

EGY ÚJ MÓDSZER REKURRENS SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK TÁRGYALÁSÁNÁL

TAKÁCS LAJOS

Összefoglalás

Rekurrens folyamatok alatt olyan folyamatokat ért a szerző, amelyeknél megadható egy bizonyos E esemény úgy, hogy ha ez az esemény előfordul, akkor az előfordulási ponttól számítva a folyamat a multtól függetlenül ugyanazt a sztochasztikus viselkedést mutatja. Ilyen folyamatokkal kapcsolatos kérdéseket rendszerint a visszatérési pontok közötti távolság eloszlásának meghatározására vezetik vissza. Ez a tárgyalás elég bonyolult és csak speciális esetekben vihető keresztül. A dolgozatban közölt módszer abban áll, hogy először az átlagfüggvényt, azaz a $(0, t)$ időközben előforduló E események előfordulásának várható számát határozza meg, ami a legtöbb esetben könnyen végezhető el. Az átlagfüggvény ismeretében ezután a kérdéses valószínűségek is meghatározhatók. A fenti folyamatokra példaként említi a dolgozat részecskeszámításoknál és gépalkatrészek törésével kapcsolatban fellépő folyamatokat. |

Bevezetés

Rekurrens sztochasztikus folyamatok alatt olyan folyamatokat értünk, amelyeknél megadható egy bizonyos E esemény úgy, hogy ha ez előfordul, akkor a rendszer jövő sztochasztikus viselkedése egyértelműen meg van határozva, azaz nem függ a multtól és ezen E esemény előfordulási időpontjaitól számítva a folyamat hasonló sztochasztikus viselkedést mutat. Az E eseményt rekurrens eseménynek és előfordulási pontjait a folyamat regenerációs pontjainak vagy Markov-pontjainak nevezzük. Nem szándékozunk itt ezen folyamatok általános elméletével foglalkozni. Csupán két típust ragadunk ki és arra fogjuk alkalmazni a következőkben vázolt módszert.

I. Tekintsük a $0 \leq t < \infty$ időintervallumot, amelyben $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ időpontokban előfordul egy-egy esemény. Tegyük fel, hogy a $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots; t_0 = 0$) időkülönbségek egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók, közös $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ekkor a folyamat regenerációs pontjait a $\{t_n\}$ időpontok alkotják és E jelenti egy esemény bekövetkezését.

Ezzel kapcsolatban a következő problémák merülnek fel: mi a valószínűsége annak, hogy $(0, t)$ időközben előforduló események száma $\leq n$; jelöljük ezt $W(t, n)$ -nel. Ezután meghatározzuk annak a valószínűségét, hogy $(u, u+t)$ időközben $\leq n$ esemény fordul elő és kérdezzük, hogy $u \rightarrow \infty$ esetén mihez tart ez a valószínűség. Jelöljük ezt a határértéket, amennyiben létezik, $W^*(t, n)$ -nel.

Ha az $F(x)$ eloszlásfüggvényt ismerjük, úgy $W(t, n)$ és $W^*(t, n)$ meghatározása egyszerűen keresztülvihető. Mi olyan példákat fogunk most tekinteni, amelyeknél $F(x)$ -et nem ismerjük, de az átlagfüggvényből kerülő úton meg tudjuk határozni.

II. Tekintsünk egy sztochasztikus folyamatot $0 \leq t < \infty$ időközben. Tegyük fel, hogy a folyamat csak két állapotban lehet: A vagy B állapotban. Legyen a folyamat $t = 0$ időpontban A állapotban és tegyük fel, hogy folyamatunkban az A és B állapotok váltakoznak. Legyenek az egymást követő különböző állapotokban való tartózkodás időtartamai független, pozitív valószínűségi változók. Mégpedig az A állapotban való tartózkodás időtartamának eloszlásfüggvénye: $G(x) = 1 - e^{-\mu x}$, ha $x \geq 0$ és a B állapotban való tartózkodás időtartamának eloszlásfüggvénye: $H(x)$.

Most a folyamat regenerációs pontjait mindazon időpontok alkotják, amelyekben a rendszer A állapotban van. Ugyanis ha egy időpillanatban A állapotban van a rendszer, úgy annak a valószínűsége, hogy a következő $A \rightarrow B$ átmenet $\leq x$ távolságra következik be: $G(x)$, függetlenül attól, hogy mióta tart már az A állapot. Ugyanis ha u ideje tart az A állapot, úgy ezen feltétel mellett annak a feltételes valószínűsége, hogy a következő $A \rightarrow B$ átmenet legfeljebb x időtartamon belül következik be:

$$(1) \quad \frac{G(u+x) - G(u)}{1 - G(u)} = G(x);$$

és ez független u értékétől. Megjegyezzük, hogy az (1) tulajdonság az exponenciális eloszlás kizárólagos sajátja.

A következőkben az $A \rightarrow B$ átmeneteket fogjuk tekinteni a rekurrens E eseményeknek.

Az egymást követő $A \rightarrow B$ átmenetek időpontjai közötti távolságok egyforma eloszlású független valószínűségi változók, melyek közös eloszlásfüggvénye: $F(x) = G(x) * H(x)$, azaz

$$(2) \quad F(x) = \int_0^x G(x-y) dH(y) = \int_0^x H(x-y) dG(y).$$

Ekkor felmerül az a kérdés, hogy $(0, t)$ időközben mennyi lesz az $A \rightarrow B$ átmenetek száma és a B állapotban való tartózkodás összidőtartama. Legyen $W(t, n)$ annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ időközben $\leq n$ $A \rightarrow B$ átmenet fordul elő és $\Omega(t, z)$ annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ időközben a B állapotban való tartózkodás összidőtartama $\leq z$. Jelöljék ugyanezen valószínűségeket az $(u, u+t)$ intervallumra vonatkozóan, $u \rightarrow \infty$ határesetben $W^*(t, n)$, illetve $\Omega^*(t, z)$.

