

# KÉT VÉGÉN SZABADON FELFÜGGESZTETT GERENDA OLDALIRÁNYÚ KIHAJLÁSSAL SZEMBENI STABILITÁSÁNAK VIZSGÁLATA<sup>1</sup>

LOVASS—NAGY VIKTOR

## Összefoglalás

A szerző két végén keresztmetszetének súlypontja fölött felfüggesztett gerenda oldalirányú kihajlással szembeni stabilitását vizsgálja, azon esetben, amikor a felfüggesztési pontok a gerenda szélső keresztmetszetének egyik főinerciatengelyébe esnek, és a szélső keresztmetszeteknek saját síkjukban történő elfordulását a felfüggesztési módból kifolyólag kényszerhatás nem gátolja.

Szerző vizsgálatait azon esetekre terjeszti ki, amikor :

a) A gerendát középső keresztmetszetének súlypontjában ható függőleges irányú koncentrált erő terheli.

b) A gerendát egyenletesen megoszló, függőleges irányú erő terheli.

A levezetett eredmények megadják a felfüggesztési pontnak a szélső keresztmetszet súlypontjától mért magasságának azon minimális értékét, amelynél a gerenda oldalirányú kihajlással szembeni stabilitása biztosítva van.

Az alábbiakban vizsgáljuk valamely — két, egymásra merőleges szimmetriasíkkal bíró — gerendának (prizmatikus v. hengeres rúdnak) mind a középső keresztmetszet súlypontjában ható függőleges irányú koncentrált erő<sup>2</sup>, mind egyenletesen megoszló függőleges irányú terhelés<sup>3</sup> hatására létrejövő deformációját, azon esetben, amikor a gerenda oly módon van két végén felfüggesztve, hogy a forgást megengedő felfüggesztési pontok a szélső keresztmetszetek súlypontja fölött, valamelyik főinerciatengelyben fekszenek.<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Jelen dolgozat a Közlekedés- és Postaügyi Minisztérium XII. Tervezési Főosztályának megbízásából végzett számítások eredményeinek egy részét tartalmazza.

<sup>2</sup> Két végén befalazott derékszögű négyszög-keresztmetszetű gerendának középső keresztmetszetének súlypontjában ható koncentrált erő által előidézett kibillenését *S. Timoshenko* vizsgálta. Lásd: *S. Timoshenko*: Théorie de la Stabilité Élastique, Paris et Liège, 1947, Libraire Polytechnique, Ch. Béranger kiadása, 242. o.

<sup>3</sup> Két végén keresztmetszetének súlypontja felett felfüggesztett, egyenletesen megoszló erővel terhelt derékszögű négyszög-keresztmetszetű gerenda kibillenésével *Csonka P.* foglalkozott. Lásd: *Csonka P.*: A végein felfüggesztett négyszögkeresztmetszetű rúd stabilitása. A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei. IX. kötet. 1—4. szám.

<sup>4</sup> Számításaink nyilvánvalóan olyan gerendákra vonatkoznak, amelyek anyaga homogén, izotrop és tökéletesen rugalmas. A levezetett eredmények nem alkalmazhatók vékonyfalú szelvényrészekből összetett keresztmetszetekre, ahol az övhajlítások is figyelembeveendőek.

Az adott terhelés esetén kétféle egyensúlyi helyzet lehetséges :

1. A gerenda csak függőleges irányú lehajlást és az egyes keresztmetszetek csak a gerenda hossz tengelyére merőleges vízszintes tengely körüli elfordulást szenvednek. Ennek az egyensúlyi helyzetnek a labilis vagy stabilis volta a felfüggesztési pontok helyzetétől függ. Ha a felfüggesztési pontok helyzete olyan, amely mellett a most körülírt egyensúlyi helyzet labilis, akkor létezik egy másik, stabilis egyensúlyi helyzet is :

2. A gerenda az adott terhelés hatására mind függőleges, mind vízszintes irányban kihajlik, az egyes keresztmetszetek pedig mind a hossz tengely, mind az arra merőleges vízszintes és függőleges tengely körül is elfordulnak.

A következő számítások célját azon kérdés megválaszolása képezi, hogy vajjon lehetséges-e a gerenda felfüggesztését oly módon eszközölni, hogy a gerenda stabilis állapota az egyes pontban vázolt legyen.

*Jelölések.* Számításaink során a következő jelöléseket fogjuk alkalmazni : (lásd az ábrákat is!)

- $z$  . . . a deformálatlan súlyponti szál valamely pontjának távolsága a deformálatlan súlyponti szál középpontjától a deformálatlan súlyponti szál mentén mérve.  
 $s$  . . . a deformált súlyponti szál valamely pontjának távolsága a deformált súlyponti szál középpontjától, a deformált súlyponti szál mentén mérve.  
 $r(z)$  . . a deformálatlan súlyponti szál középpontjától a deformálatlan súlyponti szál mentén mért  $z$  távolságra lévő pont helyzetvektora.  
 $r(s)$  . . a deformált súlyponti szál középpontjától a deformált súlyponti szál mentén mért  $s$  távolságra lévő pont helyzetvektora.  
 $r_1$  . . . a lentebb értelmezendő  $Q$  erő támadási pontjának helyzetvektora.  
 $P(z)$  . . a gerendára ható (a deformálatlan súlyponti szál hosszegységére vonatkoztatott) terhelés az  $r(z)$  helyzetvektorú pontban.  
 $P(s)$  . . a gerendára ható (a deformált súlyponti szál hosszegységére vonatkoztatott) terhelés az  $r(s)$  helyzetvektorú pontban.  
 $Q$  . . . a gerenda jobb oldali végén működő koncentrált (reakció-) erő.  
 $M(z)$  . . a gerenda valamely  $z$  koordinátájú keresztmetszetétől jobbra eső (azaz  $z$ -től  $+\frac{l}{2}$ -ig terjedő) darabjára ható nyomatékvektor-eredő.  
 $M(s)$  . . a deformált gerenda valamely  $s$  koordinátájú keresztmetszetétől jobbra eső (azaz  $s$ -től  $+\frac{l}{2}$ -ig terjedő) darabjára ható nyomatékvektor-eredő.  
 $\alpha + \beta$  . . jelenti azon szöveget, amellyel az egyensúlyi helyzetben a gerenda tetszőszerinti keresztmetszetének főinerciatengelyei eredeti függőleges, illetőleg vízszintes helyzetükhöz képest a felfüggesztési pontokon át fektethető tengely körül elfordulnak.  
 $\alpha$  . . . jelenti azon (véges mértékű) szöveget, amellyel a gerenda két szélső keresztmetszetének főinerciatengelyei eredeti helyzetükhöz képest elfordulnak.  
 $\beta$  . . . jelenti azon (elsőrendűen kicsiny) szöveget, amellyel a gerenda valamely keresztmetszetének főinerciatengelyei a deformált állapotban a két szélső keresztmetszethez viszonyítva elfordulnak.

