyalása (az $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ megoldásnak megfelelően) tudvalevőleg csak kvadratikus, nem-szinguláris $\mathbf{A}$ esetében és akkor is csak elméletileg[11] indokolt. A III. §-ban meg fogjuk mutatni, hogy az inhomogén rendszer megoldása — mint a megfelelő homogén rendszernek egy speciális megoldása a — diadikus előállítás felhasználásával minden nehézség nélkül, természetes módon nyerhető és a közismert kompatibilitási feltételek a diadikus előállításnál alkalmazásra kerülő matrixtechnikában igen egyszerű kifejezést nyernek.

Végül a IV. §-ban az ismertetett módszerek alkalmazását mutatjuk be néhány numerikus példa keretében.

I. A Banachiewitz—Cholesky-féle módszer és annak Bodewigtől származó matrixtechnikai interpretációja

A szóbanforgó módszernél fel van tételezve, hogy az adott matrix kvadratikus és összes sarokminorai 0-tól különbözők, tehát nem-szinguláris. Kerestetik $\mathbf{A}$-nak két háromszögmatrix szorzatára való felbontása, melynél az általánosság megszorítása nélkül az egyik tényező összes fődiagonáliselemeit 1-gyel egyenlővé tehetjük. A keresett felbontás tehát a következő alakú :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{CB}. \tag{4}$$

A matrixszorzás elvégzése után a tényezők elemeinek meghatározására a következő bilineáris egyenletek adódnak :

$$a_{ij} = c_{i1}b_{1j} + \dots + c_{ik}b_{kj} \qquad k \leq i, j.$$

Ezen egyenletekből a b_{ij} és c_{ij} elemek egy sajátos lexikografikus sorrendben racionális úton kiszámíthatók a[12]

$$\begin{aligned} b_{ij} &= (a_{ij} - c_{i1}b_{1j} - \dots - c_{i,i-1}b_{i-1,j}) : c_{ii} & i < j \\ c_{ij} &= a_{ij} - c_{i1}b_{1j} - \dots - c_{i,j-1}b_{j-1,j} & i \geq j \end{aligned}$$

[11] V. ö. *Zurmühl* l. c.[3] S. 77—78. o.

[12] V. ö. *Zurmühl* l. c.[3] S. 79, továbbá Гантмахер, Теория матриц, Москва 1953., 38. o.

képletek alapján. A c_{ii} számokkal való oszthatóságot a sarokminorokra vonatkozó kikötés garantálja.

Bodewig kimutatja, hogy a háromszögmatrix-tényezőkre való felbontás a Gauss-féle eliminációs algoritmus matrixtechnikai átírásával identikus. Matrixtechnikailag ugyanis az x_1 ismeretlen eliminációja az $\mathbf{Ax} = 0$ rendszerből a következőképpen fejezhető ki:

$$\mathbf{T}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21}a_{11}^{-1} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_{n1}a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Ha ezt a processzust iteráljuk és rendre balról szorzunk

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -a_{32}^{(2)}a_{22}^{(2)\,-1} & \dots & 0 \\ 0 & -a_{n2}^{(2)}a_{22}^{(2)\,-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 = \dots \qquad \mathbf{T}_{n-1} = \dots$$

vel, akkor a $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{A}$, $\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{A}, \dots (\mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1)\,\mathbf{A}$ szorzat első két, három, $\dots$ n fődiagonális-eleme alatti elemek mind 0-val lesznek egyenlők. E szerint a

$$\mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{5}$$

szorzat felső háromszögmatrix lesz. Azonban a $\mathbf{T}_k$ matrixokkal együtt ezek szorzata, valamint annak reciproka is alsó háromszögmatrix, tehát az (5)-ből következő

$$\mathbf{A} = (\mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_1)^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{CB}$$

egyenlet az adott $\mathbf{A}$ matrixnak háromszögmatrix-tényezőkre való bontását adja. Az eljárás kivihetőségének szükséges és elegendő feltétele, hogy a_{11}, $a_{22}^{(2)}$, $\dots$, $a_{nn}^{(n)}$ 0-tól különbözőknek adódjanak.

Későbbi felhasználás céljából megemlítjük, hogy ha a *Bodewig* által alkalmazott $\mathbf{T}_1$ matrix-szal balról és a

$$\mathbf{T}_1' = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\dfrac{a_{1m}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

matrix-szal jobbról szorzunk egy $\underset{(n,m)}{\mathbf{A}}$ típusú matrixot, akkor a

$$\mathbf{T}_1\mathbf{A}\mathbf{T}_1' = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2m}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nm}^{(2)} \end{bmatrix} = \langle a_{11}, \mathbf{A}^{(2)} \rangle\,; \; a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{i1}}{a_{11}}$$

illetve az

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_1^{-1} < a_{11}, \mathbf{A}^{(2)} > \mathbf{T}_1'^{-1} \tag{6}$$

egyenletre jutunk. Innen következik, hogy ha az $\mathbf{A}$ matrix rangja r, akkor az eggyel kevesebb sort és oszlopot tartalmazó $\mathbf{A}^{(2)}$ matrix rangja $r - 1$. Továbbá kvadratikus matrix esetén $|\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_1'| = 1$ figyelembevételével adódik, hogy

$$|\mathbf{T}_1 \mathbf{A} \mathbf{T}_1'| = |\mathbf{A}|. \tag{6.1}$$

II. A diadikus előállítás és annak kapcsolata a bilineáris alak transzformációjával és a homogén lineáris egyenletek megoldásával

