

ELASZTIKUSAN KAPCSOLT KORPUSZKULÁRIS RENDSZEREK KIS REZGÉSEINEK VIZSGÁLATA MATRIXSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSÁVAL

RÓZSA PÁL

Összefoglalás

Szerző azt kívánja megmutatni, hogy korpuzskuláris rendszerek kis rezgéseinek vizsgálatánál milyen lényeges előnyöket biztosít a formális és numerikus számítás igényeinek megfelelően kiépített matrixszámítás alkalmazása. Egy \mathbf{A} matrix analitikus függvényének az 1. §-ban ismertetett definíciója révén értelmezni tudjuk matrixokra az $e^{\mathbf{A}t} \sin \mathbf{A}t$, $\cos \mathbf{A}t$, stb. függvényeket, melyek állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletrendszerek revolvens matrixait képezik. $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ esetén a formulák automatikusan szolgáltatják \mathbf{A} matrix kanonikus felbontását, amely szimmetrikus matrix esetén azonos kvadratikus alakoknak négyzetösszegbe való transzformálásával, illetve mechanikai problémák esetén normálkoordináták bevezetésével. A 2. §-ban váltakozó tömegű tömegpontokkal bíró korpuzskuláris húrmodell szabad és gerjesztett rezgéseit, a 3. §-ban pedig egy súrlódás nélküli hengeren köralakban elhelyezett korpuzskuláris rendszer rezgéseit tárgyaljuk. Ez példa arra az általánosabb és bonyolultabb esetre, midőn a differenciálegyenletrendszert meghatározó matrixnak kétszeres sajátértékei vannak. A 4. §-ben ismertetjük korpuzskuláris rendszerek energiájának növekedését periodikusan ismétlődő, egyenlő nagyságú impulzusok hatására.

Bevezetés

Jelen referátum olyan korpuzskuláris rendszerek rezgéseinek vizsgálatát tartalmazza, melyeknek közös tulajdonsága, hogy az egyes tömegpontok egymással tömegtelen, rugalmas fonalakkal vannak összekötve, a fonalakban »nagy« feszítőerő működik, a tömegpontok pedig »kicsiny« kitérésű transzverzális rezgést végezhetnek*. Ilyen korpuzskuláris rendszerekkel már *Lagrange* foglalkozott, de azóta is többen folytattak kutatásokat mind a mechanikai, mind pedig az ezekkel analóg elektromos és atomfizikai jelenségek vizsgálata terén. [1–7]. Ebben a dolgozatban elsősorban azt kívánom megmutatni, hogy a problémák megoldása során milyen lényeges előnyöket biztosít a formális és numerikus számítás igényeinek megfelelően kiépített matrixszámítás alkalmazása. — Egy \mathbf{A} matrix analitikus függvényének az

* »Nagy« feszítőerő alatt azt értjük, hogy a fonalak megnyúlásából származó feszültségnövekmény az előfeszültséghez képest elhanyagolható; »kicsiny« kitérés alatt pedig azt értjük, hogy a kitérések négyzete és szorzata elhanyagolható az első hatványhoz képest, valamint a hajlásszög sinusa helyett annak tangense vehető.

1. §-ban ismertetett definíciója révén értelmezni tudjuk matrixokra az $e^{\mathbf{A}t}$, $\sin \mathbf{A}t$, $\cos \mathbf{A}t$ stb. exponenciális, ill. trigonometrikus függvényeket. Ezek segítségével lehetővé válik az állandó együtthatójú lineáris *skalár*-differenciálegyenlet kezdeti értékektől függő megoldásának értelemszerű átírása állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletrendszerre, mint matrixegyütthatókkal bíró *vektor*-differenciálegyenletre, u. i. ennek rezolvens matrixait képezik az $e^{\mathbf{A}t}$, $\sin \mathbf{A}t$, $\cos \mathbf{A}t$ matrixfüggvények. $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ esetén a formulák automatikusan szolgáltatják \mathbf{A} matrix kanonikus felbontását, amely szimmetrikus matrix esetén azonos kvadratikus alakoknak négyzetösszegbe való transzformálásával, illetve mechanikai problémák esetén normálkoordináták bevezetésével. A 2. §-ban ismertetett váltakozó tömegpontokkal bíró rendszer saját rezgéseinek meghatározásával *Born* és *Kármán* foglalkoztak idézett munkájukban [3]. *Brillouin* [4] ezen túlmenően részletesen elemzi, hogy a gerjesztő frekvencia változtatásával hogyan változik a gerjesztett rezgések tovaterjedésének jellege. Meghatározza a gerjesztő frekvencia azon intervallumait, melyekben a rezgések periodikusan nem terjedhetnek. Eredményeit alkalmazza elektromos négyfógluslánc problémájára. Azt a körülményt, hogy gerjesztett rezgések esetén a korpuszkuláris húrmodell a folytonostól merőben eltérő viselkedést mutat, már *Routh* megemlíti könyvében [2]. A matrixszámításnak e problémakörre való alkalmazása biztosítja, hogy a megoldásokhoz ne ötletszerűen, hanem szisztematikus tárgyalás során jussunk, s lehetővé teszi, hogy a problémák tág területén egységes módszert használjunk fel. Az 1. § eredményeinek segítségével tetszőleges kezdeti feltételek mellett explicit alakban nyerjük a rendszer mozgását meghatározó egyenleteket, a matrixok kanonikus felbontása révén közvetlenül adódnak a normálrezgések, végül az így kapott eredmények alapján minden nehézség nélkül és egységes módszerrel meghatározható változó gerjesztő-frekvencia mellett a gerjesztett rezgés periodikus megoldása. A 3. § egy súrlódás nélküli hengeren köralakban elhelyezett korpuszkuláris rendszer rezgéseit tárgyalja, amely példa arra az általánosabb és bonyolultabb esetre, midőn a differenciálegyenletrendszert meghatározó matrixnak kétszeres sajátértékei vannak. A 4. § korpuszkuláris rendszerek energianövekedésének meghatározásával foglalkozik periodikusan ismétlődő, egyenlő nagyságú impulzusok hatására. Hasonló vizsgálatok szerepelnek *Hostinsky* idézett dolgozataiban [5–6], eredményei azonban csupán egyenlő tömegpontokkal bíró korpuszkuláris rendszerre vonatkoznak. E dolgozatban egyrészt eredményeinek általánosítása szerepel váltakozó tömegpontokból álló, valamint kör mentén elhelyezett korpuszkuláris rendszerre, másrészt a kapott eredmények alkalmazása két, konkrét feltételekkel meghatározott feladat megoldására (l. 4. § *A*) és *B*): *a*) és *b*) feladat). Külön ki kell emelni, hogy a *Hostinsky* dolgozatában is szereplő $\left(\frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha}\right)^2$ kifejezés a Fejér-féle mag [8].

1. §. Matematikai előkészítés.

Vezessük be a következő jelöléseket: legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ egy négyzetes matrix ($i = 1, 2, \dots, n$ a sorindexet, $j = 1, 2, \dots, n$ az oszlopindexet jelöli)

és $\mathbf{E} = [\delta_{ij}]$ az egységmatrix, akkor az \mathbf{A} matrixhoz tartozó karakterisztikus polinom $D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ lesz. Többszörös karakterisztikus gyökök esetén

$$\Delta(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\vartheta(\lambda)}$$

jelölje a redukált karakterisztikus polinomot (vagy minimálpolinomot), ahol $\vartheta(\lambda)$ az \mathbf{A} matrix $(n - 1)$ -edrendű minorainak legnagyobb közös osztója. Az adjungált matrixot következőképpen definiáljuk: $\text{adj } \mathbf{A} = \text{adj } [a_{ij}] = [A_{ji}]$, ahol A_{ji} a matrixnak a_{ji} eleméhez tartozó előjeles minorát jelenti.

A továbbiakban csak olyan matrixok fordulnak elő, melyeknek a karakterisztikus polinomja, vagy legalább a minimálpolinomja csupa egyszeres gyökkel bír. Ez akkor következik be, ha $\text{adj } (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ osztható a diszkriminánsal. Ilyen tulajdonsággal bírnak elsősorban a jelen dolgozatban előforduló szimmetrikus matrixok, valamint a Hermite-féle matrixok és egész általánosan az u . n. normál matrixok.

Szükség lesz még a karakterisztikus, ill. a minimálpolinom gyökhelyein interpoláló Lagrange-féle alappolinomokra :

$$L_k(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{D'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} \quad \text{ill.} \quad L_k(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}$$

ahol

$$D(\lambda) = \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k) \quad \text{ill.} \quad D(\lambda) = \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

$$\text{és} \quad \Delta(\lambda) = \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)$$

$$\left(\sum_{k=1}^s \alpha_k = n \right).$$

Definiálni kívánjuk $f(\mathbf{A})$ matrixfüggvényt olyan $f(\lambda)$ analitikus függvényre, melynek konvergenciaköre \mathbf{A} matrix sajátértékeit tartalmazza. (\mathbf{A} általános matrix egyszeres sajátértékekkel, vagy Hermite-féle, többszörös sajátértékekkel.) Interpoláljuk $f(\lambda)$ függvényt Lagrange-féle interpolációs polinommal a $D(\lambda)$ ill. $\Delta(\lambda)$ gyökhelyein, ekkor fennáll a következő összefüggés :

$$f(\lambda) - \sum_k f(\lambda_k) \cdot L_k(\lambda) = \begin{cases} D(\lambda) \cdot f^*(\lambda) \\ \Delta(\lambda) \cdot f^*(\lambda) \end{cases}$$

Mivel Cayley tétele értelmében minden matrix kielégíti a karakterisztikus egyenletét (többszörös sajátértékek esetén a redukált karakterisztikus egyenletét), vagyis $D(\mathbf{A})$ ill. $\Delta(\mathbf{A}) = 0$, továbbá a feltételezett konvergencia-

tulajdonság értelmében $f^*(\mathbf{A})$ matrix hatványsora konvergens, tehát λ helyére \mathbf{A} matrixot írva

$$(1) \quad f(\mathbf{A}) = \sum_k f(\lambda_k) \cdot L_k(\mathbf{A})$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{ill. } k = 1, 2, \dots, s$$

Ily módon $f(\mathbf{A})$ matrixfüggvény hatványsorát polinommá redukáltuk.