1. *Megjegyzés:* Mivel a jelenség  $\alpha$ -ban szimmetrikus,  $\alpha$  pozitív irányú tetszés szerint választható. A következő számításokban  $\alpha$ -t  $\beta$ -val megegyező irányításúnak vesszük. A  $\beta$  szög pozitív irányú megegyezik a lentebb értelmezendő  $t_0$  vektorhoz rendelt jobbcavar-iránnyal.

2. *Megjegyzés:* A gerenda 2./fajta egyensúlyi helyzetének kialakulása úgy is elképzelhető, hogy először az egész gerenda (deformálódás nélkül) elfordul a felfüggesztési pontokon átfektetett tengely körül a (véges nagyságú)  $\alpha$  szöggel, és a gerenda két végét ebben a helyzetben befalazva, a gerenda az eredetileg adott (függőleges irányú) koncentrált vagy megoszló terhelés hatá-

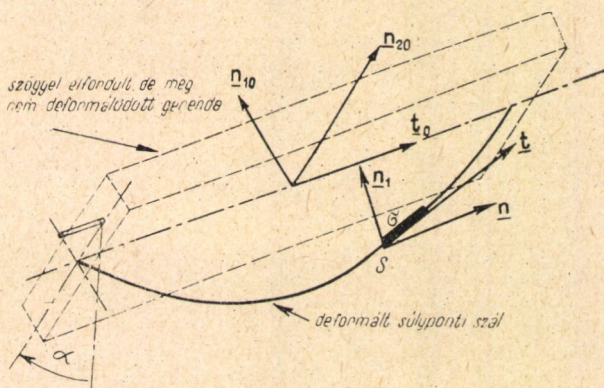
sára deformálódik, amely deformációt a fenti  $\beta$  szög, továbbá a lentebb értelmezendő  $\varphi$  és  $\psi$  szögek, valamint  $u$  és  $v$  elmozdulások jellemeznek.

$\mathbf{n}_{10}, \mathbf{n}_{20}, \mathbf{t}_0$  az  $a$  szöggel elfordult, de még nem deformálódott gerenda középső keresztmetszetének főinerciatengelyeivel és a gerenda súlyponti szálával egybeeső, az adott sorrendben jobbsavarrendszert alkotó egységvektor-hármas (lásd az 1. sz. ábrát);

$\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{t}$  a deformált gerenda valamely keresztmetszetének főinerciatengelyeivel és a deformált súlyponti szálnak az illető keresztmetszet súlypontjához tartozó érintőjével egybeeső, az adott sorrendben jobbsavarrendszert alkotó egységvektor-hármas; az alábbiakban: »kísérő triéder«<sup>5</sup>.

$\varphi$  a deformált gerenda súlyponti szála  $\mathbf{t}$  érintővektorának az  $\mathbf{n}_{10}\mathbf{t}_0$  síkra való vetületének a  $\mathbf{t}_0$  vektorral bezárt (elsőrendűen kicsiny) szöge (illetve a vetület iránytangense).

$\psi$  a deformált gerenda súlyponti szála  $\mathbf{t}$  érintővektorának az  $\mathbf{n}_{20}\mathbf{t}_0$  síkra való vetületének a  $\mathbf{t}_0$  vektorral bezárt (elsőrendűen kicsiny) szöge (illetve a vetület iránytangense).



1. ábra

3. *Megjegyzés:*  $\varphi$  ill.  $\psi$  akkor minősítendőek pozitívoknak, ha forgási irányuk megegyezik az  $\mathbf{n}_{20}$  ill.  $\mathbf{n}_{10}$  vektorhoz rendelt jobbsavar forgási irányával.

4. *Megjegyzés:* a  $\beta, \varphi$  és  $\psi$  szögek felhasználásával az  $\mathbf{n}_{10}, \mathbf{n}_{20}, \mathbf{t}_0$  »alap-triéder« és az  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{t}$  »kísérő triéder« között a következő összefüggések írhatók fel:<sup>6</sup>

$$\mathbf{n}_1 = 1 \cdot \mathbf{n}_{10} + \beta \cdot \mathbf{n}_{20} - \varphi \cdot \mathbf{t}_0$$

$$\mathbf{n}_2 = -\beta \cdot \mathbf{n}_{10} + 1 \cdot \mathbf{n}_{20} + \psi \cdot \mathbf{t}_0$$

$$\mathbf{t} = \varphi \cdot \mathbf{n}_{10} - \psi \cdot \mathbf{n}_{20} + 1 \cdot \mathbf{t}_0$$

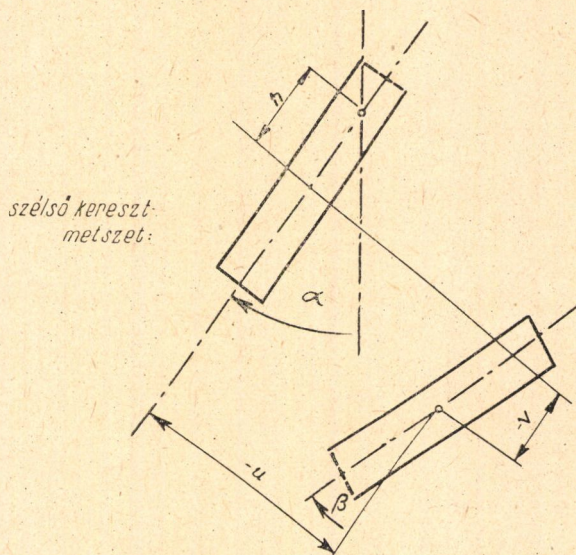
$u$  a deformált gerenda valamely keresztmetszete súlypontjának (elsőrendűen kicsiny) elmozdulása az  $a$  szöggel elfordult, de még nem deformálódott gerendában elfoglalt helyzetéhez képest, az  $\mathbf{n}_{10}$  vektorral megegyező irányban.