Ha a $G(x)$, illetve $F(x)$ eloszlásfüggvényeket ismerjük, úgy a felsorolt valószínűségek meghatározása nem jelent nehézséget. Mi a következőkben olyan esetekkel fogunk foglalkozni, midőn ezeket az eloszlásokat nem ismerjük, de kerülő úton meg tudjuk határozni az $m(t)$ átlagfüggvényt, a $(0, t)$ időintervallumban előforduló $A \rightarrow B$ átmenetek várható számát, vagy $P_A(t)$ -t, annak a valószínűségét, hogy t időpontban A állapotban van a rendszer. $m(t)$ vagy $P_A(t)$ ismeretéből azután meghatározható $G(x)$ és $F(x)$ és ezek segítségével a kérdéses valószínűségek is.

1. §. A kérdéses valószínűségek meghatározása

I. eset.

$W(t, n)$ meghatározása. $(0, t)$ időközben $\leq n$ esemény fordul elő, ha az $n + 1$ -edik esemény a t időpont után következik be, azaz

$$(3) \quad W(t, n) = P(t < t_{n+1}) = 1 - P(t_{n+1} \leq t) = 1 - F_{n+1}(t),$$

ahol $F_{n+1}(t)$ jelenti az $F(t)$ eloszlásfüggvény önmagával való $n + 1$ -szeres konvolúcióját. Ugyanis t_{n+1} egyenlő $n + 1$ számú független valószínűségi változó összegével, melyek mindegyikének eloszlásfüggvénye $F(x)$.

Legyen $F(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja :

$$(4) \quad \varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) \quad (\Re(s) \geq 0),$$

úgy

$$(5) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} W(t, n) dt = \frac{1 - [\varphi(s)]^{n+1}}{s} \quad (\Re(s) > 0),$$

ahonnan $W(t, n)$ egyértelműen meghatározható.

A momentumok meghatározása. Ha $W(t, n)$ r -edik hatványmomentuma véges, úgy a következőképpen határozható meg :

$$(6) \quad m_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r] [1 - W(t, n)] = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r] F_{n+1}(t).$$

Ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja :

$$(7) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dm_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r] [\varphi(s)]^{n+1} = \sum_{j=1}^r \mathfrak{S}_r^j \frac{j! [\varphi(s)]^j}{[1 - \varphi(s)]^j},$$

ahol $\mathfrak{S}_r^j$ a másodfajú Stirling-számokat jelöli. Innen $m_r(t)$ egyértelműen meghatározható.

Speciálisan az $m(t)$ átlagra fennáll, hogy

$$(8) \quad m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W(t, n)] = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(t)$$

és

$$(9) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t) = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}.$$

$W^*(t, n)$ meghatározása. Jelentse az u időpontnak a közvetlen utána következő eseménytől vett távolságát η_u valószínűségi változó. Ekkor könnyen belátható, hogy annak a valószínűsége, hogy az $(u, u + t)$ időközben $\leq n$ esemény fordul elő $1 - P(\eta_u \leq t) * F_n(t)$.

Itt $P(\eta_u \leq x)$ valószínűség eloszlásfüggvény a következő explicit alakban írható fel:

$$(10) \quad \begin{aligned} P(\eta_u \leq x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_u^{u+x} [1 - F(u + x - y)] dF_n(y) = \\ &= \int_u^{u+x} [1 - F(u + x - y)] dm(y). \end{aligned}$$

Ugyanis $\eta_u \leq x$ akkor áll fenn, ha az $(u, u + x)$ intervallumban legalább egy esemény előfordul. Ez több egymást kizáró módon jöhet létre: $(u, u + x)$ intervallumban az utolsó előforduló esemény lehet az $n = 1, 2, \dots$ -ik és így a teljes valószínűségek tétele alapján kapjuk meg a (10) kifejezést, ha még felhasználjuk $m(t)$ (8) alatti előállítását.

Az η_u függvény által definiált folyamat lényegében megegyezik $J. L. Doob$ [1] munkájában vizsgált megújítási folyamat speciális esetével. Ha feltesszük, hogy $F(x)$ átlaga véges, azaz

$$\mu = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx < \infty$$

és $F(x)$ nem rácsos eloszlás, azaz nem olyan eloszlásfüggvény, amely csupán ugrásokkal növeli értékét egy adott szám bizonyos egészszámú többszöröseinél, úgy alkalmazhatjuk $Doob$ idézett munkájának 12. tételét, amely szerint létezik a következő határeloszlásfüggvény

$$(11) \quad F^*(x) = \lim_{u \rightarrow \infty} P(\eta_u \leq x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(t)] dt.$$

Megjegyezzük, hogy ha $\lim m'(t) = 1/\mu$ határérték létezik, úgy (10)-ből már következik (11) határeloszlás létezése is. Ha $F(x)$ rácsos eloszlás, úgy könnyen megmutatható, hogy $m'(t)$ -nek nincs határértéke és ilyenkor $F^*(x)$ sem létezik.