Kimutatható, hogy az itt fellépő $L_k(\mathbf{A})$ matrixok rangszáma megegyezik λ_k karakterisztikus gyök multiplicitásával; legyen ez α , ekkor $L_k(\mathbf{A})$ felbontható egy α oszlopból álló n soros, és egy α sorból álló n oszlopos matrix szorzatára. Bebizonyítható, hogy ezen matrixok oszlopai, ill. sorai által jellemzett vektorok szimmetrikus matrix esetén ortonormált rendszert alkotnak, vagyis (elhagyva a k indexet):

$$(2) \quad L(\mathbf{A}) = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_\alpha] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_\alpha^* \end{bmatrix}$$

ahol \mathbf{u} sorvektor az \mathbf{u}_i oszlopvektor transzponáltját jelenti és $\mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$ (általános matrix esetén az oszlop ill. sorvektorok reciprok vektorrendszert alkotnak) [9–10].

$L_k(\mathbf{A})$ matrixpolinomokat számítástechnikai okokból előnyös kifejezni az adjungált matrix segítségével:

$$(3) \quad L_k(\mathbf{A}) = -\frac{1}{A'(\lambda_k)} \left. \frac{\text{adj}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})}{(D, D')} \right|_{\lambda=\lambda_k}$$

ahol (D, D') a karakterisztikus polinom diszkriminánsa.

2. §. Váltakozó tömegű tömegpontokkal bíró korpuzkuláris hármodell szabad és gerjesztett rezgései

A) *Szabad rezgések.* Tekintsünk egy L hosszúságú tömeg nélküli homogén fonalat, amelyet $2n + 1$ egyenlő részre osztunk, és a belső osztópontokra felváltva m , ill. M nagyságú tömegpontokat erősítünk. A fonal két végét úgy rögzítjük, hogy abban F feszítőerő ébredjen. Vizsgáljuk a tömegpontok transzverzális rezgéseit.

A j -ik tömegpontnak kicsiny transzverzális kitérése legyen y_j . Feltesszük, hogy a rendszer a rezgések folyamán állandóan egy rögzített síkban marad.

Az egyes tömegpontokra felírva a mozgásegyenleteket, a következő állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletrendszert nyerjük :

$$m\ddot{y}_1 + \frac{F(2n+1)}{L} (2y_1 - y_2) = 0$$

$$m\ddot{y}_{2k-1} + \frac{F(2n+1)}{L} (-y_{2k-2} + 2y_{2k-1} - y_{2k}) = 0$$

$$M\ddot{y}_{2k} + \frac{F(2n+1)}{L} (-y_{2k-1} + 2y_{2k} - y_{2k+1}) = 0$$

$$M\ddot{y}_{2n} + \frac{F(2n+1)}{L} (-y_{2n-1} + 2y_{2n}) = 0.$$

Bevezetve

$$(4) \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & & & 0 \\ 0 & M & & & \\ & & m & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & M \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

jelöléseket, differenciálegyenletrendszerünket egyetlen vektoregyenletbe foglalhatjuk :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \frac{F(2n+1)}{L} \mathbf{A}\mathbf{y} = 0.$$

Szorozzuk meg egyenletünket balról $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ -nel és vegyük tekintetbe, hogy

$\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}$, akkor

$$\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \ddot{\mathbf{y}} = \frac{F(2n+1)}{L} \left(\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right) = 0.$$

Vezessük be az

$$(5) \quad \eta = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sqrt{m} y_1 \\ \sqrt{M} y_2 \\ \sqrt{m} y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sqrt{M} y_{2n} \end{bmatrix}$$

és

$$(6) \quad \mathbf{V} = \frac{F(2n+1)}{L} \left(\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{(2n+1)^2}{T^2} \begin{bmatrix} 2\alpha & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \frac{2}{\alpha} & -1 & & \\ 0 & -1 & 2\alpha & & \\ & & & & -1 \\ & & & & \frac{2}{\alpha} \end{bmatrix}$$

jelöléseket, ahol $\frac{1}{T^2} = \frac{F}{\sqrt{Mm}(2n+1)L}$ és $\alpha = \sqrt{\frac{M}{m}}$.

Ezáltal vektordifferenciálegyenletünk az alábbi egyszerű alakot ölti:

$$(7) \quad \ddot{\eta} + \mathbf{V}\eta = 0$$

ahol \mathbf{V} szimmetrikus matrix. Ez a transzformáció azért előnyös, mert az eredeti \mathbf{y} vektorra felírt differenciálegyenlet matrixa: $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ nem szimmetrikus.

(7) megoldása $\eta(0) = \eta_0$ és $\dot{\eta}(0) = \dot{\eta}_0$ kezdeti feltételek mellett:

$$(8) \quad \eta = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) \cdot \eta_0 + \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \dot{\eta}_0.$$

\mathbf{V} matrix fenti függvényeinek meghatározásához (1) alapján először a karakterisztikus egyenlet gyökeit, majd ezen gyökhelyeken interpoláló matrixpolinomokat kell kiszámítani. A számításainkhoz szükséges $\mathbf{V} - \lambda\mathbf{E}$ matrix felbontható olyan három matrix szorzatára, melyek közül az első és a harmadik egymással megegyező diagonálmatrix (0-tól különböző elemeket csak a főátlóban tartalmaz), a középső pedig $\mathbf{V} - \lambda\mathbf{E}$ matrixhoz hasonló szerkezetű, de főátlójában lévő elemei egyenlők. A tényezőkre bontásnak az az előnye, hogy az így keletkező középső tényező determinánsa a legegyszerűbb szerkezetű kontinuuáns, melynek explicit kifejtése közismert. (Számítástechnikai előnyök

biztosítása végett λ helyett a továbbiakban $\frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda$ fog szerepelni.)

$$(9) \quad \mathbf{V} - \frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda \mathbf{E} = \mathbf{Q} \mathbf{W} \mathbf{Q}$$

ahol

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{\frac{2\alpha - \lambda}{\frac{2}{\alpha} - \lambda}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt[4]{\frac{\frac{2}{\alpha} - \lambda}{2\alpha - \lambda}} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \sqrt[4]{\frac{\frac{2}{\alpha} - \lambda}{2\alpha - \lambda}} \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{W} = \frac{(2n+1)^2}{T^2} \times \begin{bmatrix} \sqrt{(2\alpha - \lambda) \left(\frac{2}{\alpha} - \lambda\right)} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \sqrt{(2\alpha - \lambda) \left(\frac{2}{\alpha} - \lambda\right)} & -1 & & \\ 0 & -1 & \dots & & \\ & & & & \sqrt{(2\alpha - \lambda) \left(\frac{2}{\alpha} - \lambda\right)} \end{bmatrix}$$

$$(10) \quad \sqrt{(2\alpha - \lambda) \left(\frac{2}{\alpha} - \lambda\right)} = 2 \cos \Theta$$

transzformációval a karakterisztikus egyenlet :

$$D_{2n}(\lambda) = \det \left(\mathbf{V} - \frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda \mathbf{E} \right) = \det \mathbf{Q} \cdot \det \mathbf{W}(\Theta) \cdot \det \mathbf{Q} = \det \mathbf{W}(\Theta)$$

(mivel $\det \mathbf{Q} = 1$).

Teljes indukció segítségével meggyőződhetünk a következő összefüggés helyességéről :

$$(11) \quad \det \mathbf{W}(\Theta) = \frac{(2n+1)^2}{T^2} \cdot \frac{\sin(2n+1)\Theta}{\sin \Theta}$$

$D_{2n}(\lambda) = \det \mathbf{W}(\Theta) = 0$ egyenlet megoldása (11) felhasználásával $\Theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), végül (10)-ből

$$\lambda_{+k} = 2q + 2 \sqrt{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} =$$

$$= \left(\sqrt{q + \sin \frac{k\pi}{2n+1}} + \sqrt{q - \sin \frac{k\pi}{2n+1}} \right)^2$$

és

$$(12) \quad \lambda_{-k} = 2q - 2 \sqrt{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} =$$

$$= \left(\sqrt{q + \sin \frac{k\pi}{2n+1}} - \sqrt{q - \sin \frac{k\pi}{2n+1}} \right)^2$$

ahol q a kétféle tömeg aritmetikai és geometriai közepének hányadosát jelenti:

$$q = \frac{M+m}{2\sqrt{Mm}}$$

Teljesség kedvéért meg kell jegyezni, hogy amennyiben a korpuszkuláris rendszer nem páros, hanem páratlan rezgő tömegpontból áll, tehát az előbbi esettel szemben nem $2n$, hanem csak $2n-1$ egyenletből álló differenciál-egyenletrendszert kapunk, akkor a karakterisztikus egyenlet a következő alakot ölti:

$$(13) \quad (2z - \lambda) \frac{\sin 2n\Theta}{\sin \Theta} = 0$$

innen

$$\Theta_k = \frac{k\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

(10) alapján $2n-2$ darab sajátérték számítható, a 0 indexű sajátérték (13)-ból: $\lambda_0 = 2\alpha$.