$v$  a deformált gerenda valamely keresztmetszete súlypontjának (elsőrendűen kicsiny) elmozdulása az  $a$  szöggel elfordult, de még nem deformálódott gerendában elfoglalt helyzetéhez képest, az  $\mathbf{n}_{20}$  vektorral megegyező irányban.

<sup>5</sup> A »kísérő triéder« kifejezését a geometriai szóhasználattól eltérően, a rugalmas rudak tárgyalásánál általában szokásos értelemben használjuk.

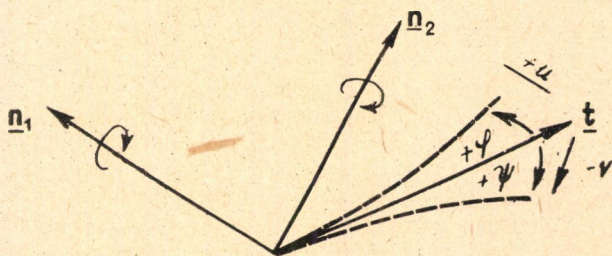
<sup>6</sup> A  $\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_{10}, \mathbf{n}_{20}$  alap-triédert a  $\mathbf{t}(z), \mathbf{n}_1(z), \mathbf{n}_2(z)$  kísérő triéderbe forgató matrixnak itt felhasznált alakja közvetlenül adódik a közismert Cayley-féle formulákból (lásd pl. M. Lagally: Vektor-Rechnung, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1928., 210. old.), ha a végtelen kis forgásnak megfelelően az ott szereplő paraméternek csupán első hatványait tartjuk meg.

5. *Megjegyzés:* az  $u$  illetve  $v$  elmozdulást akkor minősítjük pozitívnak, ha az megegyező irányú az  $\mathbf{n}_{10}$ , illetve az  $\mathbf{n}_{20}$  vektorral.



2. ábra

6. *Megjegyzés:* Minthogy feltevésünk szerint a gerenda  $\alpha$  szöggel elfordult, de még nem deformálódott helyzetétől számított  $\mathbf{n}_{10} \cdot u + \mathbf{n}_{20} \cdot v$



3. ábra

deformációs elmozdulás elsőrendűen kicsiny, továbbá  $\mathbf{t}_0$  irányú elmozdulás nincs, másodrendű kicsinyektől eltekintve írhatjuk, hogy :

$$s = z$$

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(z)$$

$$\left| \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}(z)}{dz} \right| = 1.$$

$$\text{Továbbá: } \varphi = \frac{du}{dz} \text{ és } \psi = \frac{dv}{dz}.$$

(Tehát, amint azt a 3. sz. ábrán is feltüntettük, pozitív  $u$ -hoz pozitív  $\varphi$ , pozitív  $v$ -hez negatív  $\psi$  tartozik.)

### *A folyamatot leíró differenciálegyenletek megszerkesztése*

A folyamatot leíró differenciálegyenletek megszerkesztése végett elegendő a gerenda egy tetszőleges darabjára (pl. a szilárdságtanban szokásos módon a gerenda valamely kiválasztott keresztmetszetétől jobbra eső — azaz  $z$ -től  $\pm \frac{l}{2}$ -ig terjedő — gerendadarabra) ható nyomatékvektor-eredőnek

$[\mathbf{M}(s) = \mathbf{M}(z)$ -nek] az egyensúly fennállása esetén való eltűnését felhasználni. (Ugyanis a gerendára ható erők egyensúlyban vannak.)

A fentebb bevezetett jelölések, valamint az 1. sz. ábra figyelembevételével:

$$(1) \quad \mathbf{M}(s) = \int_s^{\frac{l}{2}} [\mathbf{r}(\sigma) - \mathbf{r}(s)] \times \mathbf{P}(\sigma) \cdot |\dot{\mathbf{r}}(\sigma)| d\sigma + [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}(s)] \times \mathbf{Q}$$

ebből (a 6. Megjegyzésben foglaltak alapján) nyerjük, hogy:

$$(2) \quad \mathbf{M}(z) = \int_z^{\frac{l}{2}} [\mathbf{r}(\zeta) - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{P}(\zeta) d\zeta + [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{Q}$$

ahol:

$$\mathbf{r}(z) = n_{10} u(z) + n_{20} v(z) + \mathbf{t}_0 z$$

Annak érdekében, hogy az elemi rúd-elmélet három alap-differenciálegyenletét felírhassuk, a fenti vektoriális alakban megadott  $\mathbf{M}(z)$  nyomatékvektor-eredőnek a deformált gerendán kiválasztott valamely keresztmetszet főinerciatengelyei és a deformált súlyponti szál érintője által alkotott  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{t}$  «kísérő-triéder» egységvektorokra való vetületeit kell képezni.

Ily módon az egyensúly feltételeként azt nyerjük, hogy:

$$(3) \quad \begin{aligned} B_2 \frac{d\psi}{dz} &= \mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{n}_1 \\ B_1 \frac{d\varphi}{dz} &= \mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{n}_2 \\ C \frac{d\beta}{dz} &= \mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{t} \end{aligned}$$

A (3) egyenletrendszerből (a 4. és 6. Megjegyzésekben foglaltak figyelembevételével) az alábbi egyenletrendszerre<sup>7</sup> jutunk :

$$(4) \quad \begin{aligned} B_2 \frac{dv^2}{dz^2} &= - \mathbf{M}(z) \cdot \left( \mathbf{n}_{10} + \beta(z) \cdot \mathbf{n}_{20} - \frac{du(z)}{dz} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \\ B_1 \frac{d^2u}{dz^2} &= \mathbf{M}(z) \cdot \left( -\beta(z) \cdot \mathbf{n}_{10} + \mathbf{n}_{20} - \frac{du(z)}{dz} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \\ C \frac{d\beta}{dz} &= \mathbf{M}(z) \cdot \left( \frac{du(z)}{dz} \cdot \mathbf{n}_{10} + \frac{dv(z)}{dz} \cdot \mathbf{n}_{20} + \mathbf{t}_0 \right). \end{aligned}$$

### I.

(A középső keresztmetszetének súlypontjában ható  $P$  koncentrált erővel terhelt gerenda vizsgálata.)