Így (11)-re való tekintettel az $u \rightarrow \infty$ határátmenetet elvégezve azt nyerjük, hogy

$$(12) \quad W^*(t, n) = 1 - F^*(t) * F_n(t).$$

Megjegyezzük, hogy ha $W^*(t, n)$ -et úgy értelmezzük, mint végtelen hosszú ideje tartó folyamat esetén annak a valószínűségét, hogy egy találmásra kiválasztott t hosszúságú intervallumban az előforduló események száma $\leq n$, úgy elegendő csupán azt feltenni, hogy $F(x)$ átlaga, μ véges legyen. Pontosabban az a helyzet, hogy most is $(u, u+t)$ intervallumra számítjuk ki a keresett valószínűséget, ahol azonban most u egyenletes eloszlást mutató valószínűségi változó $(0, T)$ szakaszon és ezután $T \rightarrow \infty$ határátmenetet végzünk. Ekkor a »nagy számok erős törvényének« alkalmazásával megmutatható, hogy u -nak a következő eseménytől vett távolságának eloszlásfüggvénye $T \rightarrow \infty$ esetén $F^*(x)$ -hez tart és ekkor csupán egyetlen feltévéssel kell élni, mégpedig azzal, hogy $\mu < \infty$. Így az előzőhöz hasonló okoskodással $W^*(t, n)$ ismét (12)-ből adódik.

Most $W^*(t, n)$ Laplace-transzformáltja $\Re(s) > 0$ -ra :

$$(13) \quad \int_0^\infty e^{-st} W^*(t, n) dt = \frac{1}{s} - \frac{[1 - \varphi(s)] [\varphi(s)]^n}{\mu s^2},$$

ahonnan $W(t, n)$ egyértelműen meghatározható.

A momentumok meghatározása. Ha $W^*(t, n)$ r -edik momentuma $m_r^*(t)$ létezik, úgy erre fennáll

$$(14) \quad m_r^*(t) = \sum_{n=0}^\infty [(n+1)^r - n^r] [1 - W^*(t, n)]$$

és ennek Laplace—Stieltjes-transzformáltja

$$(15) \quad \int_0^\infty e^{-st} dm_r^*(t) = \frac{1}{\mu s} \sum_{j=1}^r \mathfrak{S}_r^j \frac{j! [\varphi(s)]^{j-1}}{[1 - \varphi(s)]^{j-1}}.$$

Speciálisan az $m^*(t)$ átlagra fennáll, hogy

$$(16) \quad m^*(t) = \sum_{n=0}^\infty [1 - W^*(t, n)] = \frac{t}{\mu}.$$

II. eset.

$W(t, n)$ meghatározása. $W(t, n)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy $(0, t)$ időintervallumban előforduló $A \rightarrow B$ átmenetek száma $\leq n$. A korábbi gondolatmenethez hasonlóan felírható, hogy

$$(17) \quad W(t, n) = 1 - G(t) * F_n(t).$$

Legyen most

$$(18) \quad \psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x), \quad (\Re(s) \geq 0),$$

és mivel

$$(19) \quad \int_0^{\infty} e^{-sx} dG(x) = \frac{p}{p+s}, \quad (\Re(s) > -p),$$

következőleg

$$(20) \quad \varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) = \frac{p\psi(s)}{p+s}, \quad (\Re(s) \geq 0).$$

Így felírható $W(t, n)$ Laplace-transzformáltja, amely most

$$(21) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} W(t, n) dt = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{p^{n+1} (\psi(s))^n}{(p+s)^{n+1}} \right], \quad (\Re(s) > 0).$$

(21) ismeretében $W(t, n)$ egyértelműen meghatározható.

Ha $W(t, n)$ r -edik momentuma $m_r(t)$ létezik, úgy ennek Laplace-Stieltjes transzformáltja

$$(22) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dm_r(t) = p \sum_{j=1}^r \mathfrak{E}_r^j \frac{j! [\psi(s)]^{j-1}}{[p+s-p\psi(s)]^j}.$$

Speciálisan az $m(t)$ átlagra fennáll, hogy

$$(23) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t) = \frac{p}{p+s-p\psi(s)}, \quad (\Re(s) > 0).$$

$W^*(t, n)$ meghatározása. Legyen $H(x)$ átlaga

$$(24) \quad \alpha = \int_0^{\infty} x dH(x) = \int_0^{\infty} [1 - H(x)] dx < \infty,$$

úgy $F(x)$ átlagára fennáll, hogy

$$(25) \quad \mu = \alpha + \frac{1}{p} = \frac{1 + \alpha p}{p}$$

és könnyen belátható, hogy $F(x)$ -re teljesülnek azok a feltételek, amelyek lehetővé teszik Doob említett tételének alkalmazását és ekkor

$$(26) \quad W^*(t, n) = 1 - F^*(t) * F_n(t),$$

ahol $F^*(t)$ -t (11) szolgáltatja. Így szóról-szóra alkalmazható a $W^*(t, n)$ -re adott korábbi tárgyalás. Speciálisan az $m^*(t)$ átlagra most fennáll, hogy

$$(27) \quad m^*(t) = \frac{t}{\mu} = \frac{tp}{1 + \alpha p}.$$

$\Omega(t, z)$ meghatározása. Hivatkozunk [2] dolgozatunkra, amelyben megmutattuk, hogy fennáll:

$$(28) \quad \Omega(t, z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!} H_n(z) & \text{ha } 0 \leq z \leq t \\ 1 & \text{ha } z \geq t. \end{cases}$$

A $\tau_r(t)$ r -edrendű momentumok a következőképpen fejezhetők ki:

$$(29) \quad \tau_r(t) = \int_0^t z^r d_z \Omega(t, z) = r \int_0^t z^{r-1} [1 - \Omega(t, z)] dz.$$

Ezek Laplace–Stieltjes transzformáltjai idézett dolgozatunkban találhatók meg.