A karakterisztikus egyenlet gyökhelyein interpoláló matrixpolinom

kiszámításához (3) alapján szükségünk van $adj \left(\mathbf{V} - \frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda_k \mathbf{E} \right)$ kifejezésére. (9) összefüggés alapján

$$adj \left(\mathbf{V} - \frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda_{+k} \mathbf{E} \right) = [adj \mathbf{Q} \cdot adj \mathbf{W} \cdot adj \mathbf{Q}]_{\lambda=\lambda_{+k}}$$

(10) helyettesítés felhasználásával

$$[adj \mathbf{Q}]_{\lambda=\lambda_{+k}} =$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\sqrt{q^2-1} - \sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta_k}}{\cos \Theta_k}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\cos \Theta_k}{\sqrt{q^2-1} - \sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta_k}}} \\ & & \sqrt{\frac{\cos \Theta_k}{\sqrt{q^2-1} - \sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta_k}}} \end{bmatrix}$$

továbbá

$$adj \mathbf{W} = [W_{ji}] = \begin{cases} \left[\begin{array}{cc} \sin j \Theta & \sin(n-i)\Theta \\ \sin \Theta & \sin \Theta \end{array} \right] & \text{ha } j \leq i \\ \left[\begin{array}{cc} \sin i \Theta & \sin(n-j)\Theta \\ \sin \Theta & \sin \Theta \end{array} \right] & \text{ha } j \geq i \end{cases}$$

$$[adj \mathbf{W}]_{\lambda=\lambda_{+k}} = \begin{bmatrix} \sin \frac{ik\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{jk\pi}{2n+1} \\ (-1)^{k+1} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \end{bmatrix}$$

A (3)-ban szereplő $\frac{1}{D'_{2n}(\lambda_{+k})}$ konstans faktor, mely a normálást szolgálja, a következő:

$$\frac{1}{D'_{2n}(\lambda_{+k})} = (-1)^k \cdot \frac{2}{2n+1} \frac{\cos \frac{k\pi}{2n+1}}{\sqrt{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}} \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}$$

A keresett matrixpolinom tehát

$$L_{+k}(\mathbf{V}) = -\frac{1}{D'_{2n}(\lambda_{+k})} \text{adj} \left(\mathbf{V} - \frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda_{+k} \mathbf{E} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \sqrt{\frac{\cos \frac{k\pi}{2n+1}}{-\sqrt{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}}} [\text{adj } \mathbf{Q}]_{\lambda_{+k}}.$$

$$\begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{2n+1} \\ \sin \frac{2k\pi}{2n+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \end{bmatrix} \left[\sin \frac{k\pi}{2n+1}, \dots, \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \right] \cdot [\text{adj } \mathbf{Q}]_{\lambda_{+k}}.$$

$$\sqrt{\frac{\cos \frac{k\pi}{2n+1}}{-\sqrt{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}}} \cdot \sqrt{\frac{2}{2n+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \begin{bmatrix} \Omega^+ & & & \\ & \Omega^- & & \\ & & \Omega^+ & \\ & & & \ddots \\ & & & & \Omega^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{2n+1} \\ \sin \frac{2k\pi}{2n+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \end{bmatrix}.$$

$$\left[\sin \frac{k\pi}{2n+1}, \dots, \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \right] \begin{bmatrix} \Omega^+ & & & \\ & \Omega^- & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Omega^- \end{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

ahol

$$(14) \quad \Omega^+ = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{q^2 - 1}{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}}} \quad \text{és} \quad \Omega^- = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{q^2 - 1}{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}}}$$

λ_{-k} helyettesítésével hasonló eredményre jutunk, csupán Ω^+ és Ω^- szerepe cserélődik meg. $L_{+k}(\mathbf{V})$ és $L_{-k}(\mathbf{V})$ fenti kifejezéseivel egy-egy normálrezgés

$$(15) \quad \begin{aligned} \eta_{+k}(t; \eta_0 \dot{\eta}_0) &= \cos\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{+k}} t\right) \cdot L_{+k}(\mathbf{V}) \eta_0 + \\ &+ \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{+k}} t\right)}{\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{+k}}} L_{+k}(\mathbf{V}) \cdot \dot{\eta}_0 \\ \eta_{-k}(t; \eta_0 \dot{\eta}_0) &= \cos\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{-k}} t\right) \cdot L_{-k}(\mathbf{V}) \eta_0 + \\ &+ \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{-k}} t\right)}{\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{-k}}} L_{-k}(\mathbf{V}) \cdot \dot{\eta}_0. \end{aligned}$$

Az egyes tömegpontok kitérését \mathbf{y} vektor komponensei szolgáltatják, melyet (5) alapján $\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\eta}$ transzformációval számíthatunk. Szorozzuk meg tehát (15) egyenleteket balról $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ -nel és vegyük tekintetbe, hogy $\eta_0 = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \eta_0$ (és ugyanígy $\dot{\eta}_0$), ekkor nyerjük:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{+k}(t; \mathbf{y}_0 \dot{\mathbf{y}}_0) &= \cos\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{+k}} t\right) \left[\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} L_{+k}(\mathbf{V}) \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \right] \mathbf{y}_0 + \\ &+ \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{+k}} t\right)}{\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{+k}}} \left[\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} L_{+k}(\mathbf{V}) \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \right] \dot{\mathbf{y}}_0 \\ \mathbf{y}_{-k}(t; \mathbf{y}_0 \dot{\mathbf{y}}_0) &= \cos\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{-k}} t\right) \left[\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} L_{-k}(\mathbf{V}) \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \right] \mathbf{y}_0 + \\ &+ \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{-k}} t\right)}{\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{-k}}} \left[\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} L_{-k}(\mathbf{V}) \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \right] \dot{\mathbf{y}}_0 \end{aligned}$$

(λ_{+k} és λ_{-k} értékét (12) adja).

Az itt szereplő matrixok

$$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} L_{+k}(\mathbf{V}) \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{2n+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \Omega^+ \sin \frac{k\pi}{2n+1} \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \Omega^- \sin \frac{2k\pi}{2n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \Omega^- \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \end{bmatrix}$$

$$\cdot \left[\sqrt{m} \Omega^+ \sin \frac{k\pi}{2n+1}, \sqrt{M} \Omega^- \sin \frac{2k\pi}{2n+1}, \dots, \sqrt{M} \Omega^- \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \right]$$

és

$$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} L_{-k}(\mathbf{V}) \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{2n+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \Omega^- \sin \frac{k\pi}{2n+1} \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \Omega^+ \sin \frac{2k\pi}{2n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \Omega^+ \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \end{bmatrix}$$

$$\cdot \left[\sqrt{m} \Omega^- \sin \frac{k\pi}{2n+1}, \sqrt{M} \Omega^+ \sin \frac{2k\pi}{2n+1}, \dots, \sqrt{M} \Omega^+ \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \right].$$

A teljes megoldás pedig

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{y}_{+k} + \mathbf{y}_{-k}).$$

Teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy páratlan számú rezgő tömegpont esetén a számítások teljesen analóg eredményre vezetnek, de a kész formulák csak $2n - 2$ normálrezgést szolgáltatnak. A 0 indexű normálrezgés, amely $\lambda_0 = 2\alpha$ sajátértékhez tartozik, — a részletes számítások mellőzésével —

$$\eta_0 = \frac{2}{2n} \cos\left(\frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha} t\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \end{bmatrix} [1 \ 0 \ -1 \ \dots \ (-1)^{n-1}] \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{0,2n-1} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{2}{2n} \frac{\sin\left(\frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha} t\right)}{\frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \end{bmatrix} [1 \ 0 \ -1 \ \dots \ (-1)^{n-1}] \begin{bmatrix} \dot{y}_{01} \\ \dot{y}_{02} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{y}_{0,2n-1} \end{bmatrix}$$

vagyis

$$y_0 = \left[\cos\left(\frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha} t\right) \frac{y_{01} - y_{03} + \dots + (-1)^{n-1} y_{0,2n-1}}{n} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\left(\frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha} t\right)}{\frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha}} \frac{\dot{y}_{01} - \dot{y}_{03} + \dots + (-1)^{n-1} \dot{y}_{0,2n-1}}{n} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \end{bmatrix}$$

B) Gerjesztett rezgések. Tekintsük az *A)* alatt tárgyalt korpuzkuláris rendszert és vizsgáljuk azt az esetet, midőn a fonal egyik — pl. a baloldali — végpontjára $g \sin \omega t$ transzverzális rezgést kényszerítünk. Felírva a mozgásegyenleteket az egyes tömegpontokra, az első kivételével ugyanazokat az egyenleteket nyerjük, mint szabad rezgések esetében. Az első tömegpontra egyenletünk a következő alakot kapja :

$$m\ddot{y}_1 + \frac{F(2n+1)}{L}(-g \sin \omega t + 2y_1 - y_2) = 0.$$

Felhasználva (4) jelöléseket, differenciálegyenletrendszerünket egyetlen vektor-egyenletbe foglalhatjuk :

$$M\ddot{\mathbf{y}} + \frac{F(2n+1)}{L} \mathbf{A}\mathbf{y} = \frac{F(2n+1)}{L} \mathbf{g} \sin \omega t$$

$$\text{ahol } \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

A már ismerttetett átalakítás után (5) és (6) felhasználásával

$$(16) \quad \ddot{\eta} + \mathbf{V}\eta = \mathbf{G}\gamma \sin \omega t$$

ahol

$$\mathbf{G} = \frac{F(2n+1)}{L} \mathbf{M}^{-1} = \frac{(2n+1)^2}{T^2} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

és

$$\gamma = \mathbf{M}^2 \mathbf{g}.$$

Ezen inhomogén lineáris vektordifferenciálegyenlet egy partikuláris megoldását a következő alakban keressük:

$$(17) \quad \eta = \Gamma \sin \omega t.$$

Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe, Γ -ra a következő összefüggést nyerjük:

$$(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{E})\Gamma = \mathbf{G}\gamma.$$

Tegyük fel, hogy ω^2 nem egyenlő \mathbf{V} matrix sajátértékével — vagyis a rezonancia esetét kizárjuk — ekkor létezik $(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{E})^{-1}$, tehát

$$(18) \quad \Gamma = (\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{E})^{-1} \mathbf{G}\gamma.$$

(9) összefüggés alapján $\left(\frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda \text{ helyett } \omega^2\text{-et írva}\right)$:

$$(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}^{-1}$$

tehát a megoldás:

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{G}\gamma \sin \omega t = \mathbf{jg} \sin \omega t$$

Az így nyert eredmény részletes elemzése a mellékelt táblázatban látható.