Ha a gerendát csak középső keresztmetszetének súlypontjában ható (függőleges irányú)  $P$  koncentrált erő terheli, akkor elegendő vizsgálatainkkal

a  $0 \leq z \leq \frac{l}{2}$  szakaszra szorítkoznunk. E szakasz bármely helyén :

$$\mathbf{M}(z) = [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{Q}$$

ahol :

$$\mathbf{r}(z) = \mathbf{n}_{10} \cdot u(z) + \mathbf{n}_{20} \cdot v(z) + \mathbf{t}_0 \cdot z; \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{n}_{20}h + \mathbf{t}_0 \frac{l}{2}$$

<sup>7</sup> A (4) egyenletrendszerben  $B_1$  és  $B_2$  a gerenda fő hajlítási szilárdságait,  $C$  pedig a torziós szilárdságot jelentik :

$$B_1 = J_1 \cdot E \quad \text{és} \quad B_2 = J_2 \cdot E$$

(ahol  $J_1$  és  $J_2$  a gerenda keresztmetszet főinercianyomatékai az 1, illetve 2 jelű tengelyekre és  $E$  a rugalmassági modulus), továbbá :

$$C = J_3 \cdot G$$

(ahol  $J_3$  a gerenda-keresztmetszet torziós nyomatéka és  $G$  a torziós modulus). A főinercianyomatékok meghatározása közismert módon történik. A torziós nyomaték meghatározását illetőleg lásd pl. : *A. E. H. Love* : Lehrbuch der Elastizität, Teubner, Leipzig und Berlin, 1907, 375 o., továbbá : *H. Geiger* und *K. Scheel* : Handbuch der Physik, Band VI, Berlin 1928., J. Springer kiadása, 151. o.

Pl. »a« alappal és »b« magassággal bíró négyszögkeresztmetszetű tartó esetén

$$J_1 = \frac{ab^3}{12}; \quad J_2 = \frac{ab^3}{12}.$$

$J_3$  értéke csak végtelen sor alakban állítható elő ; keskeny  $\left(\frac{a}{b} < \frac{1}{3}\right)$  tartóknál :

$$J_3 \cong \frac{a^3b}{3} \left(1 - 0,63 \frac{a}{b}\right).$$

(Lásd pl. a Handbuch der Physik idézett VI. kötetének 153. oldalán.)

és

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n}_{10} \cdot \frac{P}{2} \sin \alpha + \mathbf{n}_{20} \frac{P}{2} \cos \alpha,$$

tehát:

$$\mathbf{M}(z) = \frac{P}{2} \left\{ -\mathbf{n}_{10} \left( \frac{l}{2} - z \right) \cos \alpha + \mathbf{n}_{20} \left( \frac{l}{2} - z \right) \sin \alpha - \right. \\ \left. - \mathbf{t}_0 [u(z) \cos \alpha + (h - v(z)) \sin \alpha] \right\},$$

Az  $\mathbf{M}(z)$  így nyert kifejezését a (4) egyenletrendszerbe helyettesítve, nyerjük, hogy:<sup>8</sup>

$$(4.1) \quad \begin{aligned} B_2 \frac{d^2 v}{dz^2} &= \frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} - z \right) (\cos \alpha - \beta \sin \alpha) \\ B_1 \frac{d^2 u}{dz^2} &= \frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} - z \right) (\beta \cos \alpha + \sin \alpha) \\ C \frac{d\beta}{dz} &= \frac{P}{2} \left[ \left( \frac{l}{2} - z \right) \left( -\frac{du}{dz} \cos \alpha + \frac{dv}{dz} \sin \alpha \right) - u \cos \alpha + (v - h) \sin \alpha \right]. \end{aligned}$$

A (4.1) egyenletrendszer harmadik egyenletét  $z$  szerint differenciálva és az így nyert egyenletben  $\frac{d^2 u}{dz^2}$  és  $\frac{d^2 v}{dz^2}$  értékét az első két egyenletből nyerhető kifejezésekkel helyettesítve, azt kapjuk, hogy:

$$C \frac{d^2 \beta}{dz^2} = \left[ \frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} - z \right) \right]^2 \left[ -\frac{B_1 \sin^2 \alpha + B_2 \cos^2 \alpha}{B_1 B_2} \beta + \frac{B_1 - B_2}{B_1 B_2} \frac{\sin 2\alpha}{2} \right].$$

Tehát  $\beta$  meghatározására a következő differenciálegyenlet adódik:

$$\begin{aligned} \left( \frac{l}{2} \right)^2 \frac{d^2 \beta}{dz^2} + \gamma \left| l - \frac{z}{\left( \frac{l}{2} \right)} \right|^2 \beta &= \delta \left| l - \frac{z}{\left( \frac{l}{2} \right)} \right|^2 \\ \gamma &= \left( \frac{l}{2} \right)^4 \frac{P^2}{4B_1 B_2 C} (B_1 \sin^2 \alpha + B_2 \cos^2 \alpha) \\ \delta &= \left( \frac{l}{2} \right)^4 \frac{P^2}{4B_1 B_2 C} (B_1 - B_2) \frac{\sin 2\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Bevezetve a  $w = l - \frac{z}{\left( \frac{l}{2} \right)}$  új változót, az (5.1) egyenlet

$$(6.1) \quad \frac{d^2 \beta}{dw^2} + \gamma w^2 \beta = \delta w^2$$

<sup>8</sup> A másodrendű kicsiny tagoktól eltekintve, továbbá a  $h \frac{du}{dz}$  ill.  $h \frac{dv}{dz}$  értékeket az  $\frac{l}{2} - z$  értékhez képest elhanyagolva.

alakban írható<sup>9</sup>. Ennek a közönséges, lineáris, változó együtthatós, másodrendű, inhomogén differenciálegyenletnek általános megoldása :<sup>10</sup>

$$\beta(w) = \frac{\delta}{\gamma} + A \left( 1 - \frac{\delta}{3 \cdot 4} w^4 + \frac{\gamma^2}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} w^8 - + \dots \right) + \\ + B \left( w - \frac{\gamma}{4 \cdot 5} w^5 + \frac{\gamma^2}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} w^9 - + \dots \right).$$

Mint hogy a  $z = \frac{l}{2}$  azaz  $w = 0$  helyen  $\beta = 0$  (a  $\beta$  szög értelmezéséből következőleg) tehát A-ra azt nyerjük, hogy :

$$A = -\frac{\delta}{\gamma}.$$

Mint hogy továbbá a  $z = 0$  azaz  $w = 1$  helyen :  $\frac{d\beta}{dw} = 0$  (ugyanis, ha a  $P$  erő a rúd szimmetriasíkjában hat, akkor  $[\mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{t}]_{z=0} = 0$ ), tehát B-re az adódik, hogy :

$$B = \frac{\delta}{\gamma} \frac{-\frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma^2}{3 \cdot 4 \cdot 7} - + \dots}{1 - \frac{\gamma}{4} + \frac{\gamma^2}{4 \cdot 5 \cdot 8} - + \dots}$$

