

ÚJ KÉSZÜLÉK FOURIER-SZINTÉZIS ÉS ANALÍZIS, VALAMINT HASONLÓ SORFEJTÉSI FELADATOK ELVÉGZÉSÉRE

MEDGYESSY PÁL

Összefoglalás

Alkalmazott matematikai vizsgálatoknál sokszor van szükség empirikus függvényeknek valamilyen ortogonális függvényrendszer szerint történő kifejtésére, valamint adott együtthatók mellett az ortogonális függvényrendszer szeleteinek grafikus előállítására. Példa erre a Fourier-analízis és szintézis. A feladat lényegében két függvény szorzata integráljának előállítása, illetve egyes függvények grafikus összeadása. Az ismertetett készülék egyszerismindenkorra elkészített sablonok segítségével felrajzolja az említett függvény-szorzatokat, illetve bizonyos konstansokkal szorozza és grafikusan összeadja a sablonokon lévő függvényeket. Mechanikus, az eddigiektől eltérően egyetlen kezelőt igényel, a sablonokat nem veszi mechanikusan igénybe és megfelelő sablonokkal bármilyen ortogonális függvényeknél felhasználható, nem csak harmonikusoknál. Felhasználható függvénygörbék grafikus összeadására, szorzására és bizonyos transzformálására is.

Alkalmazott matematikai vizsgálatoknál sokszor van szükségünk empirikus függvények ortogonális függvényrendszer szerint történő kifejtésére. A kifejtés ellenőrzésére — és más célokra is — szükséges továbbá adott együtthatójú ortogonális függvényrendszer szeleteinek előállítása.

Mindkét eljárás gyors elvégzésére matematikai gépek készültek. A sorfejtés szorzat-integrálok kiszámítását kívánja, a sorszeletek előállítása pedig ortogonális rendszer függvényeinek grafikus összeadását.

A szorzat-integrálok kiszámítására számos gépet szerkesztettek [1]. Legismertebbek az ú. n. Stieltjes-planiméterek [2]. A gépek mechanikusak vagy elektronikusak. Utóbbiak [3] nagy hátránya, hogy pontatlanabbak a mechanikusoknál. A mechanikusok pedig — még a legmodernebbek is [4] — vagy két kezelőt, vagy alkatrészek mechanikus mozgatására alkalmas szilárd sablonokat kívánnak. Mindez számos nehézséget von maga után.

Az összegezés elvégző gépek úgyszólván kizárólag a Fourier-szintézis céljaira készülnek. Hatalmas irodalmuk van [5]. Más függvénytípusok összegezésére azonban kidolgozott készülékek nincsenek.

Egy problémával kapcsolatban [6] felmerült annak szükségessége, hogy empirikus függvényeket Fourier-, ill. Hermite-sorba fejtünk, majd a sorfejtés együtthatóit bizonyos konstansokkal szorozva, az így nyert új mennyiségekkel, mint együtthatókkal Fourier-, ill. »Hermite-szintézist« végezzünk, vagyis

$$F(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \Phi_k(x)$$

típusú függvényeket állítsunk elő, ahol $\Phi_k(x)$ a k indexű harmonikus, ill. Hermite-függvény.

Az eljárás gyors elvégzésére gondoltuk ki az alább ismerttetendő gépet, amely egyszersmindenkorra elkészített sablonok segítségével egyrészt előállítja a sorfejtésnél fellépő függvényszorzatokat, ill. azok integrálját, másrészt a sablonokon szereplő függvényeket bizonyos konstansokkal (az »amplitudókkal«) szorozva, lépésről lépésre összegezi őket. Működése mechanikus, egyetlen kezelőt igényel és a sablonok mechanikailag nincsenek igénybevéve. A legkényelmesebb megoldást közöljük; a kényelem rovására bizonyos egyszerűsítések bevezethetők.

