EGY MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLET MEGOLDÁSÁRÓL

GYIRES BÉLA

Összefoglalás

E dolgozat a Debreceni Fizikai-Kémiai Intézet elméleti vizsgálatai közben fellépő, a (2) és (6) feltételt kielégítő (1) differenciálegyenlet megoldásának (7) alatti Dirichlet-féle sorral való előállításával foglalkozik. A szerző kimutatja, hogy amennyiben még a (24) feltétel is teljesül, a (7) alakú megoldás nem negatív x-ekre akárhányszor differenciálható olyan valós függvényt állít elő, amely akkor és csak akkor független az x-től, ha $a_1 = 0$. Végül felülről becsüli meg a szerző azt a hibát, amelyet elkövetünk, ha a (7) sornak csupán az első két tagját tartjuk meg.

A Debreceni Egyetem Fizikai-Kémiai Intézete elvi jelentőségű vizsgálatokat folytatott a heterogén reakció-kinetika tárgykörében.[1] E vizsgálatok közben lépett fel az

$$y'' + ay' + by = cy^2 \tag{1}$$

differenciálegyenlet nem negatív x-ekre való megoldásának szükségessége az

$$a > 0, \quad b > 0; \quad c > 0 \tag{2}$$

feltételek, valamint ama feltétel mellett, hogy a

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{3}$$

karakterisztikus egyenletnek

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b}) \tag{4}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b}) \tag{5}$$

gyökei nem valósak, azaz

$$a^2 < 4b. \tag{6}$$

A Fizikai-Kémiai Intézet felkérésére ezzel a feladattal az Alkalmazott Matematikai Intézet debreceni csoportja foglalkozott. A következőkben a kapott megoldást ismertetjük.

[1]) *L. Imre:* Neuere prinzipielle Bemerkungen zur heterogenen Reaktions-Kinetik. Kolloid Zeitschrift, Bd. 131. (1953), pp. 21—38. o.

Mivel az (1) differenciálegyenlet elemi integrációs módszerekkel általában nem oldható meg, célszerűnek mutatkozott a megoldásnak a *Dirichlet*-féle típusú

$$y = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu e^{\nu\lambda_1 x} \tag{7}$$

végtelen sorral való előállítása.

A következőkben a (7)-ben szereplő α_ν együtthatók kiszámítására adunk egy rekurziós képletet.

A (7) alapján ugyanis

$$y' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\lambda_1\alpha_\nu e^{\nu\lambda_1 x}, \qquad y'' = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu\lambda_1)^2 \alpha_\nu e^{\nu\lambda_1 x} \tag{8}$$

és ha

$$\begin{aligned} &\beta_1 = 0 \\ &\beta_{2k} = 2\,(\alpha_1\alpha_{2k-1} + \alpha_2\alpha_{2k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}\alpha_{k+1}) + \alpha_k^2 \\ &\beta_{2k+1} = 2\,(\alpha_1\alpha_{2k} + \alpha_2\alpha_{2k-1} + \ldots + \alpha_k\alpha_{k+1}) \\ &\qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \end{aligned} \tag{9}$$

akkor

$$y^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu e^{\nu\lambda_1 x}. \tag{10}$$

Ha a (8)-at és (10)-et az (1)-be helyettesítjük és az így kapott kifejezés jobb- és baloldalának megfelelő együtthatóit egyenlővé tesszük egymással, akkor,

$$\alpha_\nu\,[(\nu\lambda_1)^2 + a\,(\nu\lambda_1) + b] = c\beta_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{11}$$

Tekintettel arra, hogy λ_1 a (3) egyenletnek gyöke,

$$(\nu\lambda_1)^2 + a\,(\nu\lambda_1) + b = a\,(\nu - 1)\,\lambda_1 + (\nu^2 - 1)\,\lambda_1^2.$$