$\Omega^*(t, z)$ meghatározása. Ismét hivatkozunk [2] dolgozatunkra, ahol megmutattuk, hogy

$$(30) \quad \Omega^*(t, z) = \begin{cases} \frac{1}{1 + p\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!} [H_n(z) + p \int_0^z [1 - H(x)] H_n(z-x) dx] & \text{ha } 0 \leq z < t \\ 1 & \text{ha } z \geq t. \end{cases}$$

$\Omega^*(t, z)$ -nak $z = t$ helyen

$$(31) \quad \frac{p\alpha}{1 + p\alpha} \int_t^{\infty} \frac{1 - H(x)}{\alpha} dx$$

nagyságú ugrása van.

A $\tau^*(t)$ átlagértékre most fennáll, hogy

$$(32) \quad \tau^*(t) = \frac{c\rho}{1+c\rho} t.$$

Az eddigiekben azzal a kérdéssel foglalkoztunk, hogy ha ismerjük a kiindulásul szolgáló eloszlásfüggvényeket, mégpedig az első esetben $F(x)$ -et és a második esetben $F(x)$, illetve $H(x)$ -et, úgy miként lehet meghatározni a keresett valószínűségeket, illetve várható értékeket. A következőkben bemutattunk egy módszert arra vonatkozólag, hogy miként lehet ezeket a kiindulásul szolgáló eloszlásfüggvényeket kerülő úton meghatározni. Ez a módszer sikerrel alkalmazható akkor, ha a kérdéses eloszlásokat nem ismerjük, de az átlagfüggvényt közvetlenül meg tudjuk határozni; miként azt az alábbi példákban is látni fogjuk.

2. §. A kiindulásul szolgáló valószínűség-eloszlások meghatározása

II. eset.

Legyen a $(0, t)$ időközben előforduló események várható száma $m(t)$. Erre fennáll, hogy

$$(33) \quad m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x).$$

Ugyanis azon feltétel mellett, hogy az első esemény x időpontban fordul elő, a keresett várható érték: $1 + m(t-x)$. Mivel x eloszlásfüggvénye $F(x)$, ezért a feltételes várható értékek definíciója szerint:

$$m(t) = \int_0^t [1 + m(t-x)] dF(x),$$

ami megegyezik (33)-mal.

W. Feller [3] munkájában a megújuló sokaságokkal kapcsolatban foglalkozott ezzel az egyenlettel és 1. tételében kimutatta, hogy olyan feltételek mellett, amelyek esetünkben teljesülnek, (33)-nak létezik $t > 0$ -ra egyetlen nem-csökkenő $m(t)$ megoldása, amelynek Laplace—Stieltjes transzformáltja:

$$(34) \quad \int_0^\infty e^{-st} dm(t) = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}, \quad (\Re(s) > 0).$$

Ez megegyezik a (9) formulával.

Innen azt nyerjük, hogy

$$(35) \quad \varphi(s) = \frac{\int_0^\infty e^{-st} dm(t)}{1 + \int_0^\infty e^{-st} dm(t)}, \quad (\Re(s) > 0).$$

Ha kerülő úton meg tudjuk határozni az $m(t)$ átlagfüggvényt, úgy (35) segítségével megkapjuk $\varphi(s)$ -et $F(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját, amelynek ismeretében $F(x)$ egyértelműen meghatározható. $F(x)$ ismeretében pedig a 2. fejezet formulái már alkalmazhatókká válnak.

Ha $F(x)$ átlagát μ -vel jelöljük és szórásnégyzete σ^2 létezik, úgy bizonyos feltételek mellett fennáll a következő aszimptotikus előállítás:

$$(36) \quad m(t) = \frac{t}{\mu} - \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu^2} + \varepsilon_t,$$

ahol $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_t = 0$. Ha ismerjük az $m(t)$ átlagfüggvényt, úgy ezen kifejezés segítségével lehetőség nyílik arra, hogy a μ átlagot és σ^2 szórásnégyzetet egyszerűen meghatározzuk.

Megjegyzés: $m(t)$ (36) alatti aszimptotikus előállítására analitikus bizonyításokat adtak *W. Feller* [3], [4] és *S. Täcklind* [5]. Mi most *A. N. Kolmogorov* és *Ju. V. Prohorov* [6] tételének felhasználásával kimutatjuk, hogy (36) fennáll, ha $F(x)$ nem rácsos eloszlás, melynek átlaga és szórása véges.

Az idézett tétel a minket érdeklő speciális esetben a következőképpen hangzik: Legyen adva egyforma várható értékű valószínűségi változóknak $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ sorozata. Képezzük a $\zeta_\nu = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu$ összeget, ahol ν maga is valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy valamennyi m -re a $\nu = m$ esemény független $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \dots$ valószínűségi változóktól. Ekkor ζ_ν várható értékére $M(\zeta_\nu)$ -re fennáll, hogy $M(\zeta_\nu) = \mu M(\nu)$, ahol $\mu = M(\xi_n)$.