A táblázatból kitűnik, hogy bizonyos gerjesztő frekvenciáknál a rezgés-képben minőségi változás következik be. Ezek a határfrekvenciák: ω_1, ω_2 és ω_3 , melyek között a következő egyszerű összefüggés áll fenn: $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_3^2$.

Láthatjuk, hogy ha $0 < \omega < \omega_1$

$$\text{és } \omega_2 < \omega < \omega_3$$

a tömegpontok rezgéseinek amplitúdói periodikus eloszlást mutatnak, míg abban az esetben, amikor

$$\omega_1 < \omega < \omega_2$$

és

$$\omega_3 < \omega,$$

az amplitudók eloszlását hiperbolikus függvények határozzák meg.

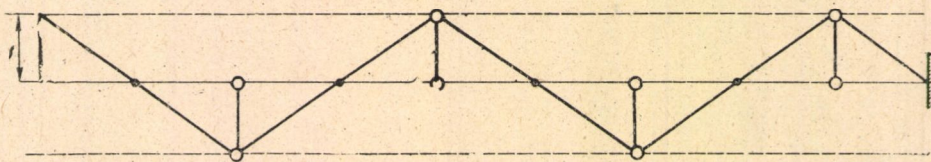
Ha végtelen hosszú, illetve gyakorlatilag végtelen hosszúnak tekinthető húrt tételezünk fel, vagyis $n \gg 1$, és olyan gerjesztő frekvenciákat vizsgálunk, amelyek a II. ill. IV. intervallum belsejébe esnek, akkor a rezgő tömegpontok amplitúdói a húr mentén exponenciálisan csökkennek. Nevezzük a továbbiakban (ω_1, ω_2) intervallumot az exponenciálisan csökkenő amplitudók »alsó frekvenciasáv«-jának, (ω_3, ∞) intervallumot pedig »felső frekvenciasáv«-nak. Változtassuk most a korpuszkulumok tömegét úgy, hogy mind a nagy, mind a kis tömegpont tömege a kettő harmonikus közepéhez, vagyis μ -höz konvergáljon, így egyenlő tömegpontokból álló korpuszkuláris rendszerhez jutunk.

Ekkor az alsó frekvenciasáv eltűnik, ω_1 és ω_2 is $\omega_0 = \sqrt{\frac{2(2n+1)F}{L} \cdot \frac{1}{\mu}}$ határfrekvenciához tart, ω_3 pedig változatlan marad. Ez az eset az irodalomban Routh-féle jelenség néven ismeretes, tehát az általunk vizsgált jelenség ennek általánosításaként fogható fel. Ha M tömeget állandónak tartjuk, m -et pedig csökkentjük, akkor a felső frekvenciasáv tűnik el, az alsó frekvenciasáv pedig oly módon válik végtelenné, hogy ω_1 helyben marad és ω_2 végtelenhez tart.

Tanulságos megnézni, milyen rezgésképet kapunk azon határfrekvenciák esetén, melyek elválasztják egymástól a periodikus eloszlást mutató és az exponenciálisan csökkenő amplitudók frekvenciasávját.

$\omega = \omega_1$ esetén

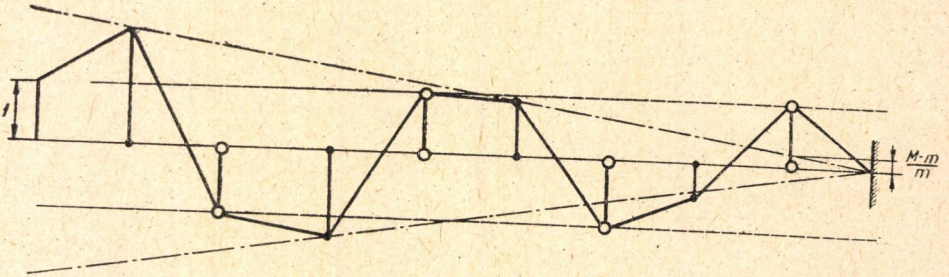
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^n \end{bmatrix} g \sin \omega t$$



1. ábra

$\omega = \omega_2$ esetén

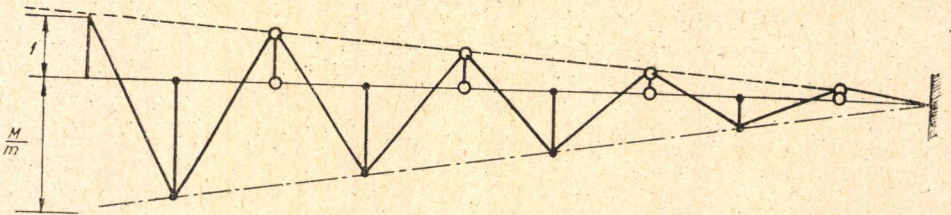
$$y = \begin{bmatrix} 2n \frac{M-m}{m} \\ -1 \\ -(2n-2) \frac{M-m}{m} \\ +1 \\ \vdots \\ (-1)^n \end{bmatrix} g \sin \omega t$$



2. ábra

$\omega = \omega_3$ esetén

$$y = \begin{bmatrix} \frac{M}{m} \frac{2n}{2n+1} \\ \frac{2n-1}{2n+1} \\ -\frac{M}{m} \frac{2n-2}{2n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix} g \sin \omega t$$



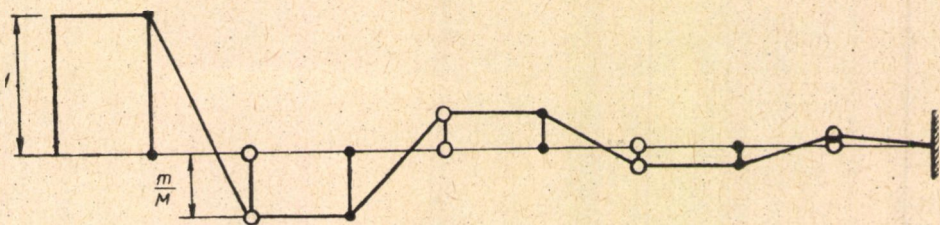
3. ábra

Érdeemes külön foglalkozni az $\omega = \omega_0$ frekvenciával, amelyhez igen érdekes rezgékép tartozik. Ha feltesszük, hogy $n \gg 1$, akkor

$$\frac{\text{sh}(2n+2-2k)\Theta}{\text{ch}(2n+1)\Theta} \approx e^{-(2k-1)\Theta} \quad \text{és} \quad \frac{\text{ch}(2n+1-2k)\Theta}{\text{ch}(2n+1)\Theta} \approx e^{-2k\Theta}$$

és mivel $\Theta = \text{arch } q$, tehát

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \\ -\frac{m}{M} \\ +\left(\frac{m}{M}\right)^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^n \left(\frac{m}{M}\right)^n \end{bmatrix} g \sin \omega t$$



4. ábra

Eddigi vizsgálatainknál arra az esetre szorítottunk, midőn párosszámú tömegpont végzett rezgést. Hasonló számításokkal az előbbivel analóg eredményre jutunk páratlan számú rezgő tömegpont esetén is, tehát megtaláljuk a kétféle rezgéképet, melyek felváltva követik egymást a gerjesztő frekvencia monoton változtatása mellett. Mégis ki kell térni annak az esetnek vizsgálatára, midőn

$$\omega = \omega_2 = \frac{2n}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 - 1}} = \frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2n F}{L} \cdot \frac{1}{m}}$$

Ez esetben ugyanis a gerjesztő frekvencia megegyezik a rendszer egy saját frekvenciájával, tehát rezonanciajelenség lép fel; $\det(\mathbf{V} - \omega_2^2 \mathbf{E}) = 0$, az eddig követett megoldási módszer nem alkalmazható. (16) egy partikuláris megoldását most

$$\eta = \mathbf{a} \sin \omega_2 t + \mathbf{b} t \cos \omega_2 t$$

alakban keressük. Kétszer deriválva és visszahelyettesítve az egyenletbe, \mathbf{a} -ra és \mathbf{b} -re a következő egyenleteket kapjuk :

$$(19) \quad (\mathbf{V} - \omega_2^2 \mathbf{E}) \mathbf{b} = 0$$

$$(20) \quad (\mathbf{V} - \omega_2^2 \mathbf{E}) \mathbf{a} - 2\omega_2 \mathbf{b} = \mathbf{G}\gamma.$$

(19)-ből következik, hogy \mathbf{b} vektor a \mathbf{V} matrixnak ω_2^2 sajátértékéhez tartozó sajátvektora. Mivel $\mathbf{V} - \omega_2^2 \mathbf{E}$ matrix rangja $2n - 2$, több lineárisan független megoldási vektor nincs.