Ha $\nu = 1$, e kifejezés nulla és így (9) alapján α_1 tetszésszerinti komplex szám lehet. Mivel az

$$n_\nu = a\,(\nu - 1)\,\lambda_1 + (\nu^2 - 1)\,\lambda_1^2 \tag{12}$$

akkor és csak akkor lehet nulla, ha $\nu = 1$, vagy $\lambda_1 = 0$, vagy $\lambda_1 = -\dfrac{a}{\nu + 1}$ és mivel a feltételek szerint λ_1 nem lehet valós szám,

$$n_\nu \neq 0, \quad \text{ha} \quad \nu > 1.$$

Ezért a (11)-ből

$$\alpha_\nu = c\,\frac{\beta_\nu}{n_\nu} \quad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Ha tehát a (7) kielégíti az (1) differenciálegyenletet, együtthatóit, tetszés szerinti α_1 komplex számból kiindulva, a (13), a (9) és (12) alapján egyértelműen határozza meg. α_1 tetszésszerinti megválasztásával lényegében két valós számot választottunk szabadon, megfelelően annak, hogy az (1) másodrendű differenciálegyenlet általános megoldásában két valós paraméternek kell fellépnie.

A következőkben a (9) és (13) rekurziós képletekkel meghatározott együtthatókkal rendelkező (7) jobboldalának tagonkénti k-szoros differenciálásával nyert

$$S_k(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu\lambda_1)^k\, \alpha_\nu e^{\nu\lambda_1 x} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

sor konvergenciájával foglalkozunk.

Mivel

$$|n_\nu|^2 = (\nu - 1)^2\, b\, [(\nu + 1)^2 b - \nu a^2], \tag{15}$$

a (6) feltétel miatt

$$|n_\nu| > (\nu - 1)^2 b \quad (\nu = 2, 3, \ldots) \tag{16}$$

és így a (13) alapján

$$|\alpha_\nu| < \frac{c}{b}\,\frac{|\beta_\nu|}{(\nu - 1)^2} \quad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{17}$$

Ha a (9) figyelembevételével innen adódó

$$|\alpha_2| < \frac{c}{b}\,|\alpha_1|^2 \tag{18}$$

egyenlőtlenséget használjuk fel, akkor (17) és (9) alapján $\nu = 3$, 4, 5, 6 és 7 esetére egymásután igazolhatjuk a

$$|\alpha_\nu| < \frac{2}{(\nu - 1)^2}\left(\frac{c}{b}\right)^{\nu-1} |\alpha_1|^\nu \tag{19}$$

egyenlőtlenségeket.

Tegyük fel, hogy (19) $\nu = 2k$-ig igaz. Ekkor (18) felhasználásával a (9) alapján azt kapjuk, hogy

$$|\beta_{2k+1}| \leq 2\left(\frac{c}{b}\right)^{2k-1} |\alpha_1|^{2k+1} \left\{\frac{2}{(2k-1)^2} + \frac{2}{(2k-2)^2} + \frac{4}{2^2(2k-3)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3^2(2k-4)^2} + \ldots + \frac{4}{k^2(k-1)^2}\right\} \leq$$

$$\leq 2\left(\frac{c}{b}\right)^{2k-1} |\alpha_1|^{2k+1} \left\{\frac{2}{(2k-1)^2} + \frac{2}{(2k-2)^2} + \frac{k-2}{(2k-3)^2}\right\} \leq$$

$$\leq 2\left(\frac{c}{b}\right)^{2k-1} |\alpha_1|^{2k+1} \frac{k+2}{(2k-3)^2}.$$

Tekintetbe véve azt, hogy ha k 2-nél nagyobb egészszám, akkor $4k^2 - 13k + 7 > 0$, következik, hogy

$$|\beta_{2k+1}| \leq 2\left(\frac{c}{b}\right)^{2k-1} |\alpha_1|^{2k+1} \qquad (k = 3, 4, \ldots). \tag{20}$$

Ha viszont (19) egyenlőtlenség érvényességét $\nu = 2k + 1$-ig tételezzük fel, akkor ugyancsak (18) és (9) alapján

$$|\beta_{2k}| \leq 2\left(\frac{c}{b}\right)^{2k-2} |\alpha_1|^{2k} \left\{\frac{2}{(2k-2)^2} + \frac{2}{(2k-3)^2} + \frac{2}{(k-1)^4} + \frac{k-3}{(2k-4)^2}\right\} \leq$$

$$\leq 2\left(\frac{c}{b}\right)^{2k-2} |\alpha_1|^{2k} \frac{k+3}{(2k-4)^2}.$$

Mivel $k \geq 4$ esetében $4k^2 - 17k + 13 > 0$, végül is

$$|\beta_{2k}| \leq 2\left(\frac{c}{b}\right)^{2k-2} |\alpha_1|^{2k} \qquad (k = 4, 5, \ldots). \tag{21}$$

Ha a (20)-at és (21)-et a (17)-be helyettesítjük és figyelembe vesszük azt, hogy (19)-et $\nu = 2, 3, 4, 5, 6$ és 7 esetre már kimutattuk, a (19) kifejezés bármilyen 1-nél nagyobb ν-re is igaz. $\nu = 2$ esetben az ennél pontosabb (18) is fennáll.