Jelölje most ζ_n ($n = 1, 2, \dots$) rendre a $(0 < t < \infty)$ intervallumban előforduló események időpontjait, azaz legyen $\zeta_n = t_n$. Ekkor $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots; t_0 = 0$). Legyen továbbá $\nu = m$, ha $t_{m-1} \leq t < t_m$, azaz ν a $(0, t)$ intervallumban előforduló események számánál eggyel nagyobb. Így $M(\nu) = m(t) + 1$ és $M(\xi_n) = \mu$. A $\{\xi\}$ változók feltételezett függetlenségéből következik, hogy az idézett tétel alkalmazható és pedig fennáll, hogy $M(\zeta_\nu) = [1 + m(t)] \mu$. Azonban $\zeta_\nu = t + \tau_t$, ahol τ_t a t időpontnak a közvetlen utána következő eseménytől vett távolságát jelenti. Így tehát

$$(37) \quad t + M(\tau_t) = [1 + m(t)] \mu,$$

azaz

$$(38) \quad m(t) - \frac{t}{\mu} = \frac{M(\tau_t)}{\mu} - 1.$$

A mondott feltételek mellett τ_t határeloszlását, mindön $t \rightarrow \infty$ (11) szolgáltatja és így könnyen adódik, hogy

$$(39) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} M(\tau_t) = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu},$$

ahonnan már következik, hogy

$$(40) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left| m(t) - \frac{t}{\mu} \right| = \frac{\sigma^2}{2\mu^2} - \frac{1}{2},$$

amit bizonyítani kívántunk.

A fentiekkel kapcsolatban a következő paradox tényeket kívánjuk fel-
említeni.

Abban az esetben, ha a ξ_n változók várható értéke μ véges, megtör-
ténhetik, hogy r_t várható értéke nagyobb, mint μ , sőt még végtelen is lehet
abban az esetben, ha $\sigma^2 = \infty$ és $t \rightarrow \infty$. Pedig első pillanatban azt gondol-
hatnánk, hogy r_t része valamelyik ξ_n -nek és így várható értéke is kisebb
 μ -nél. A paradox jelenségnek szemléletesen kifejezve az az oka, hogy a
(t_n, t_{n+1}) intervallumok közül a hosszabbak nagyobb valószínűséggel tar-
talmazzák a t pontot, mint a rövidebbek.

Tegyük fel, hogy $\sigma^2 = \infty$, és tekintsük a folyamatot t időpontban és
kérdézzük, hogy mikor fog bekövetkezni a következő esemény. Ennek a távol-
ságnak várható értéke tetszőleges nagy lehet, ha a folyamat már elegendő
hosszú ideje tart, azaz t elegendő nagy. Ha azonban úgy tesszük fel a kérdést,
hogy a t időpont után számított tetszőleges T idő alatt mennyi lesz az elő-
forduló események várható száma, úgy azt nyerjük, hogy ez $t \rightarrow \infty$ esetben
pontosan T/μ lesz. Ez a paradox tény hasonlóan magyarázható meg, mint
az előbbi paradoxon.

II. eset.

Mint már a (23) formulában is kifejezésre juttattuk, $m(t)$ átlagfügg-
vényre a $(0, t)$ időintervallumban előforduló $A \rightarrow B$ átmenetek várható
számára fennáll, hogy:

$$(41) \quad \int_0^\infty e^{-st} dm(t) = \frac{p}{p+s} \frac{1}{1-\varphi(s)}, \quad (\Re(s) > 0),$$

ahol $\varphi(s)$ -et (20) egyenlet definiálja. Innen azt nyerjük, hogy

$$(42) \quad \varphi(s) = 1 - \frac{p}{p+s} \left[\int_0^\infty e^{-st} dm(t) \right]^{-1}.$$

$\varphi(s)$ megfordításával egyszerűen megkapható $F(x)$ és a (20)-ból nyert $\psi(s)$ meg-
fordításával pedig $H(x)$. Végeredményben így az átlagfüggvény ismeretében a
kérdéses valószínűségek és várható értékek a 2. fejezet formulái alapján meghatá-
rozhatók.

Könnyen belátható, hogy most

$$(43) \quad m(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu^2} - \frac{1}{p\mu} + \varepsilon_t,$$

ahol $\varepsilon_t \rightarrow 0$ midőn $t \rightarrow \infty$. Így $m(t)$ aszimptotikus előállításából meghatá-
rozható $F(x)$ átlaga: μ és szórásnégyzete: σ^2 . Ezek ismeretében könnyen
megkapható $H(x)$ átlaga: $\alpha = \mu - \frac{1}{p}$ és szórásnégyzete: $\sigma_0^2 = \sigma^2 - \frac{1}{p^2}$.

Most azt mutatjuk meg, hogy miként lehet az átlagfüggvényt az alábbi valószínűség kiszámítására visszavezetni. Legyen $P_A(t)$ annak a valószínűsége, hogy t időpontban A állapotban van a rendszer. Ekkor fennáll, hogy

$$(44) \quad m'(t) = p P_A(t).$$

Ez a következőképpen indokolható: $m(t + \Delta t) - m(t)$ jelenti a $(t, t + \Delta t)$ időközben előforduló $A \rightarrow B$ átmenetek várható számát. Ha t időpontban A állapotban van a rendszer, aminek a valószínűsége $P_A(t)$, úgy annak a valószínűsége, hogy a következő $(t, t + \Delta t)$ szakaszban $A \rightarrow B$ átmenet jöjjön létre (1) alapján: $G(\Delta t) = p\Delta t + O(\Delta t)$, függetlenül attól, hogy mióta tart az A állapot. $(t, t + \Delta t)$ szakaszban egynél több $A \rightarrow B$ átmenet előfordulásának a valószínűsége: $O(\Delta t)$. Így könnyen belátható, hogy

$$(45) \quad m(t + \Delta t) - m(t) = p P_A(t) \Delta t + O(\Delta t),$$

ahonnan $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenettel kapjuk (44)-et.