Elsőrangú matrix meg van határozva egy sora és egy oszlopa által, ha a sor és oszlop közös eleme 0-tól különböző. Legyen pl. a β-dik sor :

$$\mathbf{a}^\beta = [a_{\beta 1} \ldots a_{\beta m}] \text{ és a } \gamma\text{-dik oszlop: } \mathbf{a}_\gamma = \begin{bmatrix} a_{1\gamma} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n\gamma} \end{bmatrix}, \text{ közös elemük}$$

$a_{\beta\gamma} \neq 0$. Ekkor az összes másodrendű minorok eltűnéséből következik

$$a_{ij} = \frac{a_{i\gamma} a_{\beta j}}{a_{\beta\gamma}}$$

$$[a_{ij}] = \frac{1}{a_{\beta\gamma}} \begin{bmatrix} a_{1\gamma} a_{\beta 1} & \ldots & a_{1\gamma} a_{\beta m} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n\gamma} a_{\beta 1} & \ldots & a_{n\gamma} a_{\beta m} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{\beta\gamma}} \begin{bmatrix} a_{1\gamma} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n\gamma} \end{bmatrix} [a_{\beta 1} \ldots a_{\beta m}] = \frac{\mathbf{a}_\gamma \mathbf{a}^\beta}{a_{\beta\gamma}}.$$

E szerint minden elsőrangú matrix előállítható mint egy baloldali oszlopvektor-tényező és egy jobboldali sorvektor-tényezőnek a közönséges matrixszorzás szabálya szerint képezett szorzata. Ha a $c\,[u_i v_j] = c\mathbf{u}\mathbf{v}^*$ matrixot rövidség kedvéért és az irodalomban kialakult szokást követve diádnak[13] nevezzük, akkor fenti eredményünk így fogalmazható :

Bármely elsőrangú matrix diád alakban írható.

Közelfekvő ezek után a kérdés : Lehet-e egy r-edrangú matrixot r diád összegeként előállítani? Ennek a kérdésnek az eldöntéséhez előrebocsátjuk a következőket :

[13] A »diád« és »diádösszeg« fogalmak és elnevezések *W. Gibbs.* nyomán főként az elméleti fizikai irodalomban, a háromdimenziós vektortér lineáris vektorfüggvényeinek felbontásánál szerepelnek, egyes helyeken önkényes műveleti szabályok és misztikus kommentárok (»unbestimmtes Produkt«) kíséretében. Jelen dolgozatban a — rövidsége folytán előnyben részesített és használt — diád elnevezés alatt kizárólag elsőrangu matrixot fogunk érteni, ennélfogva a diádokra vonatkozó műveleti szabályok a közönséges matrixaritmetika műveleti szabályainak speciális esetei.

Megjegyezzük még e helyen, hogy a diádok az általános matrixok közt hasonló szereppel bírnak, mint a kétváltozós függvények közt az egyváltozós függvények szorzatai.

r diád összegét általában

$$\sum_{1}^{r} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* =$$

$$(7) \qquad = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1r} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v_{r1} & v_{r2} & \dots & v_{rm} \end{bmatrix} = \mathbf{UV}^*$$

alakban fogjuk írni. Egyes esetekben azonban célszerű a diádok vektortényezőit bizonyos módon normírozni és ekkor a diádösszeg a következő alakú lesz:

$$(7.1) \quad \sum_{1}^{r} \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \cdot \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} = \mathbf{U} < \lambda_1 \dots \lambda_r > \mathbf{V}^*.$$

Az $\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* \dots \mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^*$ diádokat lineárisan függetleneknek fogjuk nevezni, ha úgy a baloldali $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r$ tényezők, valamint a jobboldali $\mathbf{v}_1^* \dots \mathbf{v}_r^*$ tényezők lineárisan függetlenek.

A továbbiakban lényeges szerepe lesz a következő lemmának:

Diádösszeg rangja nem nagyobb a tagok számánál és azzal akkor és csak akkor egyenlő, ha a diádok lineárisan függetlenek.

Ugyanis a diádösszeg (7) kifejezéséből nyilvánvaló, hogy $\sum_{1}^{r} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^*$ minden $r+1$-edrendű minora 0. Ha viszont a diádok lineárisan függetlenek, akkor definíció szerint az $\mathbf{UV}^*$ szorzatnak van legalább egy

$$(\mathbf{UV}^*)_{\gamma_1 \dots \gamma_r}^{\beta_1 \dots \beta_r} = \mathbf{U}_{1 \dots r}^{\beta_1 \dots \beta_r} \mathbf{V}^{*\,1 \dots r}_{\gamma_1 \dots \gamma_r}$$

alakú, r-edrendű, 0-tól különböző minora. Ekkor tehát $\varrho\left(\sum_{1}^{r} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^*\right) = r$.

Valamely matrixnak lineárisan független diádck összegeként való előállítása nyilván nem egyértelmű. Kimutatható azonban, hogy ha egy $\mathbf{A} = \sum \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* = \mathbf{UV}^*$ alakú előállítás ismeretes, akkor az összes többi diadikus előállítások

$$(8) \qquad \mathbf{A} = (\mathbf{UT})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{V}^*)$$

alakúak, ahol $\mathbf{T}$ tetszőleges r-edrendű nem-szinguláris matrix. Ebből következik továbbá, hogy a diadikus előállítás baloldali $\mathbf{U}$ (jobboldali $\mathbf{V}^*$) tényezőjéül $\mathbf{A}$ oszlop (sor) vektorterének tetszőleges bázismatrixa választható és ezáltal a másik tényező egyértelműen meg van határozva.