Ábránk külön mutatja a készülék asztalkáit (I) és az összeadó (II), ill. szorozóberendezést (III). Technikai részletezésre nem törekedhettünk; sokféle kivitel lehetséges.

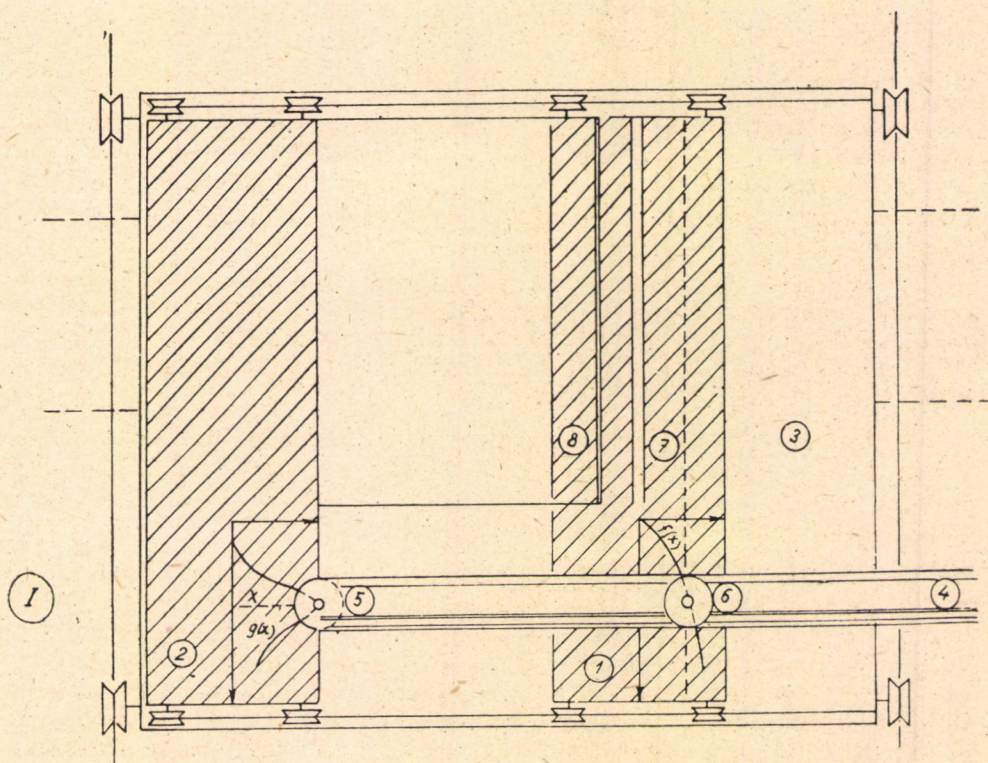
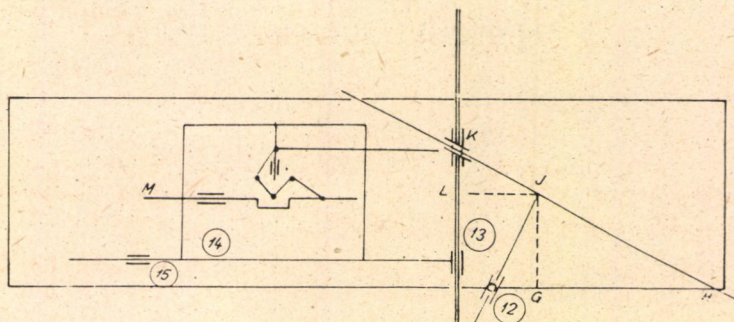
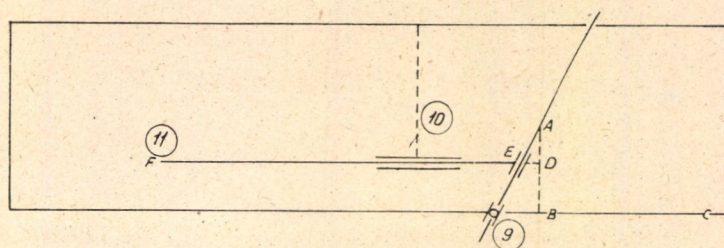
A sorfejtés alapjául szolgáló függvényeket különböző indexekre egyszersmindenkorra egyforma léptékben megrajzoljuk. Ezek a »sablonok«. A sablon az (1) asztalkára kerül, koordinátatengelyei megadott egyenesekbe esnek. Az a függvény, amelyet a sablon-függvénnyel szorzunk, vagy amelyet hozzáadunk ahhoz — a sablon léptékében felrajzolva a (2) asztalka megadott helyére kerül. (1) és (2) a (3) asztalkán jobbra-balra mozgatható, (3) pedig fel-le. Ily módon mindkét görbe tetszőleges irányban elgurítható a (4) binokuláris lupe objektívjei, (5) és (6) alatt. A lupe okulárjában egyesítve látható mindaz, ami (5), ill. (6) alatt fekszik. (1) és (2)-t egy-egy kezünkkel (ill. alkalmas készülékkel) megfelelően mozgatva elérhető, hogy (6) fonálkeresztjének közepét a (2) görbéjének egy pontja felett látjuk és ugyanitt látjuk az (1) sablon-görbéjének egy pontját. Az elrendezésből kifolyólag mindkét görbe ugyanazon abszcisszájú pontját hoztuk ily módon a fonálkereszt alá.