Ezek után (42) alapján felírható, hogy

$$(46) \quad \varphi(s) = 1 - \frac{\left[\int_0^\infty e^{-st} P_A(t) dt \right]^{-1}}{p + s},$$

amely formula $P_A(t)$ meghatározására redukálja a problémát.

Megjegyezzük, hogy $P_A(t)$ -re könnyen beláthatóan fennáll a következő Volterra-típusú integrálegyenlet:

$$(47) \quad P_A(t) = 1 - p \int_0^t P_A(t-x) [1 - H(x)] dx,$$

amelynek segítségével szintén megkapható (46).

Megemlíjtük még, hogy [2] dolgozatunkban Paley—Wiener tétele alapján megmutattuk, hogy fennáll

$$(48) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_A(t) = \frac{1}{1 + \alpha p} = \frac{1}{p\mu}$$

és így ezen határérték alapján is meghatározható μ vagy α .

Most néhány példát mutatunk be a fenti módszer alkalmazására.

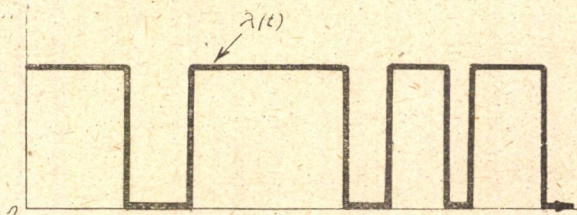
3. §. Példák

I. eset

Tekintsünk egy Poisson-folyamatot változó eseményssűrűséggel, mégpedig az eseményssűrűség legyen váltakozva $\lambda(t) = \lambda$ és $\lambda(t) = 0$ (1. ábra). Azon időtartamok hosszai, melyek alatt az eseményssűrűség λ , legyenek egymástól független valószínűségi változók ugyanazon $G(x) = 1 - e^{-px}$ ($x \geq 0$) eloszlás-

függvénnyel és azon időszakaszok hosszai, melyek alatt az eseménysűrűség zérus, legyenek szintén egymástól független valószínűségi változók ugyanazon $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Kérdés, mi a valószínűsége annak, hogy $(0, t)$ időközben n esemény fordul elő.

Ez a probléma a gyakorlatban a következő kérdések kapcsán lép fel. Tekintsünk egy elektroncsövet, amely impulzusüzemben működik és tegyük fel, hogy az impulzusok a fent leírt véletlen törvényt követik és az érdekel bennünket, hogy mennyi lesz t időtartam alatt a katódból kilépő elektronok száma. Elektronok csak akkor léphetnek ki a katódról, amikor egy impulzus folyamatban van, és pedig egy impulzus alatt a kilépés sűrűsége λ , míg különben zérus. Vagy tekintsük gépalkatrészek törését, olyan gépeknél, amelyek működésében a fenti törvény szerint szünetek állnak be és az érdekel bennünket, hogy t idő alatt hány alkatrész törésére lehet számítani, ha azokat a törés pillanatában újjal helyettesítjük. Most λ jelenti a törési sűrűséget működő gépnél. Ha a gép nem működik, úgy a törési sűrűség zérus.



1. ábra

A fenti esetben annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ időközben a λ eseménysűrűségű szakaszok összhossza $\leq z$, a (28) formula alapján

$$(49) \quad \Omega_1(t, z) = \Omega(t, t - z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pz} \frac{(pz)^n}{n!} H_n(t - z)$$

és így a keresett valószínűség

$$(50) \quad P_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda z} \frac{(\lambda z)^n}{n!} dz \Omega_1(t, z).$$

Ugyanis, ha z ideig λ az eseménysűrűség, úgy ez alatt az idő alatt előforduló események száma Poisson-eloszlást követ λz átlaggal. Hasonlóképpen írható fel a stacionárius esetre vonatkozó valószínűség $\Omega^*(t, z)$ segítségével.

Ezen formulák elég bonyolultak. Észrevesszük azonban, hogy az egymást követő események bekövetkezési időpontjainak egymástól vett távolságai egyforma eloszlású független valószínűségi változók, melyek közös eloszlásfüggvényét jelöljük $F(t)$ -vel. $F(t)$ ismeretében a 2. fejezet eredményei alapján felírhatók a kérdéses valószínűségek és várható értékek.

Most (49) segítségével $F(t)$ explicite a következőképp állítható elő:

$$(51) \quad F(t) = 1 - \int_0^t e^{-\lambda x} d_2 \Omega_1(t, x).$$

Azonban ez sem alkalmas $F(t)$ egyszerű kiszámítására. A következő út azonban célra vezet. Legyen a rendszer t időpontban A állapotban, ha $\lambda(t) = \lambda$ és B állapotban, ha $\lambda(t) = 0$. Ekkor könnyen beláthatóan a II. eset alatt leírt folyamattal állunk szemben és $P_A(t)$ -re fennáll a következő egyenlet:

$$(52) \quad P_A(t) = 1 - p \int_0^t P_A(t-x) [1 - H(x)] dx,$$

ahonnan azt nyerjük, hogy

$$(53) \quad \int_0^\infty e^{-st} P_A(t) dt = \frac{1}{s + p [1 - \psi(s)]},$$

ahol $\psi(s)$ jelöli $H(x)$ Laplace–Stieltjes transzformáltját. Most $m'(t) = \lambda P_A(t)$ és így (34) alapján:

$$(54) \quad \int_0^\infty e^{-st} dm(t) = \lambda \int_0^\infty e^{-st} P_A(t) dt = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)},$$

(53) és (54) összevetéséből az adódik, hogy:

$$(55) \quad \varphi(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda + p [1 - \psi(s)]}.$$

$\varphi(s)$ ismeretében a keresett $F(t)$ eloszlásfüggvény inverz transzformációval kapható meg.