Kézenfekvő ezek után a következő, elméletileg és gyakorlatilag egyaránt fontos kérdésnek a felvetése: Hogyan lehet valamely adott matrixnak egy (7 v. 7.1) alakú diadikus előállítását effektíve megszerkeszteni? Az alábbiakban erre a célra egy olyan algoritmust adunk meg, mely kizárólag másodrendű determinánsok számításából áll és amely az adott matrix rangszámát egy alkalmas diád leválasztása (kivonása) által eggyel csökkenti.

Feltesszük, hogy $\varrho(\mathbf{A}) = r \geqq 1$, tehát van legalább egy 0-tól különböző elem: $a_{\beta\gamma}$. Ekkor $\mathbf{A}$-ból az $a_{\beta\gamma}$ elem által generált $\frac{1}{a_{\beta\gamma}} \mathbf{a}_\gamma \mathbf{a}^\beta$ diádot kivonva a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} - \frac{1}{a_{\beta\gamma}} \begin{bmatrix} a_{1\gamma} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n\gamma} \end{bmatrix} [a_{\beta 1} \dots a_{\beta m}] =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} - \frac{a_{1\gamma}a_{\beta 1}}{a_{\beta\gamma}} & \dots 0 \,. & a_{1m} - \frac{a_{1\gamma}a_{\beta m}}{a_{\beta\gamma}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots 0 \,. & 0 \\ a_{n1} - \frac{a_{n\gamma}a_{\beta m}}{a_{\gamma\beta}} & \dots 0 \,. & a_{nm} - \frac{a_{n\gamma}a_{\beta m}}{a_{\beta\gamma}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(2)}$$

matrixot nyerjük, melynek γ-dik oszlopa és β-dik sora csupa 0 elemből áll. Továbbá az I. § végén bizonyított segédtétel szerint $\varrho(\mathbf{A}^{(2)}) = \varrho(\mathbf{A}) - 1$. E szerint az adott $\mathbf{A}$ matrixot az $\frac{1}{a_{\beta\gamma}} \mathbf{a}_\gamma \mathbf{a}^\beta$ diád leválasztásával eggyel alacsonyabb rangúra redukáltuk. Nyilvánvaló, hogy a redukciót r-szer iterálva, azaz r diád leválasztásával 0 matrixhoz jutunk és ezzel az adott r-edrangú matrix r diád összegére van bontva, melyek szükségképpen lineárisan függetlenek.

A diádok fokozatos leválasztásából álló algoritmus e szerint nemcsak a rangszám gyakorlati kiszámítására alkalmas, hanem azt evidenciába is helyezi.

Vizsgáljuk ezek után tüzetesebben a szukcesszív redukciókkal keletkező diádok elemeit.

A k-adik redukciónál az $\mathbf{A}^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]$ matrix és az abból egy 0-tól különböző $a_{\beta_k\gamma_k}^{(k)}$ elem által generált diád leválasztásával keletkező $\mathbf{A}^{(k+1)} = [a_{ij}^{(k+1)}]$ matrix közt (8) szerint az

$$(9.1) \qquad [a_{ij}^{(k+1)}] = [a_{ij}^{(k)}] - \frac{1}{a_{\beta_k\gamma_k}^{(k)}} [a_{i\gamma_k}^{(k)} a_{\beta_k j}^{(k)}] \;;\; a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$$

összefüggés áll fenn.

Másrészt **A** minorai közt az

(9.2) $$A_{ij}^{(k)} = \left|\mathbf{A}\,{}^{\beta_1\ldots\beta_{k-1}i}_{\gamma_1\ldots\gamma_{k-1}j}\right|,\quad A_{ij}^{(1)} = a_{ij};\ A_{ij}^{(0)} = 1$$

jelölés alkalmazásával fennáll a következő azonosság[11]:

$$A_{ij}^{(k)}A_{\beta_k\gamma_k}^{(k)} - A_{i\gamma_k}^{(k)}A_{\beta_k j}^{(k)} = A_{\beta_{k-1}\gamma_{k-1}}^{(k-1)}A_{ij}^{(k+1)}$$

melyből $A_{\beta_k\gamma_k}^{(k)} \neq 0$, $A_{\beta_{k-1}\gamma_{k-1}}^{(k-1)} \neq 0$ esetén átrendezéssel

(9.21) $$\frac{[A_{ij}^{(k+1)}]}{A_{\beta_k\gamma_k}^{(k)}} = \frac{[A_{ij}^{(k)}]}{A_{\beta_{k-1}\gamma_{k-1}}^{(k-1)}} - \frac{[A_{i\gamma_k}^{(k)}A_{\beta_k j}^{(k)}]}{[A_{\beta_{k-1}\gamma_{k-1}}^{(k-1)}]^2} : \frac{A_{\beta_k\gamma_k}^{(k)}}{A_{\beta_{k-1}\gamma_{k-1}}^{(k-1)}}$$

következik. (9.1) és (9.21) összehasonlításából látható, hogy $a_{ij}^{(k)}$ és $\dfrac{A_{ij}^{(k)}}{A_{\beta_{k-1}\gamma_{k-1}}^{(k-1)}}$ ugyanazon rekurzív relációknak tesznek eleget, továbbá az $a_{ij}^{(1)}$ és $\dfrac{A_{ij}^{(1)}}{A_{ij}^{(0)}}$ kezdeti értékek megegyeznek. Következésképpen

(10) $$a_{ij}^{(k)} = \frac{A_{ij}^{(k)}}{A_{\beta_{k-1}\gamma_{k-1}}^{(k-1)}} = \frac{\left|\mathbf{A}\,{}^{\beta_1\ldots\beta_{k-1}i}_{\gamma_1\ldots\gamma_{k-1}j}\right|}{\left|\mathbf{A}\,{}^{\beta_1\ldots\beta_{k-1}}_{\gamma_1\ldots\gamma_{k-1}}\right|}.$$