A további tárgyalás során szorítkozunk arra az esetre, amidőn  $\gamma$ -nak magasabb hatványai az elsőhöz képest elhanyagolhatóak. Ez esetben :

$$B = -\frac{\delta}{3} \frac{1 - \frac{\gamma}{4 \cdot 7}}{1 - \frac{\gamma}{4}} = -\frac{\delta}{3} \left( 1 + \frac{3}{14} \gamma \right)$$

és így (a  $\gamma$  egynél magasabbfokú hatványait elhanyagolva) nyerjük, hogy :

$$\beta(w) = \frac{\delta}{3} \left[ -w + \frac{w^4}{4} + \frac{\gamma}{4} \left( -\frac{6}{7} w + \frac{w^5}{5} - \frac{w^8}{56} \right) \right].$$

<sup>9</sup> Amennyiben — pl. a gerenda két végének befalazásával — biztosítjuk, hogy az  $\alpha$  szög azonosan zérus legyen, a (6.1) egyenletből a Timoshenko által levezetett egyenletre jutunk. Lásd *S. Timoshenko* idézett munkáját, 243. o., (d) jelű egyenlet.

<sup>10</sup> A fenti (6.1) differenciálegyenlet megoldása Bessel-függvények alkalmazásával is történhetik. Lásd : *Jahnke—Emde* : *Tafeln höherer Funktionen*, Leipzig, 1952. Teubner-kiadás, 150. o.



A  $\beta(w)$  függvény birtokában meghatározhatók az  $u$  és  $v$  elmozdulások, mint  $w$  függvényei. Ugyanis — a (4.1) egyenletrendszer első két egyenletéből — adódik, hogy :

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1}{B_1} \frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} - z \right) (\beta \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{1}{B_2} \frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} - z \right) (-\beta \sin \alpha + \cos \alpha),$$

ebből, bevezetve a  $w = 1 - \frac{z}{(l/2)}$  új független változót, nyerjük, hogy :

$$(8.1) \quad \frac{d^2u}{dw^2} = \frac{1}{B_1} \frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} \right)^3 (w\beta \cos \alpha + w \sin \alpha)$$

$$\frac{d^2v}{dw^2} = \frac{1}{B_2} \frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} \right)^3 (-w\beta \sin \alpha + w \cos \alpha).$$

A (8.1) egyenletrendszerből [ $\beta(w)$  fenti képletét behelyettesítve és kétszer integrálva] adódik, hogy :

$$u(w) = \frac{1}{B_1} \varepsilon \left[ \Phi(w) \cos \alpha + \frac{w^3}{6} \sin \alpha + C_1 w + C_2 \right]$$

$$v(w) = \frac{1}{B_2} \varepsilon \left[ -\Phi(w) \sin \alpha + \frac{w^3}{6} \cos \alpha + C_3 w + C_4 \right],$$

ahol :

$$\varepsilon = \frac{Pl^3}{16}$$

és

$$\Phi(w) = \int_0^w \left[ \int_0^w w\beta(w) dw \right] dw =$$

$$= \frac{\delta}{3} \left[ -\frac{w^4}{3 \cdot 4} + \frac{w^7}{4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{\gamma}{4} \left( -\frac{6w^4}{3 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{w^8}{5 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{w^{11}}{56 \cdot 10 \cdot 11} \right) \right]$$

Mint hogy a  $z = \frac{l}{2}$  azaz  $w = 0$  helyen  $u = 0$  és  $v = 0$ , tehát :

$$C_2 = C_4 = 0.$$

Mint hogy továbbá a  $z = 0$  azaz  $w = 1$  helyen  $\frac{du}{dw} = \frac{dv}{dw} = 0$ , tehát :

$$C_1 = -\Phi'(1) \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha$$

$$C_2 = +\Phi'(1) \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha$$

és így  $u$ -ra és  $v$ -re azt nyerjük, hogy :

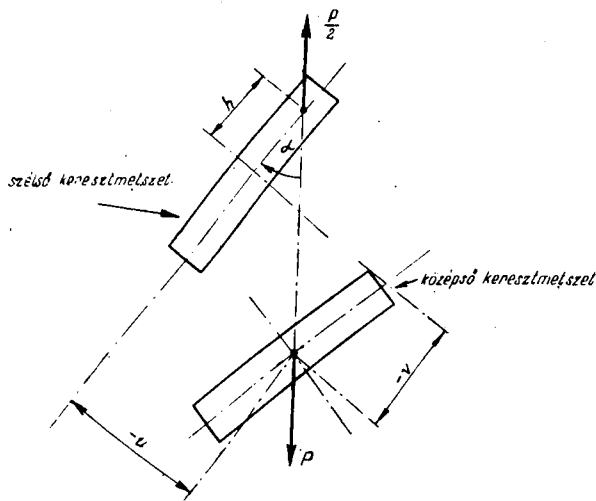
$$u(w) = \frac{\varepsilon}{B_1} \left\{ [\Phi(w) - \Phi'(1) \cdot w] \cos \alpha + \left| \frac{w^3}{6} - \frac{1}{2} \cdot w \right| \sin \alpha \right\}$$

$$v(w) = \frac{\varepsilon}{B_2} \left\{ -[\Phi(w) - \Phi'(1) \cdot w] \sin \alpha + \left| \frac{w^3}{6} - \frac{1}{2} \cdot w \right| \cos \alpha \right\}$$

A  $\Phi(w)$  fenti kifejezéséből adódik, hogy :

$$\Phi'(1) = -\frac{\delta}{3} \left( \frac{7}{24} + \frac{29}{448} \gamma \right).$$

A  $\beta(w)$ ,  $u(w)$  és  $v(w)$  függvények ismeretében felírhatjuk az  $\alpha$  szög és a felfüggesztési pontnak a súlyponttól mért  $h$  távolsága közt egyensúly