Speciálisan $F(t)$ átlagára μ -re fennáll, hogy

$$(56) \quad \mu = \frac{1 + p\lambda}{\lambda},$$

és szórásnégyzetére σ^2 -re:

$$(57) \quad \sigma^2 = \frac{p(\alpha^2 + \sigma_0^2)}{\lambda} + \left(\frac{1 + p\lambda}{\lambda} \right)^2.$$

Itt α $H(x)$ átlagát és σ_0^2 szórásnégyzetét jelöli.

Ez a példa az I. esethez tartozik, bár magát az átlagfüggvényt a II. eset formuláival határoztuk meg.

II. eset.

Tekintsünk egy λ sűrűséggel jellemzett Poisson-folyamatot $0 \leq t$ időpontokban. Tegyük fel, hogy mindenegyes esemény elindít egy történést rendre $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots$ időtartammal. Feltesszük, hogy ezek független valószínűségi változók közös $P(\chi_n \leq x) = R(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Azt mondjuk, hogy a rendszer egy adott időpontban A állapotban van, ha abban a pillanatban nincs folyamatban törtézés és B állapotban van, ha legalább egy törtézés folyamatban van. Most az A állapotok időtartamának eloszlásfüggvénye: $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ és a B állapotoké $H(x)$, amelyet egyelőre nem ismerünk. Bennünket most az érdekel, hogy mennyi lesz t időtartam alatt az $A \rightarrow B$ átmenetek száma és a B állapotban való tartózkodás összydőtartama. Legyen $F(x) = G(x) * H(x)$, azaz két szomszédos $A \rightarrow B$ átmenet távolságának eloszlásfüggvénye. $H(x)$ és $F(x)$ ismeretében a kérdéses valószínűségek a 2. fejezet eredményei alapján felírhatók, úgy hogy csak ezek meghatározására van szükség.

Ez a példa a gyakorlatban többek között elektronsokszorozókkal történő részecskeszámlálásoknál lép fel. Ekkor λ jelenti az érkező részecskék sűrűségét és $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots$ jelentik a létrehozott impulzusok időtartamait. Ezzel a problémával foglalkozott C. Levert és W. L. Scheen [7], L. Kosten [8], W. Feller [4] munkájában Geiger-Müller-számlálókkal kapcsolatban és C. Domb [9] munkájában véletlen intervallumoknak egyenesen való eloszlásával kapcsolatban. Az említett szerzők csupán a $\chi_n = \varrho$ (állandó) esetet tárgyalják.

Most (46) formula alapján felírható, hogy $F(x)$ Laplace-Stieltjes transzformáltja:

$$(58) \quad \varphi(s) = 1 - \frac{\left[\int_0^{\infty} e^{-st} P_A(t) dt \right]^{-1}}{\lambda + s}$$

és így csak $P_A(t)$ meghatározása marad hátra. $\chi_n = \varrho$ állandó esetben:

$$(59) \quad P_A(t) = \begin{cases} e^{-\lambda \varrho} & \text{ha } t \geq \varrho \\ e^{-\lambda t} & \text{ha } t < \varrho. \end{cases}$$

Ugyanis t időpontban akkor van A állapotban a rendszer, ha $(t - \varrho, t)$, illetve $(0, t)$ időközben nem fordul elő esemény, aminek a valószínűségét (59) szolgáltatja. Tehát $\chi_n = \varrho$ (állandó) esetben:

$$(60) \quad \varphi(s) = \frac{\lambda e^{-(\lambda+s)\varrho}}{s + \lambda e^{-(\lambda+s)\varrho}}$$

és ez az egyszerűen nyert formula magában foglalja a felsorolt szerzők idevágó eredményeit. Ugyanakkor kiterjeszthető arra az esetre is, midőn χ_n tetszőleges $R(x)$ eloszlással bír. Az általános esetben ugyanis

$$(61) \quad P_A(t) = e^{-\lambda \int_0^t [1-R(x)] dx}$$

Ez a következőképpen látható be. Ha tudjuk, hogy $(0, t)$ időközben pontosan n esemény fordult elő, aminek a valószínűsége

$$(62) \quad e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

úgy ennek az n eseménynek előfordulási pontjai úgy tekinthetők, mintha $(0, t)$ intervallumra n számú egymástól független, egyenletes eloszlást mutató pontot dobánk rá. És ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlen pontban kezdődő történés befejeződik t időpontig

$$(63) \quad p_t = \frac{1}{t} \int_0^t R(x) dx,$$

és hogy mind az n véletlen pontban kezdődő történés befejeződik t időpontig a függetlenség miatt: $(p_t)^n$. Így tehát a keresett valószínűség:

$$(64) \quad P_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} (p_t)^n = e^{-\lambda t(1-p_t)},$$

ami megegyezik (61)-gyel. Ekkor $F(x)$ Laplace–Stieltjes transzformáltja:

$$(65) \quad \varphi(s) = 1 - \frac{1}{\lambda + s} \left[\int_0^{\infty} e^{-st - \lambda \int_0^t [1-R(x)] dx} dt \right]^{-1}.$$