A $k = 1, 2, \ldots r$ értékekhez tartozó egyenleteket összegezve, $a_{ij}^{(r+1)} = 0$ figyelembevételével az adott r-edrangú matrix explicit diadikus előállítását nyerjük (ahol $a_{\beta_k\gamma_k}^{(k)}$ az $\mathbf{A}^{(k)}$ matrixnak tetszőleges, 0-tól különböző eleme).

$$\mathbf{A} = \sum_1^r \frac{[a_{i\gamma_k}^{(k)}a_{\beta_k j}^{(k)}]}{a_{\beta_k\gamma_k}^{(k)}} =$$

(11) $$= \begin{bmatrix} a_{1\gamma_1} & a_{1\gamma_2}^{(2)} & \cdots & a_{1\gamma_r}^{(r)} \\ a_{2\gamma_1} & a_{2\gamma_2}^{(2)} & \cdots & a_{2\gamma_r}^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n\gamma_1} & a_{n\gamma_2}^{(2)} & \cdots & a_{n\gamma_r}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & a_{\beta_r\gamma_r}^{(r)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{\beta_1 1} & a_{\beta_1 2} & \cdots & a_{\beta_1 m} \\ a_{\beta_2 1}^{(2)} & a_{\beta_2 2}^{(2)} & \cdots & a_{\beta_2 m}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\beta_r 1}^{(r)} & a^{(r)} & \cdots & a_{\beta_r m}^{(r)} \end{bmatrix}$$

(11.1) $$= \sum_1^r \frac{1}{A_{\beta_{k-1}\gamma_{k-1}}^{(k-1)}A_{\beta_k\gamma_k}^{(k)}} \begin{bmatrix} A_{1\gamma_k}^{(k)} \\ \vdots \\ A_{n\gamma_k}^{(k)} \end{bmatrix} [A_{\beta_k 1}^{(k)} \cdots A_{\beta_k m}^{(k)}]$$

[14] L. pl. l. c. [4]) S. 61. o.

Ha **A**-nak első-, másod-, ... r-edrendű sarokminorai 0-tól különbözők, akkor $\beta_k = \gamma_k = k$ tehető és ez esetben (10) szerint $a_{ij}^{(k)} = 0$, ha $i < k$ vagy $j < k$, tehát a (11) előállítás a következő alakú lesz[15]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2}^{(2)} & \dots & a_{rr}^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nr}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2r}^{(2)} & & a_{2m}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r)} & \dots & a_{rm}^{(r)} \end{bmatrix}. \tag{11.2}$$

Ez esetben tehát a (11) felbontásban szereplő balszélső és jobbszélső tényezők trapéz(háromszög)matrixok.

Végül, a (11.1)-ben szereplő oszlop- és sorvektorok elemeinek (9.2) alatti struktúrájából látható, hogy

$$\begin{bmatrix} A_{1\gamma_r}^{(k)} \\ \vdots \\ A_{n\gamma_k} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\beta_1\gamma_k} & \dots & a_{\beta_1\gamma_k} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{\beta_{k-1}\gamma_1} & \dots & a_{\beta_{k-1}\gamma_k} \\ \mathbf{a}_{\gamma_1} & \dots & \mathbf{a}_{\gamma_k} \end{vmatrix},$$

$$[A_{\beta_k 1}^{(k)} \dots A_{\beta_k m}^{(k)}] = \begin{vmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} & \cdot & a_{\beta_1\gamma_{k-1}} & \mathbf{a}^{\beta_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\beta_k\gamma_1} & \cdot & a_{\beta_k\gamma_{k-1}} & \mathbf{a}^{\beta_k} \end{vmatrix}$$

és ennek felhasználásával a (11.1) diádok tényezői az **A** matrix skalár- és vektorelemeivel explicite is kifejezhetők a következőképpen :

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}_{\gamma_1}\mathbf{a}^{\beta_1}}{a_{\beta_1\gamma_1}} + \frac{\begin{vmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} & a_{\beta_1\gamma_2} \\ \mathbf{a}_{\gamma_1} & \mathbf{a}_{\gamma_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} & \mathbf{a}^{\beta_1} \\ a_{\beta_2\gamma_1} & \mathbf{a}^{\beta_2} \end{vmatrix}}{a_{\beta_1\gamma_1} A_{\beta_2\gamma_2}^{(2)}} + \dots$$

$$\dots + \frac{\begin{vmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} & \dots & a_{\beta_1\gamma_r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{\beta_{r-1}\gamma_1} & \dots & a_{\beta_{r-1}\gamma_r} \\ \mathbf{a}_{\gamma_1} & \dots & \mathbf{a}_{\gamma_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} & \cdot & a_{\beta_1\gamma_{r-1}} & \mathbf{a}^{\beta_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\beta_r\gamma_1} & \dots & a_{\beta_r\gamma_{r-1}} & \mathbf{a}^{\beta_r} \end{vmatrix}}{A_{\beta_{r-1}\gamma_{r-1}}^{(r-1)} \, A_{\beta_r\gamma_r}^{(r)}} \tag{11.3}$$

ahol $\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}^j = [a_{j1} \dots a_{jm}]$ és $A_{\beta_k\gamma_k}^{(k)}$ a (9.2)-ben megadott jelentéssel bír.

[15] V. ö. Гантмахер 1. o.[12]), 39. o.