4. ábra

esetén fennálló összefüggést. Abból a követelményből, hogy a két felfüggesztési ponton át fektetett forgástengely körüli nyomaték az elfordulást megengedő

felfüggesztés esetén a gerenda egyensúlyi helyzetében szükségképpen nullával egyenlő, nyerjük (a 4. sz. ábra figyelembevételével) hogy <sup>11</sup>:

$$\frac{-u(1)}{-v(1) + h} = \operatorname{tg} \alpha$$

tehát, egyensúly esetén :

$$\frac{\frac{\varepsilon}{B_1} \left\{ [\Phi(1) - \Phi'(1)] \cos \alpha + \left| \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right| \sin \alpha \right\}}{\frac{\varepsilon}{B_2} \left\{ -[\Phi(1) - \Phi'(1)] \sin \alpha + \left| \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right| \cos \alpha \right\} - h} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Mint ahogy :

$$\Phi(1) = -\frac{\delta}{3} \left| \frac{13}{168} + \frac{419}{24640} \gamma \right|,$$

tehát egyensúly esetén az  $\alpha$  szög és  $h$  között a következő összefüggés adódik :

$$\frac{\frac{1}{B_1} \frac{P l^3}{16} \left\{ \frac{3}{14} + \frac{21}{440} \gamma \right\} \cdot \frac{l^4}{16} \cdot \frac{P^2}{4B_1 B_2 C} (B_1 - B_2) \sin \alpha \cos^2 \alpha - \frac{1}{3} \sin \alpha}{\frac{1}{B_2} \frac{P l^3}{16} \left\{ \frac{3}{14} + \frac{21}{440} \gamma \right\} \cdot \frac{l^4}{16} \cdot \frac{P^2}{4B_1 B_2 B} (B_1 - B_2) \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{1}{3} \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

A kapott egyenlet magában foglalja mind a triviális  $\alpha = 0$ , mind az esetleg létező nem-triviális egyensúlyi helyzetet. Ha az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk a triviális egyensúlyi helyzetnek megfelelő  $\sin \alpha$  tényezővel, akkor megkapjuk azt az egyenletet, mely *valós gyök esetén* a nem-triviális stabilis egyensúlyi helyzetet szolgáltatja. Ha most már a felfüggesztési pontnak a szélső keresztmetszet súlypontja feletti  $h$  magasságának azon *minimális* értékét keressük, amely mellett a kibillenés lehetősége ki van zárva, vagyis a gerenda csak függőleges lehajlást szenved, akkor tehát az  $\alpha = 0$ , azaz  $\cos \alpha = 1$ , és ennek következtében valamennyi keresztmetszetre:  $\beta = 0$ , akkor a  $\sin \alpha$ -val végigosztott fenti egyenletben  $\alpha$  helyébe nullát, azaz  $\cos \alpha$  helyébe egyet helyettesítve és az egyenletet  $h$ -ra megoldva, nyerjük, hogy :

$$h_{\min} = \frac{P l^3}{48} \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \left( 1 + \left| \frac{3}{14} - \frac{21}{440} \gamma_0 \right| \frac{l^4}{16} \frac{P^2}{4B_1 C} \right)$$

<sup>11</sup> Figyelembeveendő, hogy az  $u$ -t és  $v$ -t szolgáltató képletek a lehajlásokra — a koordinátatengelyek irányítása következtében — negatív értéket adnak.

ahol  $\gamma_0$  jelenti a  $\gamma$ -ból  $\alpha = 0$  helyettesítéssel nyert kifejezést :

$$\gamma_0 = \frac{l^4}{16} \cdot \frac{P^2}{4B_1 B_2 C} B_2 = \frac{l^4}{16} \frac{P^2}{4B_1 C}.$$

Innen a szegletes zárójelben lévő második tagnak elhanyagolásával

$$h_{\min} = \frac{Pl^3}{48} \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \left( 1 + \frac{3}{14} \cdot \frac{l^4}{16} \frac{P^2}{4B_1 C} \right).$$

Azon esetben, ha a C csavarószilárdság »végtelen nagy«-nak tekinthető, írhatjuk, hogy :

$$h_{\min} = \frac{Pl^3}{48} \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} = \frac{Pl^3}{48B_1} \left( 1 - \frac{B_1}{B_2} \right).$$

Végül, ha a  $\frac{B_1}{B_2}$  érték az egységhez képest elhanyagolható és egyszersmind a C csavarószilárdság is »végtelen nagy«-nak tekinthető, a  $h_{\min}$ -ra a következő — elemi mechanikai úton is megkapható — egyszerű képletet nyerjük :

$$h_{\min} = \frac{Pl^3}{48B}.$$

## II.

(A hosszegységenként  $p$  nagyságú egyenletesen megoszló erővel terhelt gerenda vizsgálata.)

Amennyiben a gerendát  $p$  nagyságú (hosszegységre vonatkoztatott) egyenletesen megoszló erő terheli, akkor a gerenda bármely helyén :

$$\mathbf{M}(z) = \int_z^{\frac{l}{2}} [\mathbf{r}(\zeta) - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{P}(\zeta) d\zeta + [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{Q},$$

ahol :

$$\mathbf{r}(z) = \mathbf{n}_{10} u(z) + \mathbf{n}_{20} v(z) + \mathbf{t}_0 z; \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{n}_{20} h + \mathbf{t}_0 \frac{l}{2},$$

továbbá

$$\mathbf{P}(z) = -(\mathbf{n}_{10} p \sin \alpha + \mathbf{n}_{20} p \cos \alpha)$$

és

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n}_{10} p \frac{l}{2} \sin \alpha + \mathbf{n}_{20} p \frac{l}{2} \cos \alpha,$$

tehát :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(z) = & -p \int_z^{\frac{l}{2}} \{ \mathbf{t}_0 [(u(\xi) - u(z)) \cos \alpha - (v(\xi) - v(z)) \sin \alpha] + \\ & + \mathbf{n}_{20} (\zeta - z) \sin \alpha + \mathbf{n}_{10} (\zeta - z) \cos \alpha \} d\zeta + \\ & + p \frac{1}{2} \left( -\mathbf{n}_{10} \left( \frac{l}{2} - z \right) \cos \alpha + \mathbf{n}_{20} \left( \frac{l}{2} - z \right) \sin \alpha - \right. \\ & \left. - \mathbf{t}_0 [u(z) \cos \alpha + (h - v(z)) \sin \alpha] \right). \end{aligned}$$