Mivel most $\lim_{t \rightarrow \infty} P_A(t) = e^{-\lambda \varrho}$, ahol ϱ jelenti $R(x)$ átlagát, ezért (48) alapján $F(x)$ átlagára μ -re fennáll, hogy

$$(66) \quad \mu = \frac{e^{\lambda \varrho}}{\lambda}.$$

Megemlítjük még azt az általánosabb esetet, midőn nem Poisson-folyamat szerint következnek be az események, hanem fennáll, hogy az egymást követő események távolságai független valószínűségi változók ugyanazon $Q(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Tegyük fel most, hogy a létrehozott történések állandó ϱ hosszúságúak. Ekkor is fennáll, hogy az egymást követő $A \rightarrow B$ átmenetek távolságai egymástól független egyforma eloszlású valószínűségi változók

egyelőre ismeretlen $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen $F(x)$ Laplace–Stieltjes transzformáltja $\varphi(s)$, úgy (35) alapján felírható, hogy:

$$(67) \quad \varphi(s) = \frac{\int_0^{\infty} e^{-st} dm(t)}{1 + \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t)},$$

ahol $m(t)$ jelenti a $(0, t)$ időközben előforduló $A \rightarrow B$ átmenetek várható számát. Erre fennáll, hogy

$$(68) \quad m(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < \varrho \\ Q(t) - Q(\varrho) + \int_0^t m(t-x) dQ(x) & \text{ha } t \geq \varrho. \end{cases}$$

Ugyanis azon feltétel mellett, hogy az első esemény x időpontban fordul elő, a keresett várható érték: $m(t-x)$, ha $x \leq \varrho$ és $1 + m(t-x)$, ha $x > \varrho$. Mivel x eloszlását $Q(x)$ szolgáltatja, következőleg a feltételes várható értékek alapján megkapjuk $m(t)$ kifejezést. (68)-ból áttérve Laplace-transzformációra azt nyerjük, hogy

$$(69) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t) = \frac{\int_0^{\infty} e^{-st} dQ(t)}{1 - \int_0^{\infty} e^{-st} dQ(t)}$$

s így (67) szerint:

$$(70) \quad \varphi(s) = \frac{\int_0^{\infty} e^{-st} dQ(t)}{1 - \int_0^{\infty} e^{-st} dQ(t)},$$

ahonnan $F(x)$ egyértelműen meghatározható.

Most $F(x)$ átlagára (70) alapján fennáll, hogy

$$(71) \quad \int_0^{\infty} x dF(x) = \frac{\int_0^{\infty} x dQ(x)}{1 - Q(\varrho)}$$

$F(x)$ ismeretében a kérdéses valószínűségek könnyen meghatározhatók.

Csupán megemlítjük, hogy a fenti módszer sikerrel alkalmazható bizonyos incidenciák kérdéseire is.

- [1] *J. L. Doob*: Renewal theory from the point of view of the theory of probability [Transaction Amer. Math. Soc. Vol. 63 (1948) 422—438. o.].
- [2] *L. Takács*: Occurrence and coincidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration [Acta Math. Hung. Vol. 2 (1951) 275—298. o.].
- [3] *W. Feller*: On the integral equation of renewal theory [Annals of Mathematical Statistics Vol 12 (1941) 243—267. o.].
- [4] *W. Feller*: On probability problems in the theory of counters [Courant Anniversary Volume, 1948. 105—115. o.].
- [5] *S. Täcklind*: Fourieranalytische Behandlung vom Erneuerungsproblem [Skandinavisk Aktuarietidskrift (1945) 68—105. o.].
- [6] А. Н. Колмогоров и Ю. В. Прохоров: О суммах случайного числа случайных слагаемых, [Усп. матем. наук, том 4 (1949), выш. 4 (32), 168—172].
- [7] *C. Levert and W. L. Scheen*: Probability fluctuation of discharges in a Geiger—Müller counter produced by cosmic radiation [Physica, Vol. 10 (1943) 225—238. o.].
- [8] *L. Kosten*: On the frequency distribution of the number of discharges counted by a Geiger—Müller counter in a constant interval [Physica Vol. 10 (1943) 749—756. o.].
- [9] *C. Domb*: The problem of random intervals on a line [Proc. Cambridge Phil. Soc. Vol. 43 (1947) 328—341. o.].

НОВЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ РЕКУРРЕНТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Л. Такач

Резюме

Под рекуррентными процессами подразумеваются такие процессы, в которых можно задать некоторое событие E так, что если событие E происходит, то считая от момента происхождения, процесс — независимо от прошлого — показывает такое же стохастическое поведение и в будущем. Вопросы, связанные с упомянутыми процессами обычно сводятся к определению распределения расстояний между моментами возвращения. Такая трактовка является довольно сложной и может быть проведена только в специальных случаях. Описанный в работе метод состоит в том, что сначала определяем функцию среднего значения, т. е. ожидаемое число повторений событий E в интервале $(0, t)$. В большинстве случаев это легко провести. Зная эту функцию мы, можем определить нужные нам вероятности. В качестве примера для вышеупомянутых процессов упоминаются процессы происходящие в счетчиках и в связи с ломкой деталей.

A NEW METHOD FOR DISCUSSING RECURRENT STOCHASTIC PROCESSES

L. TAKÁCS

Summary

Processes which after every occurrence of some event E show the same stochastic behaviour independently of their past, are termed recurrent. Problems connected with them are usually traced back to the determination of the distribution of the recurrence time. This type of discussion is rather complicated, and can only be applied to special cases.

The method proposed in this paper consists in determining first the average function, i. e. the expected number of occurrences of event E in the time interval $(0, t)$, which in most cases can easily be done. Knowing the average function, the probabilities in question can be determined in a very simple manner.

Examples of such processes are those occurring in counters and in connection with breakdown of machinery.