Most már annak figyelembevételével, hogy a a (2) feltétel értelmében pozitív szám, a (4) alapján nem negatív x-ekre $|e^{\lambda_1 x}| \leq 1$ és így a (18) és (19) miatt nem negatív x-ekre

$$|S_k(x)| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |\nu^k \lambda_1| \, |\beta_\nu| \leq \tag{22}$$

$$\leq |\alpha_1| \, b^{\frac{k}{2}} \left\{1 + 2^k \left(\frac{c}{b}\right) |\alpha_1| + 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(\nu+1)^k}{\nu^2} \left(\frac{c}{b}\right)^\nu |\alpha_1|^\nu\right\}.$$

Tekintettel arra, hogy a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu+1)^k}{\nu^2} z^\nu \tag{23}$$

hatványsor konvergencia-sugara 1-gyel egyenlő, a (22) jobboldala biztosan konvergens, ha a tetszésszerint választható α_1 állandó eleget tesz a

$$|\alpha_1| < \frac{b}{c} \tag{24}$$

feltételnek. Ebben az esetben a (14) sor nem negatív x-ekre egyenletesen konvergens és így a függvénysorok tagonkénti differenciálására vonatkozó tétel szerint nem negatív x-ekre

$$y^{(k)}(x) = S_k(x)$$

Ezek alapján igaz az

I. Tétel: A (2) *és* (6) *feltételeknek alávetett* (1) *differenciálegyenletet kielégítő* (7) *Dirichlet-féle sor a* (24) *kezdőfeltétel mellett nem negatív x-ekre akárhányszor differenciálható függvényt állít elő.*

Mivel a (23) függvénysor $k = 0$ mellett a $z = 1$ helyen is konvergens, a (7) függvénysor egyenletesen konvergens nem negatív x-ekre, ha $|\alpha_1| \leq \frac{b}{c}$ és a (22) alapján

$$|y(x)| \leq \frac{\pi^2}{3} |\alpha_1|.$$

Ez lényegében azt mondja, hogy annak az $|\alpha_1| \leq \frac{b}{c}$ feltételt kielégítő (7) *Dirichlet*-féle sornak, amelynek együtthatóit a (9) és (13) rekurziós formulák határozzák meg, konvergencia-abszcisszája 0-nál kisebb szám.

Hasonló eredményre jutottunk volna akkor is, ha a (7) helyett az (5) segítségével képezett

$$y^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^* e^{\nu \lambda_2 x} \tag{25}$$

Dirichlet-féle sor szolgált volna kiindulópontul. Természetesen ekkor a (12) helyébe az

$$a(\nu - 1)\lambda_2 + (\nu^2 - 1)\lambda_2^2 = \overline{n\nu},$$

ahol a fentvonással a konjugáltra való áttérés műveletét jelöltük, és ennek alapján a (13) helyébe az

$$\alpha_\nu^* = c\frac{\beta_\nu^*}{n_\nu}$$

lépett volna, ahol a β_ν^*-kat az α_ν^*-ok a (9)-hez hasonló módon határozzák meg. A tetszésszerinti állandó itt az α_1^* és ha ezt a (24)-nek megfelelően választjuk, a (25) megoldás is nem negatív x-ekre akárhányszor differenciálható függvényt ad.

Legyen most $\alpha_1^* = \overline{\alpha}_1$, akkor teljes indukcióval kimutatható, hogy minden természetes ν-re $\alpha_\nu^* = \overline{\alpha}_\nu$. De akkor (25) alapján $y^* = \overline{y}$, azaz ha a (7) alatti megoldás

$$y = u + iv \tag{26}$$

alakú, akkor az

$$y = u - iv \tag{27}$$

is megoldása az (1)-nek.