$$\mathbf{b} = b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \end{bmatrix}$$

b értékét (20)-ból oly módon határozzuk meg, hogy a (20) inhomogén lineáris egyenletrendszer ellentmondásmentes legyen ; ez bekövetkezik akkor, ha

$$b = -\frac{1}{4n} \gamma_1 \omega_2, \quad \text{ahol} \quad \gamma_1 = \sqrt{m} g.$$

\mathbf{a} vektort a (20) inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldása szolgáltatja :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} z + \frac{n-1}{n} \cdot n \cdot 2\sqrt{q^2-1} \\ -\frac{n-1}{n} \\ -z - \frac{n-2}{n} (n-1) \cdot 2\sqrt{q^2-1} \\ + \frac{n-2}{n} \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \\ (-1)^{n-1} \cdot z \end{bmatrix} \gamma_1 \alpha.$$

A megoldás tehát $\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\eta}$ segítségével

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} z + \frac{n-1}{n} \cdot n \frac{M-m}{m} \\ \frac{n-1}{n} \\ -z - \frac{n-2}{n} (n-1) \frac{M-m}{m} \\ + \frac{n-2}{n} \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \\ (-1)^{n-1} z \end{bmatrix} g \sin \omega_2 t - \begin{bmatrix} \frac{1}{4n} \\ 0 \\ -\frac{1}{4n} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{(-1)^{n-1}}{4n} \end{bmatrix} g \omega_2 t \cos \omega_2 t.$$

Ez az eredmény mutatja azt, hogy a partikuláris megoldásoknak egy paramétertől $-z$ -től — függő végtelen sokasága létezik, melyek mindegyikének megfelelő rezgés a fent leírt típusba tartozik.

3. §. *Kör mentén ekvidisztánsan elosztott és elasztikusan kapcsolt tömegpontrendszer szabad és kényszerített rezgései*

A) *Szabad rezgések.* Tekintsünk egy tömegtelen, elasztikus fonálra egyenletes közökben felfűzött, összesen M tömegű n darab tömegpontot és ezt a korpuszkuláris rendszert helyezzük egy r sugarú, súrlódás nélküli körhengerre, melyen az transzverzális rezgéseket végezhet. Az egyes tömegpontokra vonatkozó mozgásegyenleteket egyetlen vektor-differenciálegyenletként írjuk fel:

$$(21) \quad \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{Z}\mathbf{y} = 0.$$

Mivel egyik tömegpont sincs rögzítve és $y_k = y_{n+k}$, \mathbf{Z} ciklikus matrix:

$$\mathbf{Z} = \frac{n^2}{T^{*2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ahol

$$(22) \quad \frac{1}{T^{*2}} = \frac{F}{M \cdot 2r\pi}$$

és F a fonálban működő feszítőerő.

$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ és $\dot{\mathbf{y}}(0) = \dot{\mathbf{y}}_0$ kezdeti feltételek mellett (21) megoldását ugyanúgy nyerjük, mint (7) egyenletét. Először tehát meg kell határoznunk \mathbf{Z} matrix saját értékeit. $2 - \lambda = 2 \cos \Theta$ transzformációval

$$\det \left[\mathbf{Z} - \frac{n^2}{T^{*2}} \lambda \mathbf{E} \right] = D_n(\Theta) = 2 \cos n\Theta - 2 = 0$$

innen

$$\Theta_k = \frac{2k\pi}{n}$$

és

$$\lambda_k = \left(2 \sin \frac{k\pi}{n} \right)^2 \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Legyen $n = 2l - 1$. A karakterisztikus egyenletnek $l - 1$ gyöke kétszeres gyök, tehát $L_k(\mathbf{Z})_{(k=1, 2, \dots, l-1)}$ rangja 2, vagyis előállítható egy kétszlopos és egy kétsoros matrix szorzataként.

(3) és (2) összefüggések felhasználásával — mellőzve a részletes számításokat —

$$L_k(\mathbf{Z}) = - \frac{1}{\Delta'_n(\lambda_k)} \left[\frac{\text{adj} \left(\mathbf{Z} - \frac{n^2}{T^{*2}} \lambda \mathbf{E} \right)}{(D, D')} \right]_{\lambda = \lambda_k} = \left[\frac{2}{n} \cos \frac{j-i}{n} \frac{2k\pi}{n} \right]_{\substack{i=1, 2, \dots, n \\ j=1, 2, \dots, n}} =$$

$$= [\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^* \\ \mathbf{v}_k^* \end{bmatrix}$$

ahol

$$(23) \quad u_{ik} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cos(i-1) \frac{2k\pi}{n}$$

$$v_{ik} = \sqrt{\frac{2}{n}} \sin(i-1) \frac{2k\pi}{n}$$

$$i = 1, 2, \dots, 2l-1$$

$$k = 1, 2, \dots, l-1$$

$k = 0$ esetén a karakterisztikus egyenletnek egyszeres gyöke van: $\lambda_0 = 0$, ezzel

$$L_0(\mathbf{Z}) = \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^* \quad \text{ahol} \quad u_{i0} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ezek alapján (21) megoldása

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0 \dot{\mathbf{y}}_0) = \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^* \mathbf{y}_0 + \sum_{k=1}^{l-1} \cos \left(\frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n} t \right) [\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^* \\ \mathbf{v}_k^* \end{bmatrix} \mathbf{y}_0 +$$

$$+ \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^* \dot{\mathbf{y}}_0 t + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\sin \left(\frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n} t \right)}{\frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n}} [\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^* \\ \mathbf{v}_k^* \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_0.$$

Párosszámú tömegpont esetén, vagyis ha $n = 2l$, fenti eredményünkhöz

még egy normálrezgés járul. Ebben az esetben $\lambda_l = 4$, a karakterisztikus egyenletnek egyszeres gyöke, a hozzátartozó normálrezgés pedig :

$$(24) \quad \mathbf{y}_l(t; \mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0) = \cos\left(\frac{2n}{T^*}t\right) \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^* \mathbf{y}_0 + \frac{\sin\left(\frac{2n}{T^*}t\right)}{\frac{2n}{T^*}} \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^* \dot{\mathbf{y}}_0$$

ahol

$$(25) \quad u_{il} = \frac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{n}}$$

(24) és (25) behelyettesítésével a megoldás $n = 2l$ esetén :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0) = & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{0i} + t \dot{y}_{0i}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{l-1} \cos\left(\frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n} t\right) [\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^* \\ \mathbf{v}_k^* \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_0 + \\ & + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\sin\left(\frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n} t\right)}{\frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n}} [\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^* \\ \mathbf{v}_k^* \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_0 + \frac{1}{n} \left\{ (y_{01} - y_{02} + \dots - y_{0n}) \cos \frac{2n}{T^*} t + \right. \\ & \left. + (\dot{y}_{01} - \dot{y}_{02} + \dots - \dot{y}_{0n}) \frac{\sin \frac{2n}{T^*} t}{\frac{2n}{T^*}} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

B) Gerjesztett rezgések: Tekintsük azt az esetet, midőn az n -edik tömegpontra $g \sin \omega t$ transzverzális rezgést kényszerítünk. Tekintettel arra, hogy jelen esetben $y_0 = y_n$, az $n - 1$ tömegpontra felírt mozgásegyenleteinket az alábbi vektor-differenciálegyenletbe foglalhatjuk :

$$\ddot{\mathbf{y}} + \frac{n^2}{T^{*2}} \mathbf{A} \mathbf{y} = \frac{n^2}{T^{*2}} \mathbf{g} \sin \omega t$$

ahol \mathbf{A} matrixot (4), T^* kifejezését (22) szolgáltatja, valamint

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

A megoldást (17) és (18) alapján

$$\mathbf{y} = \left(\mathbf{A} - \frac{T^{*2} \omega^2}{n^2} \mathbf{E} \right)^{-1} \mathbf{g} \sin \omega t$$

kifejezés szolgáltatja.

A gerjesztő frekvencia változtatásával fellépő eseteket a következő oldalon levő táblázat szemlélteti.

A gerjesztő frekvencia
változási intervalluma : $\omega < \frac{2n}{T^*}, \quad \omega = \frac{2n}{T^*}, \quad \omega > \frac{2n}{T^*}.$

Transzformáció ω -ra : $2 - \frac{T^{*2}\omega^2}{n^2} = 2 \cos \Theta, \quad 2 - \frac{T^{*2}\omega^2}{n^2} = 2 \cos i\Theta$

Θ paraméter változási
intervalluma : $0 < \Theta < \pi, \quad 0 < \Theta$

A megoldási vektor
komponensei : $y_k = \frac{\cos\left(\frac{n}{2} - k\right)\Theta}{\cos\frac{n}{2}\Theta} g \sin \omega t$ $y_k = (-1)^k g \sin \omega t$ $y_k = (-1)^k \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{n}{2} - k\right)\Theta}{\operatorname{ch}\frac{n}{2}\Theta} g \sin \omega t$ ha n páros

$y_k = (-1)^k \left(1 - \frac{2k}{n}\right) g \sin \omega t$ $y_k = (-1)^k \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n}{2} - k\right)\Theta}{\operatorname{sh}\frac{n}{2}\Theta} g \sin \omega t$ ha n páratlan

A gerjesztett rezgés
tovaterjedésének
karaktere : periodikus lineáris exponenciálisan csökkenő

Ha $n \geq 1$, akkor mivel

$$\frac{\operatorname{ch} \left(\frac{n}{2} - k \right) \Theta}{\operatorname{ch} \frac{n}{2} \Theta} = \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{n}{2} - k \right) \Theta}{\operatorname{sh} \frac{n}{2} \Theta} e^{-k\Theta}$$

$\omega = \frac{2n}{T^*}$ gerjesztő frekvencia esetén a k -adik tömegpont mozgását

$$y_k = (-1)^k e^{-k\Theta} g \sin \omega t$$

kifejezés adja.