Az  $\mathbf{M}(z)$  így nyert kifejezését a (4) egyenletrendszerbe helyettesítve nyerjük, hogy :

$$\begin{aligned} (4.2) \quad B_2 \frac{d^2 v}{dz^2} &= \frac{p}{2} \left[ \left( \frac{l}{2} \right)^2 - z^2 \right] (\cos \beta - \alpha \sin \alpha) \\ B_1 \frac{d^2 u}{dz^2} &= \frac{p}{2} \left[ \left( \frac{l}{2} \right)^2 - z^2 \right] (\sin \alpha + \beta \cos \alpha) \\ C \frac{d\beta}{dz} &= p \left( -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{l}{2} \right)^2 - z^2 \right] \left[ \frac{du(z)}{dz} \cos \alpha - \frac{dv(z)}{dz} \sin \alpha \right] - \right. \\ & \quad \left. - z [u(z) \cos \alpha + (h - v(z)) \sin \alpha] + \right. \\ & \quad \left. + \cos \alpha \int_{l/2}^z u(\xi) d\xi - \sin \alpha \int_{l/2}^z (h - v(\xi)) d\xi. \right. \end{aligned}$$

A (4.2) egyenletrendszer harmadik egyenletét  $z$  szerint differenciálva és az így nyert egyenletben  $\frac{d^2 u}{dz^2}$  és  $\frac{d^2 v}{dz^2}$  értékét az első két egyenletből nyerhető kifejezésekkel helyettesítve, azt kapjuk, hogy :

$$C \frac{d^2 \beta}{dz^2} = \left( \frac{p}{2} \left[ \left( \frac{l}{2} \right)^2 - z^2 \right] \right)^2 \left( -\frac{B_1 \sin^2 \alpha + B_2 \cos^2 \alpha}{B_1 B_2} + \frac{B_1 - B_2}{B_1 B_2} \frac{\sin 2\alpha}{2} \right).$$

Tehát ez esetben a  $\beta$  meghatározására a következő differenciálegyenlet adódik<sup>12</sup> :

$$\begin{aligned} (5.2) \quad \left( \frac{l}{2} \right)^2 \frac{d^2 \beta}{dz^2} + \gamma \left[ 1 - \frac{z^2}{\left( \frac{l}{2} \right)^2} \right]^2 \beta &= \delta \left[ 1 - \frac{z^2}{\left( \frac{l}{2} \right)^2} \right]^2 \\ \gamma &= \left( \frac{l}{2} \right)^6 \frac{p^2}{4B_1 B_2 C} (B_1 \sin^2 \alpha + B_2 \cos^2 \alpha) \\ \delta &= \left( \frac{l}{2} \right)^6 \frac{p^2}{4B_1 B_2 C} (B_1 - B_2) \frac{\sin 2\alpha}{2}. \end{aligned}$$

<sup>12</sup> Amennyiben az  $\alpha$  szög azonosan zérus, a (6.2) egyenletből a Csonka P. idézett munkájában levezetett (8) jelű egyenletet kapjuk.

Bevezetve a  $\zeta = \frac{z}{(l/2)}$  új változót, a következő közönséges, lineáris, változó együtthatós, másodrendű, inhomogén differenciálegyenletet nyerjük ;

$$(6.2) \quad \frac{d^2\beta}{d\zeta^2} + \gamma(1-\zeta^2)^2\beta = \delta(1-\zeta^2)^2.$$

E differenciálegyenlet általános megoldása nyilván

$$\beta(\zeta) = \frac{\delta}{\gamma} + A(1 + C_2\zeta^2 + C_4\zeta^4 + \dots) + B(\zeta + C_3\zeta^3 + C_5\zeta^5 + \dots)$$

alakú. Tekintettel a gerenda deformációjának szimmetrikus voltára, ez esetben  $B = 0$ , továbbá, minthogy a  $z = \frac{l}{2}$  azaz  $\zeta = 1$  helyen (a  $\beta$  szög definíciójából következőleg)  $\beta = 0$ , tehát :

$$A = \frac{-\delta}{\gamma} \frac{1}{1 + C_2 + C_4 + \dots}$$

és így :

$$\beta(\zeta) = \frac{\delta}{\gamma} \left( 1 - \frac{1 + C_2\zeta^2 + C_4\zeta^4 + \dots}{1 + C_2 + C_4 + \dots} \right)$$

A  $c_2, c_4, c_6, \dots$  együtthatók a homogén egyenletből, a »határozatlan együtthatók módszeré«-vel nyerhetők :

$$C_2 = -\frac{\gamma}{2!}$$

$$C_4 = \frac{4\gamma + \gamma^2}{4!}$$

$$C_6 = -\frac{24\gamma + 10\gamma^2 + \gamma^3}{6!}$$

$$C_8 = \frac{624\gamma^2 + 40\gamma^3 + \gamma^4}{8!}$$

.....

A megoldást szolgáltató hatványsor  $c_{2n}$  együtthatóinak bonyolultságára való tekintettel szorítkozzunk arra az esetre, amikor  $\gamma$ -nak egynél magasabb hatványai az elsőhöz képest elhanyagolhatók. Ily módon :

$$\beta(\zeta) = \frac{\delta}{30} (1 - \zeta^2) (11 - 4\zeta^2 + \zeta^4) = \frac{\delta}{30} (11 - 15\zeta^4 + 5\zeta^3 - \zeta^6).$$

A (4.2) egyenletrendszerből —  $\beta$  fenti értékét behelyettesítve és kétszer integrálva — azt nyerjük, hogy :

$$u(\zeta) = \frac{1}{B_1} \eta \left[ \psi(\zeta) \cos \alpha + \left( \frac{\zeta^2}{1 \cdot 2} - \frac{\zeta^4}{3 \cdot 4} \right) \sin \alpha + C_1 \zeta + C_2 \right]$$

$$v(\zeta) = \frac{1}{B_2} \eta \left[ -\psi(\zeta) \sin \alpha + \left( \frac{\zeta^2}{1 \cdot 2} - \frac{\zeta^4}{3 \cdot 4} \right) \cos \alpha + C_3 \zeta + C_4 \right],$$

ahol :

$$\eta = \frac{pl^4}{32},$$

továbbá :

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \int_0^\zeta \left[ \int_0^\zeta \zeta \beta(\zeta) d\zeta \right] d\zeta = \\ &= \frac{\delta}{30} \left( \frac{11}{1 \cdot 2} \zeta^2 - \frac{26}{3 \cdot 4} \zeta^4 + \frac{20}{5 \cdot 6} \zeta^6 - \frac{6}{7 \cdot 8} \zeta^8 + \frac{1}{9 \cdot 10} \zeta^{10} \right). \end{aligned}$$