Ha az r-edrangú $\mathbf{A}$ matrix-szal az $\mathbf{y}^*\mathbf{Ax} = \sum\sum a_{ij} y_i x_j$ bilineáris alakot képezzük és arra (11.3)-et alkalmazzuk, akkor pontosan a bilineáris alak *Jacobi*-féle transzformációjához[16] jutunk. Ezzel igazoltuk korábbi állításunkat, miszerint valamely matrix (11) alakú diadikus előállítása nem egyéb, mint a Jacobi-transzformáció matrixelméleti analogonja.

(12)
$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1m} x_m &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nm} x_m &= 0, \end{aligned}$$

vagy matrixokkal kifejezve, az

(12.1)
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} = 0$$

lineáris, homogén egyenletrendszer és legyen $\varrho(\mathbf{A}) = r$.

Az $\mathbf{A}$ koefficiensmatrix diadikus előállítása azonnal evidenciába helyezi, hogy a (12) rendszer r számú független egyenlettel ekvivalens. Ha ugyanis $\sum_1^r \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^*$ az $\mathbf{A}$ koefficiensmatrixnak egy tetszőleges diadikus előállítása, akkor a (12) rendszer az

$$\mathbf{Ax} = \left(\sum_1^r \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^*\right)\mathbf{x} = \mathbf{u}_1(\mathbf{v}_1^*\mathbf{x}) + \cdots + \mathbf{u}_r(\mathbf{v}_r^*\mathbf{x}) = 0$$

alakban írható, tehát az $\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_r$ tényezők lineáris függetlensége folytán akkor és *csak akkor* van kielégítve, ha

(13)
$$\mathbf{v}_1^*\mathbf{x} = 0, \ldots \mathbf{v}_r^*\mathbf{x} = 0$$

Az $\mathbf{Ax} = 0$ rendszer tehát az $\mathbf{A}$ rangszámával egyező számú független egyenletből álló (13) rendszerrel ekvivalens.

Egy tetszőleges diadikus előállítás felhasználásával adódó rendszer gyakorlati számításra nem alkalmas, minthogy az még egy r-ismeretlenű, nem-szinguláris koefficiensmatrix-szal bíró egyenletrendszer megoldását teszi szükségessé.

Ha azonban az $\mathbf{A}$ koefficiensmatrixnak (11)-ben megadott diadikus előállítását vesszük alapul, akkor — szükség esetén kellő átrendezés és átszámozás után — (11.2) szerint a következő alakú egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1r} x_r + \ldots\ a_{1m} x_m &= 0 \\ a_{22}^{(2)} x_2 + \cdots + a_{2r}^{(2)} x_r + \ldots\ a_{2m}^{(2)} x_m &= 0 \\ \ldots \qquad\qquad \ldots & \\ + \cdots + a_{rr}^{(r)} x_r + \cdots + a_{rm}^{(r)} x_m &= 0, \end{aligned}$$

melyből nyilván $x_r, x_{r-1}, \ldots x_1$ rekurzíve, mint az $x_{r+1}, \ldots x_m$ tetszőleges paraméterek függvényei kifejezhetők.

[16] V. ö. *E. Pascal*, l. c. S. 121. o.

Noha az ily módon adódó redukált rendszer a Gauss-féle elvnek, vagyis a kötött ismeretlenek rekurzív kiszámíthatóságának követelményét kielégíti, számítástechnikai szempontból még mindig különféle hiányosságokat mutat, amennyiben átrendezéseket, átszámozásokat és az $a_{kk}^{(k)}$ együtthatókkal való osztásokat teszi szükségessé, ami nagyobb számú ismeretlen esetén a kivitelt nehézkessé és könnyen elhibázhatóvá teszi.

Felvethető tehát a kérdés: Van-e az adott $\mathbf{A}$ koefficiensmatrixnak olyan diadikus előállítása, mely az $\mathbf{Ax} = 0$ rendszer megoldásához egyedül lényeges jobboldali tényezőt az effektív számítás céljaira előnyös alakban szolgáltatja?

Mint fentebb említettük, egy ilyen előállítás létezését valószínűsíti a matrix Hermite-féle normálformájára vonatkozó tétel.

A következőkben egy olyan diadikus előállítást fogunk megadni, mely a jobboldali tényezőt a Hermite-féle normálforma 1. és 2. tulajdonságaival rendelkező háromszögmatrix alakban szolgáltatja.[17]

Kezdjük könnyebb áttekintés végett egy kvadratikus, nem-szinguláris matrix felbontásával. Az $|\mathbf{A}| \neq 0$ feltevésből következik, hogy $\mathbf{A}$ első oszlopában van legalább egy 0-tól különböző $a_{\beta_1 1}$ elem, tehát képezhető az

$$(14)\qquad \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} \\ \\ \cdot \\ a_{n1} \end{bmatrix} \left[1, \frac{a_{\beta_1 2}}{a_{\beta_1 1}}, \dots \frac{a_{\beta_1 n}}{a_{\beta_1 1}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

különbség. A maradékmatrixból a β_1-dik 0-sor és az első 0-oszlop elhagyásával keletkező $n-1$-edrendű matrix — az I. § végén közölt lemma szerint — szintén nem-szinguláris, arra tehát az előbbi konstrukció alkalmazható. Ilyen módon a konstrukció n-szeri kivitele után $\mathbf{A}$ következő alakú felbontásához jutunk:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(n)} \\ a_{21} & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Itt a jobboldali tényező valóban kielégíti a Hermite-féle normálformára vonatkozó 1. és 2. követelményeket.

Abban a kivételes (csupán definit $\mathbf{A}$ esetén garantált) esetben, ha $\mathbf{A}$ összes sarokminorai 0-tól különbözők, a most közölt eljárás (az $a_{\beta_k k}^{(k)} = a_{kk}^{(k)}$ választás mellett) pontosan a Cholesky—Banachiewitz-féle

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}^{(2)} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

felbontáshoz vezet.