Említésre méltó, hogy mind a tárgyalás menete, mind pedig a nyert eredmények tökéletesen megegyeznek azon feladatával, ahol egy, a 2. pontban tárgyalt korpuszkuláris rendszerhez hasonló, de egyenlő tömegpontokból álló rendszert veszünk és annak mindkét végére egyidejűleg $g \sin \omega t$ rezgést kényszerítünk.

4. §. Korpuszkuláris rendszerek energiájának növekedése periodikusan ismétlődő egyenlő nagyságú impulzusok hatására.

A) Váltakozó tömegpontokból álló rendszer

Tekintsünk egy — a 2. §-ban tárgyalt — váltakozó tömegpontokból álló korpuszkuláris rendszert. A rendszer mozgását meghatározó vektor-differenciálegyenletet (7), a kezdeti értékektől függő megoldást (8) szolgáltatja. (7)-ből kiolvasható a kinetikus és a potenciális energia kifejezése; jelöljük \mathcal{T} -vel az előbbit, \mathcal{U} -vel az utóbbit, akkor

$$2 \mathcal{T} = \dot{\eta}^* \dot{\eta} \quad \text{és} \quad 2 \mathcal{U} = \eta^* V \eta$$

Feladatunk a következő: $t = t_1$ időpontig legyen a rendszer nyugalomban, t_1 időpontban minden egyes tömegpontnak adjunk tetszőleges — nem szükségképpen egyenlő — $P_i^{(1)}$ kezdősebességet. A tömegpontok mozgását $t > t_1$ időpontban

$$\eta(t_1) = 0$$

és

$$\dot{\eta}(t_1) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{H}^{(1)}$$

kezdeti feltételek mellett (15) alapján

$$\eta_1[t; \eta(t_1), \dot{\eta}(t_1)] = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sin \nu_{\pm k} (t - t_1)}{\nu_{\pm k}} [\mathbf{u}_{\pm k} \mathbf{u}_{\pm k}^*] + \frac{\sin \nu_{\pm k} (t - t_1)}{\nu_{\pm k}} [\mathbf{u}_{\pm k} \mathbf{u}_{\pm k}^*] \right\} \mathbf{H}^{(1)}$$

szolgáltatja, ahol

$$\nu_{\pm k} = \frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{\pm k}}$$

és

$$[\mathbf{u}_{\pm k} \mathbf{u}_{\pm k}^*] = L_{\pm k}(\mathbf{V}).$$

Ha további $t_2, t_3 \dots t_p$ időpontokban újabb $\mathbf{P}^{(2)}, \mathbf{P}^{(3)} \dots \mathbf{P}^{(p)}$ impulzussorozatot adunk a tömegpontoknak, $t > t_p$ időpontban a rendszer mozgását az egyes $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_p$ megoldások szuperpozíciójaként nyerjük:

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p \left\{ \frac{\sin \nu_{+k}(t-t_j)}{\nu_{+k}} [\mathbf{u}_{+k} \mathbf{u}_{+k}^*] + \frac{\sin \nu_{-k}(t-t_j)}{\nu_{-k}} [\mathbf{u}_{-k} \mathbf{u}_{-k}^*] \right\} \Pi^{(j)}.$$

Határozzuk meg a rendszer összes energiáját abban az esetben, ha

a) $t_j - t_{j-1} = \tau$ időközönként periodikusan ismételve $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(2)} = \dots = \mathbf{P}$ nagyságú, összesen $2p$ impulzust közlünk a tömegpontrendszerrel;

b) ugyancsak $t_j - t_{j-1} = \tau$ időközönként egyenlő, összesen $2p$ impulzust közlünk, de mindig csak egyetlen tömegponttal, mégpedig t_1 időpontban az elsővel, t_2 időpontban a másodikkal és így tovább; vagyis

$$P_i^{(j)} = P \cdot \delta_{ij} \quad \text{és} \quad 2p \leq 2n.$$

Vizsgáljuk először az a) esetet.

Felhasználva a matrixok szorzásának asszociativitását,

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \sum_{k=1}^n \left\{ (\mathbf{u}_{+k}^* \Pi) \sum_{j=1}^{2p} \frac{\sin \nu_{+k}(t-t_j)}{\nu_{+k}} \mathbf{u}_{+k} + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{u}_{-k}^* \Pi) \sum_{j=1}^{2p} \frac{\sin \nu_{-k}(t-t_j)}{\nu_{-k}} \mathbf{u}_{-k} \right\} \\ \dot{\eta}(t) &= \sum_{k=1}^n \left\{ (\mathbf{u}_{+k}^* \Pi) \sum_{j=1}^{2p} \cos \nu_{+k}(t-t_j) \mathbf{u}_{+k} + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{u}_{-k}^* \Pi) \sum_{j=1}^{2p} \cos \nu_{-k}(t-t_j) \mathbf{u}_{-k} \right\}. \end{aligned}$$

A rendszer kinetikus energiája (mivel $\mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$):

$$\begin{aligned} 2\mathcal{T} = \dot{\eta}^* \dot{\eta} &= \sum_{k=1}^n \left\{ (\mathbf{u}_{+k}^* \Pi)^2 \left[\sum_{j=1}^{2p} \cos \nu_{+k}(t-t_j) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{u}_{-k}^* \Pi)^2 \left[\sum_{j=1}^{2p} \cos \nu_{-k}(t-t_j) \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Ha $z = e^{-i\nu_k\tau}$ jelölést használjuk, akkor

$$\left| \sum_{j=1}^{2p} z^j \right|^2 = \left| z \frac{1-z^{2p}}{1-z} \right|^2 = \left| z^{p+\frac{1}{2}} \right|^2 \cdot \left| \frac{z^{-p}-z^p}{z^{-\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}} \right|^2$$

miatt

$$(27) \quad \left(\sum_{j=1}^{2p} \cos \nu_{+k}(t-t_j) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{2p} \sin \nu_{+k}(t-t_j) \right)^2 = \\ = \left(\frac{\sin \frac{2p}{2} \nu_{+k}\tau}{\sin \frac{1}{2} \nu_{+k}\tau} \right)^2 = F_{2p}(\delta_{+k})$$

ahol $\delta_{+k} = \nu_{+k}\tau$.

Formuláinkba itt belépő $F_{2p}(\delta_{+k})$ kifejezés — amely *Hostinsky* dolgozatában is szerepel — a Fejér-féle mag [5, 6, 8].

Ezzel a rendszer összes energiája $2p$ számú periodikusan ismétlődő egyenlő impulzus után

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{ F_{2p}(\delta_{+k}) (\mathbf{u}_{+k}^* \Pi)^2 + F_{2p}(\delta_{-k}) (\mathbf{u}_{-k} \Pi)^2 \}.$$

Ha csak a $2i-1$ -ik, ill. $2i$ -ik tömegponttal közlünk impulzusokat, akkor mivel (14)-ből

$$u_{2i-1+k} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \Omega \sin \frac{(2i-1)k\tau}{2n+1}$$

$$u_{2i-1-k} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \Omega \sin \frac{(2i-1)k\tau}{2n+1}$$

$$H_{2i-1} = \sqrt{m} P$$

$$u_{2i+k} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \Omega \sin \frac{2ik\tau}{2n+1}$$

$$u_{2i-k} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \Omega \sin \frac{2ik\tau}{2n+1}$$

$$H_{2i} = \sqrt{M} P$$

a rendszer energiája (Ω^+ és Ω^- kifejezések behelyettesítése után):

$$E(2i-1) = \frac{mP^2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \{ F_{2p}(\delta_{+k}) + F_{2p}(\delta_{-k}) + \\ + [F_{2p}(\delta_{+k}) - F_{2p}(\delta_{-k})] \left[\sqrt{\frac{q^2-1}{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}} \right] \sin^2 \frac{(2i-1)k\pi}{2n+1}$$

ill.

$$E(2i) = \frac{MP^2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \{ F_{2p}(\delta_{+k}) + F_{2p}(\delta_{-k}) - \\ - [F_{2p}(\delta_{+k}) - F_{2p}(\delta_{-k})] \left[\sqrt{\frac{q^2-1}{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}} \right] \sin^2 \frac{2ik\pi}{2n+1}$$

Egyenlő tömegpontok esetén, ha a tömeget m -el jelöljük és az i -edik tömegponttal p impulzust közlünk, a rendszer energiája $t > t_p$ időpontban:

$$E = \frac{mP^2}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} F_p(\delta_k) \sin^2 \frac{ik\pi}{2n+1}$$

ahol

$$\frac{mP^2}{2n+1} F_p(\delta_k) \sin^2 \frac{ik\pi}{2n+1} = \frac{mP^2}{2n+1} \left(\frac{\sin \frac{p}{2} \nu_{k\tau}}{\sin \frac{1}{2} \nu_{k\tau}} \right)^2 \sin^2 \frac{ik\pi}{2n+1} \\ \left(\nu_k = \frac{2n+1}{T} \cdot 2 \sin \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

a k indexű normálrezgés energiáját adja.

Térjünk rá a b) esetre.