Ha a (26), illetve (27) megoldást az (1)-be helyettesítjük, a valós és képzetes részek szétválasztása után azt kapjuk, hogy az u függvénynek ki kell elégítenie az

$$u'' + au' + bu = c\,(u^2 - v^2) \tag{28}$$

differenciálegyenletet, viszont a v kell hogy eleget tegyen a

$$v'' + av' + bv = 0 \tag{29}$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek. A (28)-nak eleget tevő u-val és a (29)-et kielégítő v-vel képzett (26) megoldást ismét az (1)-be helyettesítve arra jutunk, hogy teljesednie kell az

$$2cuv = 0 \tag{30}$$

egyenletnek.

Azokban a pontokban, amelyekben az u és első és második deriváltja eltűnik, a (28) alapján $v = 0$.

Azokban a pontokban, amelyekben $u \neq 0$, a (30) szerint kell hogy $v = 0$ legyen.

Most már v csak azokban a pontokban lehet 0-tól különböző, amelyekben $u = 0$ és $u' \neq 0$, vagy $u'' \neq 0$. De u-nak ezekben a pontokban való kétszeri folytonos differenciálhatóságára való tekintettel e pontok izolált pontok és mivel v folytonos függvény, e pontokban is $v = 0$.

Tehát a (26)-ban $v = 0$ és így a (7) és a (25) megoldás identikus.

Ezek alapján igaz a

II. Tétel: A (2) és (6) feltételeknek alávetett (1) differenciálegyenletet kielégítő és a (24) kezdőfeltételnek eleget tevő (7) D i r i c h l e t-féle sor valós függvényt állít elő.

A következőkben még kimutatjuk azt, hogy

III. Tétel: A (2) és (6) feltételeknek alávetett (1) differenciálegyenletet kielégítő és a (24) kezdőfeltételeknek eleget tevő (7) D i r i c h l e t-féle sorral előállított függvény akkor és csak akkor lehet azonosan egyenlő egy k *konstanssal, ha* k $= 0$. *Ebben az esetben a (7) sor valamennyi együtthatója 0-val egyenlő.*

Bizonyítás: Ha feltesszük, hogy a (7) sor azonosan egyenlő k-val, akkor az

$$(31) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' a_\nu z^\nu, \quad c_0 = 0$$

hatványsoinak [amelynek konvergencia-sugara az a_1-nek (24)-nek megfelelő választása mellett legalább 1-gyel egyenlő] a

$$(32) \qquad z = e^{\lambda_1 x} = \varrho(x) e^{i\varphi(x)}, \ \varrho(x) = e^{-\frac{a}{2}x}, \ \varphi(x) = \frac{x}{2}\sqrt{4b-a^2}, \ x \geq 0$$

helyeken, tehát a (32)-ből kiválasztott bármely 0-tól különböző elemekkel bíró nullsorozat elemeihez tartozó helyeken is k-val kell egyenlőnek lennie. Viszont ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkezik ezeken a helyeken az a hatványsor, amelynek a z-től független tagjának együtthatója k és az összes többi 0-val egyenlő. De akkor a hatványsorokra vonatkozó koefficiens-összehasonlítás elve értelmében[2] kell hogy

$$(33) \qquad \begin{aligned} k &= a_0 = 0 \\ c_\nu &= 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

legyen. Ezzel tételünket igazoltuk is.

Könnyen igazolható, hogy ha $a_1 = 0$, akkor a (33) már fennáll. Ennek alapján tehát igaz a

IV. Tétel: A (2) és (6) feltételeknek alávetett (1) differenciálegyenletet kielégítő, és a (24) kezdőfeltételeknek eleget tevő (7) D i r i c h l e t-féle sorral előállított függvény akkor és csak akkor azonosan nulla, ha $a_1 = 0$.

Viszont az (1) másik triviális megoldását, az $y = \frac{b}{c}$ megoldást a III. tétel értelmében a (7) alakú megoldás nem foglalja magában. Ez természetes is, hiszen e megoldás az (1)-nek nyilvánvalóan szinguláris megoldása.

A következőkben a (2) és (6) feltételeknek és a (24) kezdőfeltételnek alávetett (1) differenciálegyenletet kielégítő (7) *Dirichlet*-féle sor két első tagjának összegét számítjuk ki.