Mint hogy  $u(\zeta)$  és  $v(\zeta)$  szükségképpen páros függvények,  $C_1 = C_3 = 0$  ; továbbá, mivel a  $\zeta = 1$  (azaz :  $z = \pm \frac{l}{2}$  helyen  $u = v = 0$ , tehát :

$$C_2 = - \left[ \psi(1) \cdot \cos \alpha + \frac{5}{12} \sin \alpha \right]$$

$$C_4 = - \left[ -\psi(1) \cdot \sin \alpha + \frac{5}{12} \cos \alpha \right].$$

A  $\psi(\xi)$  fenti kifejezéséből :

$$\psi(1) = \frac{\delta}{30} \cdot \frac{4919}{1260}.$$

Mivel a tartó csak akkor lehet egyensúlyban, ha a felfüggesztési pontokon átfektetett forgástengely körüli forgatónyomatékok összege az egész tartóra nullával egyenlő, tehát egyensúly esetén :

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left[ pu \cos \alpha - p(v-h) \sin \alpha \right] dz = 0.$$

Az így nyert egyenletet  $h$ -ra megoldva nyerjük, hogy :

$$h = \frac{\sin \alpha \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} v(z) dz - \cos \alpha \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} u(z) dz}{l \sin \alpha} =$$

$$= \frac{\left(\frac{l}{2}\right) \sin \alpha \int_{-1}^{+1} v(\zeta) d\zeta - \left(\frac{l}{2}\right) \cos \alpha \int_{-1}^{+1} u(\zeta) d\zeta}{2 \left(\frac{l}{2}\right) \sin \alpha}.$$

Az integrálásokat elvégezve, a  $\gamma$  magasabbfokú hatványaira vonatkozó elhanyagolással, nyerjük, hogy :

$$h = \frac{\sin \alpha \cos \alpha \frac{pl^4}{32} \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \left[ \frac{8}{15} + 0,16 \frac{p^{2/6}}{64} \frac{B_2 \cos \alpha + B_1 \sin^2 \alpha}{4 B_1 B_2 C} \right]}{2 \sin \alpha}.$$

Ez az egyenlet magában foglalja mind a stabilis, mind pedig a labilis egyensúlyi állapot lehetőségét. Ha az egyenlet jobboldalán álló tört számlálóját és nevezőjét elosztjuk  $\sin \alpha$ -val, nyerjük a stabilis egyensúlyi állapot fennállásának feltételét :

$$h = \cos \alpha \frac{pl^4}{64} \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \left[ \frac{8}{15} + 0,16 \frac{p^{2/6}}{64} \frac{B_2 \cos \alpha + B_1 \sin^2 \alpha}{4 B_1 B_2 C} \right].$$

Amennyiben a felfüggesztési pontnak a szélső keresztmetszet súlypontja feletti  $h$  magasságának azon minimális értékét ( $h_{\min}$ -ot) keressük, amely mellett az adott méretű és terhelésű gerenda csak függőleges irányú lehajlást szenved, tehát  $\alpha = 0$  és ebből következőleg valamennyi keresztmetszetre  $\beta = 0$ , akkor a fenti egyensúlyi egyenletbe  $\alpha$  helyébe nullát írva nyerjük, hogy :

$$h_{\min} = \frac{pl^4}{64} \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \left[ \frac{8}{15} + 0,16 \frac{p^{2/6}}{64} \frac{1}{4 B_1 C} \right].$$

Abban az esetben, ha a gerenda  $C$  csavarószilárdsága »végtelen nagy«-nak tekinthető, írhatjuk, hogy :

$$h_{\min} = \frac{pl^4}{120} \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} = \frac{p^{2/6}}{120 B_1} \left( 1 - \frac{B_1}{B_2} \right).$$



Végül, ha a gerenda méretei olyanok, hogy a  $\frac{B_1}{B_2}$  érték az egységhez képest elhanyagolható, és egyszersmind a C csavarószilárdság értéke is végtelen nagyra tekinthető, a  $h_{\min}$ -ra a következő — elemi mechanikai számítással is nyerhető — egyszerű képletet nyerjük :

$$h_{\min} = \frac{pl^4}{120B_1}.$$

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО БОКОВОГО ИЗГИБА БАЛКИ, ПОДВЕШЕННОЙ НА ДВУХ КОНЦАХ НАД ЦЕНТРОМ ТЯЖЕСТИ ЕЕ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В. Ловашш-Надь

### Резюме

Автор исследует устойчивость балки, подвешенной на двух концах над центром тяжести ее поперечного сечения, относительно бокового изгиба в случае, когда точки подвеса попадают на одну из осей инерции краевого сечения балки, и принудительный эффект системы подвеса не тормозит поворот краевых сечений в своих плоскостях.

Автор исследует те случаи, когда :

а) Сосредоточенная сила вертикального направления приложена к балке в центре тяжести ее среднего поперечного сечения.

б) К балке приложена равномерно распределенная, сосредоточенная сила вертикального направления.

Выведенные результаты дают минимальное значение высоты точки подвеса от центра тяжести краевого поперечного сечения, необходимое для обеспечения устойчивости балки по отношению к боковому изгибу.

## UNTERSUCHUNG DER STABILITÄT EINES AN DEN ZWEI ENDEN ÜBER DEM SCHWERPUNKT DES QUERSCHNITTS AUFGEHÄNGTEN BALKENS GEGENÜBER SEITWÄRTSAUSBIEGUNGEN

V. LOVASS-NAGY

### Zusammenfassung

Es wird die Stabilität eines an den zwei Enden über dem Schwerpunkt des Querschnitts aufgehängten Balkens untersucht im Falle, wenn die Aufhängpunkte in eine Hauptträgheitsachse des Querschnitts des Balkens fallen, und die Verdrehung der Querschnitte in ihrer Ebene durch keine Zwangskräfte gehindert wird.

Es werden folgende Fälle behandelt :

a) Auf den Balken wirkt in der Mitte im Schwerpunkt des Querschnitts eine senkrechte konzentrierte Kraft.

b) Auf den Balken wirkt eine gleichmässig verteilte Kraft.

Die abgeleiteten Ergebnisse ergeben den minimalen Abstand der Aufhängpunkte vom Schwerpunkt, bei dem die Stabilität des Balkens gegenüber seitwertigen Ausbiegungen gesichert ist.