A rendszer energiája $2p$ impulzus után ($2p \leq 2n$)

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \left[\sum_{j=1}^{2p} (\mathbf{u}_k^* H^{(j)}) \sin \nu_{+k}(t-t_j) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\sum_{j=1}^{2p} (\mathbf{u}_{+k}^* H^{(j)}) \cos \nu_{+k}(t-t_j) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{2p} (\mathbf{u}_{-k}^* H^{(j)}) \sin \nu_{-k}(t-t_j) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\sum_{j=1}^{2p} (\mathbf{u}_{-k}^* H^{(j)}) \cos \nu_{-k}(t-t_j) \right]^2 \right\}$$

(28) behelyettesítésével az összegezést külön végezzük el a $j = 2i - 1$ és a $j = 2i$ indexű impulzusokra; a trigonometrikus kifejezések szorzatának összeggé alakítása után és (27) felhasználásával, ha bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\beta = \frac{k\pi}{2n+1}; \quad \delta_{\pm k} = \nu_{\pm k}\tau$$

$$R(p, 2\beta, 2\delta_{\pm k}) = \frac{1}{2} [F_p(2\beta + 2\delta_{\pm k}) + F_p(2\beta - 2\delta_{\pm k})]$$

$$S(p, 2\beta, 2\delta_{\pm k}) = \sqrt{F_p(2\beta + 2\delta_{\pm k}) \cdot F_p(2\beta - 2\delta_{\pm k})}$$

$$R(2p, \beta, \delta_{\pm k}) = \frac{1}{2} [F_{2p}(\beta + \delta_{\pm k}) + F_{2p}(\beta - \delta_{\pm k})]$$

$$S(2p, \beta, \delta_{\pm k}) = \sqrt{F_{2p}(\beta + \delta_{\pm k}) \cdot F_{2p}(\beta - \delta_{\pm k})}$$

továbbá

$$X_{\pm k} = R(p, 2\beta, 2\delta_{\pm k}) - S(p, 2\beta, 2\delta_{\pm k}) \cdot \cos 2p\beta$$

$$Y_{\pm k} = R(p, 2\beta, 2\delta_{\pm k}) - S(p, 2\beta, 2\delta_{\pm k}) \cdot \cos(2p + 2)\beta$$

$$Z_{\pm k} = R(2p, \beta, \delta_{\pm k}) - S(2p, \beta, \delta_{\pm k}) \cdot \cos(2p + 1)\beta$$

végül Ω^+ és Ω^- kifejezések behelyettesítésével a rendszer energiája:

$$E = \frac{P^2}{2(2n+1)} \sum_{k=1}^n [m(X_{+k} + X_{-k}) + M(Y_{+k} + Y_{-k}) +$$

$$+ [m(X_{+k} - X_{-k}) - M(Y_{+k} - Y_{-k})] \sqrt{\frac{q^2 - 1}{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} +$$

$$+ \sqrt{Mm} [Z_{+k} + Z_{-k} - (X_{+k} + X_{-k} + Y_{+k} + Y_{-k})] \frac{\cos \frac{k\pi}{2n+1}}{\sqrt{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}}]$$

Egyenlő tömegpontok esetén, ha a tömeget m -el jelöljük, $2p$ impulzus után $t > t_{2p}$ időpontban a rendszer energiája

$$E = \frac{mP^2}{2(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n} Z_k$$

ahol

$$\frac{mP^2}{2(2n+1)} Z_k = \frac{mP^2}{2(2n+1)} \left\{ \frac{1}{2} [F_{2p}(\beta + \delta_k) + F_{2p}(\beta - \delta_k)] + \right.$$

$$\left. + \sqrt{F_{2p}(\beta + \delta_k) \cdot F_{2p}(\beta - \delta_k)} \cdot \cos(2p + 1) \frac{k\pi}{2n+1} \right\}$$

a k indexű normálrezgés energiáját adja.

B) Kőr mentén egyenletesen elosztott, egyenlő tömegpontokból álló rendszer

Tekintsünk egy — a 3. §-ban tárgyalt — súrlódás nélküli hengerre helyezett, $2l$ egyenlő tömegpontból álló korpuszkuláris rendszert. Határozzuk meg ezen rendszer összes energiáját az A) alatt ismertetett feltételek mellett. Tehát, ha t_1, t_2, \dots, t_p időpontokban $\mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{P}^{(2)}, \dots, \mathbf{P}^{(p)}$ impulzus-sorozatot adunk a tömegpontoknak, a rendszer mozgását — (21) vektordifferenciál-egyenletnek, a kezdeti értékektől függő (26) megoldása alapján —

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{j=1}^p \left\{ [\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^*] (t-t_j) + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\sin \varphi_k (t-t_j)}{\varphi_k} [\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^* \\ \mathbf{v}_k^* \end{bmatrix} + \frac{\sin \varphi_l (t-t_j)}{\varphi_l} [\mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^*] \right\} \mathbf{P}^{(j)}$$

kifejezés határozza meg, ahol

$$(29) \quad \varphi_k = \frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n}$$

Térjünk rá az A) alatt részletezett két feladatra.

a) τ időközönként összesen p egyenlő nagyságú \mathbf{P} impulzust közlünk a tömegpontrendszerrel. $t > t_p$ időpontban a rendszer kinetikus energiája:

$$2\mathcal{T} = \frac{M}{n} \dot{\mathbf{y}}^* \dot{\mathbf{y}} = \frac{M}{n} \left\{ (\mathbf{u}_0^* \mathbf{P})^2 p^2 + \sum_{k=1}^{l-1} [(\mathbf{u}_k^* \mathbf{P})^2 + (\mathbf{v}_k^* \mathbf{P})^2] \left(\sum_{j=1}^p \cos \varphi_k (t-t_j) \right)^2 + (\mathbf{u}_l^* \mathbf{P})^2 \left(\sum_{j=1}^p \cos \varphi_l (t-t_j) \right)^2 \right\}$$

a rendszer potenciális energiája

$$2\mathcal{V} = \mathbf{y}^* \mathbf{Z} \mathbf{y} = \frac{M}{n} \left\{ \sum_{k=1}^{l-1} [(\mathbf{u}_k^* \mathbf{P})^2 + (\mathbf{v}_k^* \mathbf{P})^2] \left(\sum_{j=1}^p \sin \varphi_k (t-t_j) \right)^2 + (\mathbf{u}_l^* \mathbf{P})^2 \left(\sum_{j=1}^p \sin \varphi_l (t-t_j) \right)^2 \right\}$$

tehát az összes energia

$$E = \frac{1}{2} \frac{M}{n} \left\{ (\mathbf{u}_0^* \mathbf{P})^2 p^2 + \sum_{k=1}^{l-1} [(\mathbf{u}_k^* \mathbf{P})^2 + (\mathbf{v}_k^* \mathbf{P})^2] \left[\left(\sum_{j=1}^p \cos \varphi_k (t-t_j) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^p \sin \varphi_k (t-t_j) \right)^2 \right] + (\mathbf{u}_l^* \mathbf{P})^2 \left[\left(\sum_{j=1}^p \cos \varphi_l (t-t_j) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^p \sin \varphi_l (t-t_j) \right)^2 \right] \right\}$$

vagy (24), (25) és (27) behelyettesítésével

$$E = \frac{1}{2} \frac{M}{n} \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n} \right)^2 p^2 + \sum_{k=1}^{l-1} [(\mathbf{u}_k^* \mathbf{P})^2 + (\mathbf{v}_k^* \mathbf{P})^2] \left(\frac{\sin \frac{p}{2} \varphi_k \tau}{\sin \frac{1}{2} \varphi_k \tau} \right)^2 + \frac{(P_1 - P_2 + \dots - P_n)^2}{n} \left(\frac{\sin \frac{n}{2} \varphi_l \tau}{\sin \frac{1}{2} \varphi_l \tau} \right)^2 \right\}.$$

Ha csak az egyik tömegponttal közlünk P impulzusokat, akkor (23) felhasználásával

$$E = \frac{1}{2} \frac{M}{n} \frac{P^2}{n} \left\{ p^2 + \sum_{k=1}^{l-1} 2F_p(\varphi_k \tau) + F_p(\varphi_l \tau) \right\}.$$

b) $t_j - t_{j-1} = \tau$ időközönként egyenlő, összesen p impulzust közlünk, mégpedig t_1 időpontban az első tömegponttal, t_2 időpontban a másodikkal és így tovább. $t > t_p$ időpontban a rendszer energiája:

$$E = \frac{1}{2} \frac{M}{n} \left(\left[\sum_{j=1}^p (\mathbf{u}_0 \mathbf{P}^{(j)}) \right]^2 + \sum_{k=1}^{l-1} \left[\left| \sum_{j=1}^p (\mathbf{u}_k^* \mathbf{P}^{(j)}) \sin \varphi_k (t - t_j) \right|^2 + \left| \sum_{j=1}^p (\mathbf{u}_k \mathbf{P}^{(j)}) \cos \varphi_k (t - t_j) \right|^2 + \left| \sum_{j=1}^p (\mathbf{v}_k^* \mathbf{P}^{(j)}) \sin \varphi_k (t - t_j) \right|^2 + \left| \sum_{j=1}^p (\mathbf{v}_k \mathbf{P}^{(j)}) \cos \varphi_k (t - t_j) \right|^2 \right] + \left[\sum_{j=1}^p (\mathbf{u}_l^* \mathbf{P}^{(j)}) \sin \varphi_l (t - t_j) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^p (\mathbf{u}_l \mathbf{P}^{(j)}) \cos \varphi_l (t - t_j) \right]^2 \right)$$

(23), (24) és (25) behelyettesítésével

$$E = \frac{1}{2} \frac{M}{n} \frac{P^2}{n} \left(p^2 + \sum_{k=1}^{l-1} \left[\left| \frac{\sin \frac{p}{2} \left(\frac{2k\pi}{n} + \varphi_k \tau \right)}{\sin \frac{1}{2} \left(\frac{2k\pi}{n} + \varphi_k \tau \right)} \right|^2 + \left| \frac{\sin \frac{p}{2} \left(\frac{2k\pi}{n} - \varphi_k \tau \right)}{\sin \frac{1}{2} \left(\frac{2k\pi}{n} - \varphi_k \tau \right)} \right|^2 \right] + \left[\left| \frac{\sin \frac{p}{2} \left(\tau + \frac{2n}{T} \tau \right)}{\sin \frac{1}{2} \left(\tau + \frac{2n}{T} \tau \right)} \right|^2 + \left| \frac{\sin \frac{p}{2} \left(\tau - \frac{2n}{T} \tau \right)}{\sin \frac{1}{2} \left(\tau - \frac{2n}{T} \tau \right)} \right|^2 \right] \right)$$