[17] »Háromszög-matrix« itt a legáltalánosabb értelemben veendő, amennyiben az tetszőleges számú 0-sort tartalmazhat.

Ezek után ismertetjük egy szinguláris, vagy nem-kvadratikus matrixnak gyakorlati számításra alkalmas felbontását. Miután egy olyan ismeretlenre, mely a kiindulási $\mathbf{Ax} = 0$ egyenletrendszerben elő sem fordul, nyilván nem kell tekintettel lennünk, feltehetjük, hogy $\mathbf{A}$ első oszlopában van legalább egy 0-tól különböző $a_{\beta_1 1}$ elem. Az $a_{\beta_1 1}$ elem által generált diádot $\mathbf{A}$-ból levonva a (14) jobboldalán álló maradékmatrixot nyerjük. Most két eset lehetséges :

α) A maradékmatrix második oszlopában van legalább egy 0-tól különböző $a^{(2)}_{\beta_2 2}$ elem. Ekkor az előbbi konstrukció megismétlésével egy további 0-tól különböző diádot választunk le.

β) A maradékmatrix második oszlopa csupa 0 elemből áll. Ekkor egy $\begin{bmatrix} * \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ * \end{bmatrix}$ $[0, 0, \ldots 0]$ alakú 0-diádot választunk le, melyben a *-gal jelölt elemek tetszőlegesek.

Az α) és β)-ben leírt redukciókat az egyes maradékmatrixok struktúrájának megfelelően végrehajtva, m lépésben az adott $\mathbf{A}$ matrixnak következő diadikus előállításához jutunk :

$$\left| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n_2} & \ldots & c_{nm} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 1 & b_{12} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_{1m} \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots 1 & b_{\nu_2, \nu_2+1} & \ldots & \ldots & b_{\nu_2 m} \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \ldots & 1 & b_{\nu_3, \nu_3+1} & b_{\nu_3 m} \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \cdot \end{matrix} \right| \tag{15}$$

$$1 < v_2 < v_3 \ldots < v_r \leq m$$

Ez a felbontás az $\mathbf{Ax} = 0$ homogén rendszerrel ekvivalens redukált rendszert a következő alakban szolgáltatja :

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12} x_2 + \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad & + b_{1m} x_m = 0 \\ x_{\nu_2} + b_{\nu_2, \nu_2+1} x_{\nu_2+1} + \cdots \qquad & + b_{\nu_2 m} x_m = 0 \\ x_{\nu_3} + b_{\nu_3 \nu_3+1} x_{\nu_3+1} \cdots & + b_{\nu_3 m} x_m = 0 \\ & \ldots \end{aligned} \tag{15.1}$$

Az így nyert rendszer alakjából rögtön felismerhető, hogy abban $x_1, x_{\nu_2}, x_{\nu_3}, \ldots x_{\nu_r}$ a kötött ismeretlenek, melyek a (15.1) egyenletekből a többi ismeretleneknek, mint tetszőleges paramétereknek függvényei, rekurzíve pusztán összeadás- és szorzásműveletekkel kiszámíthatók.

Nyilvánvaló, hogy a most kifejtett módszer bármely matrixra minden átrendezés és átszámozás nélkül alkalmazható és lényegében nem egyéb, mint a Gauss-féle eliminációs algoritmusnak a Hermite-féle normálforma követelményeit tekintetbe vevő általánosítása és matrixtechnikai átírása.

III. Inhomogén egyenletrendszer

Bármely inhomogén egyenletrendszer általános megoldása előállítható mint egy homogén rendszernek egy speciális megoldása. Ha ugyanis a megoldandó inhomogén rendszer

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \tag{16}$$

vagy matrixjelöléssel

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{b} \tag{16.1}$$

ill. particionált matrixok alkalmazásával

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \tag{16.2}$$

akkor ennek minden $\mathbf{x}$ megoldása az

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{m+1} \end{bmatrix} = 0 \tag{17}$$

homogén rendszernek egy olyan speciális megoldása, melynél $x_{m+1} = -1$. Ahhoz pedig, hogy a (17) homogén rendszernek legyen olyan speciális megoldása, melyben $x_{m+1} = -1$, szükséges és elegendő, hogy x_{m+1} a (17) rendszerre nézve szabad ismeretlen (tetszőleges paraméter) legyen, vagyis a $\mathbf{b}$ vektorral jobbról kiegészített $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ matrixnak (15) előállításában szereplő háromszögmatrix legalsó eleme 0 legyen.

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ inhomogén lineáris egyenletrendszer tehát akkor és csak akkor kompatibilis, ha az $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ matrixnak (15) alakú felbontásában szereplő háromszögmatrixnak utolsó fődiagonális-eleme 0. Ekkor a megfelelő homogén rendszer általános megoldásában az x_{m+1} tetszőleges paraméternek -1 értéket adva nyerjük az inhomogén rendszer általános megoldását.

Ily módon egy inhomogén rendszer megoldása gyakorlati számításra alkalmas formában vissza van vezetve a megfelelő homogén rendszer megoldására.

Numerikus példák

A diadikus felbontás gyakorlati kivitelére vonatkozólag előre bocsátjuk a következőket. A (9.1) egyenletek mutatják, hogy a fokozatos redukció minden egyes lépésénél a megfelelő $a^{(k)}_{\beta_k\gamma_k}$-val való osztás válik szükségessé.