Legyen

$$a_1 = \varrho e^{i\delta},$$

ahol δ tetszőleges és $\varrho = |a_1|$ a (24) egyenlőtlenségnek eleget tevő állandó. A (4) alapján

$$c_1 e^{\lambda_1 x} = \varrho e^{-\frac{a}{2}x} \left\{ \cos\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} x + \delta \right) + i \sin\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} x + \delta \right) \right\}.$$

[1] L. pl. *Hurwitz—Courant:* Funktionentheorie. Berlin, 1929, 30. o.

A (11) szerint

$$c_2 = \frac{c\varrho^2 e^{2i\delta}}{b\,(9b-2a^2)}\,[(a^2-3b) + ia\sqrt{4b-a^2}\,]$$

és így

$$c_2 e^{2\lambda_1 x} = \frac{c\varrho^2 e^{-ax}}{\sqrt{b\,(9b-2a^2)}}\,\{\cos(\sqrt{4b-a^2}\,x + 2\delta + \psi) +$$

$$+ i\sin(\sqrt{4b-a^2}\,x + 2\delta + \psi)\}.$$

hacsak

$$\cos\psi = \frac{a^2-3b}{\sqrt{b\,(9b-2a^2)}} \qquad \sin\psi = \frac{a\sqrt{4b-a^2}}{\sqrt{b\,(9b-2a^2)}}.$$

Mivel a II. tétel értelmében a képzetes tagokat figyelmen kívül hagyhatjuk, a (7) alapján

$$y(x) = \varrho e^{-\frac{a}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\,x + \delta\right) + \tag{34}$$

$$+ \frac{c\varrho^2 e^{-ax}}{\sqrt{b\,(9b-2a^2)}}\cos(\sqrt{4b-a^2}\,x + 2\delta + \psi) + \ldots$$

Ha a (34)-ben csak az első két tagot tartjuk meg és e két tag összegét $f(x)$—el jelöljük, akkor a (19) felhasználásával

$$|y(x) - f(x)| < 2e^{-\frac{3ax}{2}}\left(\frac{c}{b}\right)^2 |\gamma_1|^3 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{c}{b}\right)^{\nu-2} |\gamma_1|^{\nu-2}.$$

A (24) alapján még inkább

$$|y(x) - f(x)| < 2e^{-\frac{3ax}{2}}\left(\frac{c}{b}\right)^2 |\gamma_1|^3 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^2},$$

amiért végül is

$$|y(x) - f(x)| < \left(\frac{\pi^2}{3} - 2\right)\left(\frac{c}{b}\right)^2 |\gamma|_1^3 e^{-\frac{3a}{2}x}.$$

Ha a (34)-ben tetszésszerinti véges számú tagot tartottunk volna meg, az elkövetett hibát hasonló módon minden nehézség nélkül meghatározhatnánk.

О РЕШЕНИИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Б. Дыреш

Резюме

В настоящей работе дается решение в виде ряда Дирихле (7) дифференциального, уравнения (1) удовлетворяющего условиям (2) и (6). Это уравнение возникло в связи с теоретическими исследованиями, ведущимися в дебреценском институте физической химии.

Доказывается, что если кроме упомянутых условий выполняется и условие (24), то решение (7) представляет собой для положительных значений, x функцию, дифференцируемую любое число раз и не зависяюшую от x тогда и только тогда, если $\alpha_1=0$. Работа, содержит и верхнюю оценку ошибки, получающейся, если отбросить все члены ряда (7) кроме первых двух.

LÖSUNG EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG

B. GYIRES

Zusammenfassung

Im Verlaufe theoretischer Untersuchungen im Physikalisch-Chemikalischen Institut der Debrecener Universität trat eine Differentialgleichung der Form (1) mit Bedingungen (2) und (6) auf. Gegenstand vorliegender Arbeit bildet die Lösung dieser Differentialgleichung mit Hilfe einer Dirichletschen Reihe. Es wird nachgewiesen, dass bei Bestehen der Bedingung (24), die Lösung der Gestalt (7) für nicht negative x eine beliebig oft differenzierbare reelle Funktion darstellt, die dann und nur dann eine Konstante ist, falls $a_1 = 0$.

Schliesslich wird eine obere Schranke für den Fehler angegeben, der entsteht, falls in (7) nur die beiden erten Glieder berücksichtigt werden.