A gerjesztő frekvencia növelése során fellépő különböző eseteket az alábbi táblázat szemlélteti:

Intervallum jele	I.	II.		III.	IV.				
ω következő kifejezése	$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta}}$	$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 - ch^2 \Theta}}$	$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 - ch^2 \Theta}}$	$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta}}$	$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 + sh^2 \Theta}}$				
mely a $\sqrt{\left(2a - \frac{T^2 \omega^2}{(2n+1)^2}\right) \left(\frac{2}{a} - \frac{T^2 \omega^2}{(2n+1)^2}\right)} =$	$2 \cos \Theta$	$2 \sin i \Theta$		$2 \cos \Theta$	$2 \cos i \Theta$	helyettesítéssel keletkezett			
ω -nak	$0 < \omega < \frac{2n+1}{T} \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 - 1}}$	$\omega_1 = \frac{2n+1}{T} \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2(2n+1)F}{L} \cdot \frac{1}{M}}$	$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 - 1}} < \omega < \frac{2n+1}{T} \sqrt{2q}$	$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q} < \omega < \frac{2n+1}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 - 1}}$	$\omega_2 = \frac{2n+1}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2(2n+1)F}{L} \cdot \frac{1}{m}}$	$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 - 1}} < \omega < \frac{2n+1}{T} 2\sqrt{q}$	$\omega_3 = \frac{2n+1}{T} 2\sqrt{q} = \sqrt{\frac{2(2n+1)F}{2} \cdot \frac{2}{\mu}}$	$\frac{2n+1}{T} 2\sqrt{q} < \omega$	intervallumát futja be
miközben Θ parameter	$0 < \Theta < \frac{\pi}{2}$		$0 < \Theta < \text{arch } q$	$\text{arch } q > \Theta > 0$	$\frac{\pi}{2} > \Theta > 0$		$0 < \Theta$		intervallumot fut be.
A megoldási vektor: $\mathbf{y} = \mathbf{j}q \sin \omega t$ komponensei	$j_{2k-1} = a \frac{\sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta} - \sqrt{q^2 - 1}}{\cos \Theta} \frac{\sin(2n+2-2k)\Theta}{\sin(2n+1)\Theta}$ $j_{2k} = \frac{\sin(2n+1-2k)\Theta}{\sin(2n+1)\Theta}$	0 $(-1)^k$	$(-1)^{k-1} a \frac{\sqrt{q^2 - 1} - \sqrt{q^2 - ch^2 \Theta}}{sh \Theta} \frac{sh(2n+2-2k)\Theta}{ch(2n+1)\Theta}$ $(-1)^k \frac{ch(2n+1-2k)\Theta}{ch(2n+1)\Theta}$	$(-1)^{k-1} a \frac{\sqrt{q^2 - 1} + \sqrt{q^2 - ch^2 \Theta}}{sh \Theta} \frac{sh(2n+2-2k)\Theta}{ch(2n+1)\Theta}$ $(-1)^k \frac{ch(2n+1-2k)\Theta}{ch(2n+1)\Theta}$	$(-1)^{k-1} (2n+2-2k) \frac{M-m}{m}$ $(-1)^k$	$-a \frac{\sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta} + \sqrt{q^2 - 1}}{\cos \Theta} \frac{\sin(2n+2-2k)\Theta}{\sin(2n+1)\Theta}$ $\frac{\sin(2n+1-2k)\Theta}{\sin(2n+1)\Theta}$	$-\frac{M}{m} \frac{2n+2-2k}{2n+1}$ $\frac{2n+1-2k}{2n+1}$	$-a \frac{\sqrt{q^2 - sh^2 \Theta} + \sqrt{q^2 - 1}}{ch \Theta} \frac{sh(2n+2-2k)\Theta}{sh(2n+1)\Theta}$ $\frac{sh(2n+1-2k)\Theta}{sh(2n+1)\Theta}$	
A gerjesztett rezgés tovaterjedésének karaktere:	periodikus	lineáris	exponenciálisan csökkenő		lineáris	periodikus	lineáris	exponenciálisan csökkenő	

$$a = \sqrt{\frac{M}{m}}; \quad q = \frac{M+m}{\sqrt{Mm}}; \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right);$$

legyen $\zeta_k = \frac{2k\pi}{n}$ és $\psi_k = \varphi_k\tau$, akkor (27) felhasználásával az összes energia:

$$E = \frac{1}{2} M \frac{P^2}{n^2} \left\{ p^2 + \sum_{k=1}^{l-1} [F_p(\zeta_k + \psi_k) + F_p(\zeta_k - \psi_k)] + F_p(\zeta_l + \psi_l) \right\}$$

és φ_k értékét (29) adja meg.

IRODALOM

- [1] *Lagrange*: Sur les oscillations très petites d'un système quelconque des corps. Oeuvres de L. tome XI. 2^e Partie, Section VI. § 3.
 [2] *Routh*: The advanced part of a treatise on the dynamics of rigid bodies.
 [3] *Born—Kármán*: Über Schwingungen in Raumgittern. Physikalische Zeitschrift. 1912. No. 8.
 [4] *Brillouin*: Wave propagation in periodic structures. Mc Graw-Hill Book Co. 1946.
 [5] *Hostinsky*: Influence des chocs transversaux sur le mouvement vibratoire d'une corde. Bulletin international de l'Acad. tchèque des Sciences 1944. No. 24.
 [6] *Hostinsky*: Sur le spectre acoustique de la corde de Lagrange. Publications de la fac. sciences de l'Univ. Masaryk. Brno 1948. No. 297.
 [7] *T. A. Hoffmann*: Some investigations in the field of the theory of solids. Acta Physica Ac. Sci. Hungarica 1951.
 [8] *Fejér*: Untersuchungen über die Fourierschen Reihen. Math. Ann. Bd. 58. S. 51. 1903.
 [9] *Egerváry*: »Matrixfüggvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról« (M. T. A. III. oszt. Közleményei).
 [10] *Egerváry*: »On a property of the projector matrices and its application to the reduction of matrix-functions«. (Acta Sci. Math. Szeged).

ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЭЛАСТИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ ПРИМЕНЕНИЯ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

П. Рожа

Резюме

Автор желает показать, какие существенные преимущества имеет при изучении малых колебаний корпускулярных систем применение матричного исчисления построенного согласно требованиям формального и нумерического расчёта. Определение аналитической функции $f(\mathbf{A})$ матрицы \mathbf{A} , рассмотренной в § 1., позволяет определить для матриц функции $e^{\mathbf{A}t}$, $\sin \mathbf{A}t$, $\cos \mathbf{A}t$, и т. п. образующие резольвентные матрицы систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Если $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$, формулы автоматически дают каноническое разложение матрицы \mathbf{A} . Это разложение в случае симметрической матрицы соответствует преобразованию квадратичных форм в сумму квадратов; в случае же механических проблем соответствует введению нормальных координат. В § 2. рассматриваются свободные и вынужденные колебания корпускулярной струны, которая состоит из материальных точек с переменной массой. В § 3. описываются колебания корпускулярной системы, расположенной по окружности на совершенно гладком цилиндре. Указанная здесь проблема служит примером для более общего и сложного случая, когда матрица, определяющая систему дифференциальных уравнений, имеет двойные собственные значения. В § 4. рассматривается рост энергии корпускулярных систем под действием равных по величине, периодически повторяющихся импульсов.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER KLEINE SCHWINGUNGEN ELASTISCH
GEKOPPELTER KORPUSKULARSYSTEME UNTER HERANZIEHUNG DES
MATRIZENKALKÜLS

P. RÓZSA

Zusammenfassung

Es soll der Nachweis dessen erbracht werden, dass bei der Untersuchung der kleinen Schwingungen der Korpuskularsysteme die Anwendung des den Ansprüchen des formalen und numerischen Rechnens entsprechend ausgebauten Matrizenkalküls wesentliche Vorteile sichert. Die Definition der analytischen Funktion $f(\mathbf{A})$ der im 1. Abschnitt besprochenen Matrix \mathbf{A} ermöglicht ihrerseits die Definition der Funktionen $e^{\mathbf{A}t}$, $\sin \mathbf{A}t$, $\cos \mathbf{A}t$ u. s. w., welche die resolventen Matrizen von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bilden. Im Falle $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ liefern die Formeln automatisch die kanonische Zerlegung der Matrix \mathbf{A} , die im Falle einer symmetrischen Matrix mit der Transformation einer quadratischen Form in eine Quadratsumme, und im Falle mechanischer Probleme mit der Einführung von Normalkoordinaten identisch ist. Im 2. Abschnitt werden freie und erzwungene Schwingungen eines korpuskularen Saitenmodells behandelt. Die Saite besteht aus Massenpunkten zweierlei verschiedener Massen, die abwechselnd nacheinander folgen. Der 3. Abschnitt behandelt die freien und erzwungenen Schwingungen eines auf einen reibungslosen Zylinder gesetzten Massenpunktsystems, dessen Punkte längs eines Kreises äquidistant verteilt sind. Dies ist ein Beispiel für den allgemeineren und verwickelteren Fall, in welchem die Eigenwerte der die Differentialgleichung bestimmenden Matrix zweifach sind. Im 4. Abschnitt wird das Anwachsen der Energie korpuskularer Systeme unter Einfluss periodisch wiederkehrender Impulse gleicher Grösse besprochen.