Ha az adott matrix elemei egész számok, akkor törtek előfordulását csak abban az esetben lehet elkerülni, ha mindegyik $[a^{(k)}_{ij}]$ matrixnak van legalább egy $a^{(k)}_{\beta_k\gamma_k}$ eleme, mely a saját sorában v. oszlopában lévő elemek legnagyobb közös osztója.

Ha viszont a matrix elemei korlátolt pontossággal adott számok, (pl. tizedestörtek), akkor a korlátolt pontosságú számításból eredő hibákat azáltal csökkenthetjük, hogy a redukció folyamán az egyes diádok generáló eleméül az abszolút legnagyobbat választjuk.

1. példa. Megszerkesztendő az alábbi matrixnak egy diadikus előállítása:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -8 & -9 & -10 \end{bmatrix}.$$

Itt pl. $a_{35} = -5$ az ötödik oszlop elemeinek legnagyobb közös osztója, tehát $a_{\beta_1\gamma_1} = a_{35}$ választás mellett

$$\mathbf{A} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(2)},$$

$a_{\beta_2\gamma_2} = a_{14}$ választással

$$\mathbf{A}^{(2)} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [2 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(3)},$$

végül $a_{\beta_3\gamma_3} = a_{23}$ választással

$$\mathbf{A}^{(3)} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0] = 0,$$

következésképen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -8 & -9 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{UV}^* \tag{18}$$

tehát az adott matrix rangja: $\varrho(\mathbf{A}) = 3$.

Ennek az eredménynek a felhasználásával az

$$\mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = [y_1 \; y_2 \; y_3 \; y_4] \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -8 & -9 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

bilineáris alak az

$$
\begin{aligned}
&(y_1 \qquad - y_3 - 2y_4)(\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5) + \\
&(y_1 + 2y_2 \qquad - y_4)(2x_1 + \ x_2 + 3x_3 + \ x_4) \qquad + \\
&\quad (y_2 \qquad + \ y_4)(3x_1 + 2x_2 + \ x_3)
\end{aligned}
$$

szorzatösszegbe transzformálható.

A (18) felbontás felhasználható továbbá úgy az $\mathbf{y}^*\mathbf{A} = 0$, valamint az $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ homogén rendszerek rekurzív megoldására, miközben azonban ügyelni kell a rekurzió helyes sorrendjére. Pl. $\mathbf{y}^*\mathbf{A} = \mathbf{y}^*\mathbf{U}\mathbf{V}^* = 0$-ból következik

$$
\mathbf{y}^*\mathbf{U} = [y_1\ y_2\ y_3\ y_4]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0, \text{ azaz } \begin{aligned} y_1 \qquad\quad - y_3 - 2y_4 &= 0 \\ y_1 + 2y_2 \qquad + \ y_4 &= 0 \\ y_2 \qquad + \ y_4 &= 0 \end{aligned}
$$

Itt y_3, y_1, y_2 a kötött ismeretlenek, y_4 tetszőleges paraméter :

$$
\begin{aligned}
y_3 &= \quad y_1 - 2y_4 = \quad y_4 \\
y_1 &= -2y_2 + \ y_4 = \quad 3y_4 \\
y_2 &= \qquad - \ y_4 = -y_4
\end{aligned}
$$

$$
[y_1, y_2, y_3, y_4] = [3\ -1\ 1\ 1]\ \text{const.}
$$

Próba :

$$
[3\ -1\ \ 1\ \ 1]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0.
$$

2. példa. Homogén rendszer.

$$
\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = 0.
$$

Első generáló elem az első oszlop $a_{21} = 1$ eleme,

$$
\mathbf{A} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} [1\ \ 0\ -1\ \ 2\ \ 3] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(2)}.
$$

Második generáló elem a második oszlop $a_{42}^{(2)} = -2$ eleme,

$$\mathbf{A}^{(2)} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad -2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(3)}.$$

Harmadik oszlop 0.
Negyedik lépésnél generáló elem a negyedik oszlop $a_{14}^{(3)} = 1$ eleme

$$\mathbf{A}^{(3)} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -2] = 0.$$

Ezek felhasználásával $\mathbf{A}$ tényezőkre bontott alakja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & ? & 1 & ? \\ 1 & 0 & ? & 0 & ? \\ -1 & 2 & ? & -1 & ? \\ 0 & -2 & ? & 0 & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (? = \text{tetszőleges szám})$$

tehát x_1, x_2, x_4 kötött, és x_3, x_5 szabad ismeretlenek és a redukált egyenletrendszer :

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 \qquad\quad 2x_5 &= 0 \\ x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 - 2x_4 - 3x_5 = x_3 - 7x_5 \\ x_2 &= -x_3 + 2x_5 \\ x_4 &= 2x_5. \end{aligned}$$

Próba :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

3. példa. Inhomogén rendszer.

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Szerkesszük meg az $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ matrix diadikus előállítását, a matrix oszlopait ezúttal is balról jobbra haladó sorrendben véve.

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]-\begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}[1\ \ -1\ \ 2\ \ 0\ \ 1]=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&1&2&0\\0&0&0&2&4\\0&-1&-1&-5&-6\end{bmatrix}=\mathbf{A}_b^{(2)}$$

$$\mathbf{A}_b^{(2)}-\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}[0\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 0]=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&2&4\\0&0&0&-3&-6\end{bmatrix}=\mathbf{A}_b^{(3)}=\mathbf{A}^{(4)}$$

miután a harmadik oszlop 0.

$$\mathbf{A}_b^{(4)}-\begin{bmatrix}0\\0\\2\\3\end{bmatrix}[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2]=0.$$

E szerint $[\mathbf{A},\mathbf{b}]$ tényezőkre bontott alakja :

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&0&?&0&?\\2&1&?&0&?\\3&0&?&2&?\\1&1&?&3&?\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1&2&0&1\\0&1&1&2&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

tehát az $[\mathbf{A},\mathbf{b}]\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\x_5\end{bmatrix}$ homogén rendszer x_5 ismeretlene tetszőleges paraméter, vagyis a (19) rendszer kompatibilis. A redukált rendszer, $x_5=-1$ helyettesítéssel :

$$\begin{aligned}x_1-x_2+2x_3\qquad&=1\\x_2+\ x_3+2x_4&=0\\x_4&=2.\end{aligned}$$

Innen az x_1, x_2, x_4 ismeretlenek mint az x_3 tetszőleges paraméter függvényei

$$\begin{aligned}x_1&=\ \ x_2-2x_3+1&&=-3x_3-3\\x_2&=-x_3-2x_4&&=-\ x_3-4\\x_4&&&=2.\end{aligned}$$

Próba :

$$\begin{bmatrix}1&-1&2&0\\2&-1&5&2\\3&-3&6&2\\1&-2&1&-5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3x_3&-3\\-\ x_3&-4\\x_3&\\&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\7\\-5\end{bmatrix}.$$

О НОВОМ МЕТОДЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ И РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОСНОВЫВАЮЩЕМСЯ НА ДИАДИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ МАТРИЦ.

Е. Эгервари

Резюме

В течение развития техники матриц развивались и методы практического (нумерического, механического) решения систем линейных уравнений. Первым этапом этого развития являлся основывающийся на теории определителей метод, который не пользуется матрицами. Следующий метод одинаково воспользовался определителями и матрицами. Он применял средства арифметики матриц, — в первую очередь, обратную матрицу. Последний этап развития характеризуется полным пренебрежением теорией определителей и обратной матрицей. Он основывается исключительно на правилах сложения и умножения матриц.

Разница между первым и последним этапом хорошо характеризуется примером Форсайса: При прямом применении т. н. »правила Крамера« решение систем линейных уравнений, содержащих $n = 26$ неизвестных, требует $(n+1)! \sim 10^{27}$ умножений. Электрической вычислительной машине, способной на испольнение 2600 умножений в секунде, нужно 10^{17} лет для исполнения упомянутых умножений. С другой стороны метод, основывающийся на технике матриц, требует только $\frac{n^3}{3} \sim 6000$ умножений при решении той же системы (т. е. приближенно 3 секунды).

Было бы возможно представить в форме кратких практических правил метод, основывающийся на технике матриц, пренебрегая теорией. Пожалуй, этот путь был бы более симпатичен для читателей с практическим интересом. Но мы того мнения, что принцип единства теории и практики в этом случае должен быть удовлетворен безусловно, так как технико-матричный способ изложения предоставляет одновременно теоретические основы и практическую форму исполнения решения. Помимо этого существует тесная связь между решением линейных уравнений с помощью техники матриц и преобразованием билинейных (квадратических) форм, пренебрежение которой являлось бы непоследовательностью.

Чтение работы требует только знания элементов арифметики матриц.

AUF DYADISCHER MATRIZENDARSTELLUNG BERUHENDE METHODE ZUR TRANSFORMATION BILINEARER FORMEN UND AUFLÖSUNG LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME

E. EGERVÁRY

Zusammenfassung

Die Methoden der praktischen (numerischen, maschinellen) Auflösung linearer Gleichungsysteme entwickelten sich, zugleich mit der Entfaltung des Matrizenkalküls, durch mehrere Stufen.

Die erste ist die Stufe der auf der Determinantentheorie beruhenden, matrizenfreien Methode. Auf der zweiten herrscht die Methode, die sich der Determinanten sowohl als auch der Matrizen bedient und die Matrizenarithmetik, in erster Linie die Reziproke, anwendet. Die letzte Entwicklungsstufe kennzeichnet die völlige Ausschaltung der Determinantentheorie und selbst der reziproken Matrix; die Rechnung beruht ausschliesslich auf den Additions- und Multiplikationsregeln der Matrizen.

Bezeichnend für den Unterschied zwischen der ersten und dritten Phase der Entwicklung ist folgendes Beispiel von Forsythe: Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 26 Unbekannten wären bei direkter Anwendung der sogenannten Cramerschen Regel $(n+1)! \sim 10^{27}$ Multiplikationen nötig: eine elektronische Rechenmaschine, die 2600 Multiplikationen in einer Sekunde absolviert, bräuchte dazu ungefähr 10^{17}

Jahre. Unter Anwendung der auf dem Matrizenkalkül beruhenden Methode sind hingegen nur $\frac{n^3}{3} \sim 6000$ Multiplikationen erforderlich, somit nicht ganze 3 Sekunden.

Es wäre möglich — und vielleicht für den praktisch interessierten Leser sympathischer — die auf den Matrizenkalkül aufgebaute Methode bei Vernachlässigung der Theorie in Form kurzer Rechnenregeln darzustellen. Doch glauben wir in diesem Falle die Forderung zur Einheit von Theorie und Praxis unbedingt befriedigen zu müssen, da doch die Behandlung mittels des Matrizenkalküls die theoretischen Grundlagen und die praktischen Rechnenregeln gleichzeitig liefert. Weiter besteht zwischen der Lösung von linearen Gleichungsystemen mittels des Matrizenkalküls und der Transformation von bilinearen (quadratischen) Formen eine überaus enge Verbindung, deren Ausserachtlassung Inkonsequenz wäre.

Zum Verständnis der Abhandlung genügt die Kenntnis der Elemente der Matrizenarithmetik.