A gép működése közben (1) és (2) megfelelő vezetésével el kell érünk azt, hogy mindkét görbén (vagyis a két görbe metszéspontján) állandóan rajta lássuk a fonálkeresztet. Ekkor (2) az (5) középpontjához viszonyítva $g(x)$ -szel mozdult el balra, (1) pedig $f(x)$ -szel, hogyha (3)-at x -szel toltuk el felfelé.

Ezeket az elmozdulásokat visszük át a (II) összeadó, ill. a (III) szorozóberendezésre. Ezek az (I) szaggatott vonallal jelzett része fölött foglalnak helyet.

Nézzük először az összeadást.

A (7) vajatba kapaszkodik (1) mozgása közben a (9) gomb. Ez a gomb a BC egyenesben mozog és eközben elforgatja az A -n átmenő AE rudat. A a (6) fonálkeresztjén átmenő egyenesen, mint alapírányon fekszik. $AB = k$ a készülék állandója, (9) elmozdulása absz. értékben nyilván $f(x)$. Az A -n átmenő rúd elmozgatható hüvely van, amely E csukló segítségével a (10) vezetéken jobbra-balra mozgatható rúdhoz kapcsolódik. (10)-et rögzíthetően fel-le mozgathatjuk. (11)-ben író van, amely a (2) felső részén rögzített papírhoz nyomódik.



1. ábra

EF meghosszabbítása AB -t D -ben metszi. Ha (9) $f(x)$ -szel mozdult el balra, E elmozdulása a (6)-ban elképzelt és az (1)-en levővel azonos irányítású koordinátarendszerben

$$ED = -\frac{AD}{k} \cdot f(x) = \alpha \cdot f(x),$$

ahol $\alpha < 0$, ha AD A -tól lefelé mutat és $\alpha > 0$, ha ellenkező irányban. Az A -n átmenő rúd lehet olyan hosszú is, hogy $|AD| > AB$; ekkor $\alpha > 1$ lesz. (1) görbéjének beállításakor tehát (11) $\alpha \cdot f(x)$ -szel mozdul el az addig nyugvó (2) felett. Ha most (2)-t $g(x)$ -szel elmozdítjuk, (11) (2)-höz viszonyítva $g(x) + \alpha \cdot f(x)$ -szel mozdul el. Ha tehát a két görbét a leírt módon végigvezetjük a fonálkereszt alatt, (2) felső részére a (11) $f(x)$ és $g(x)$ -szel egyező léptékben, egyező irányítású koordinátarendszerben felrajzolja $g(x) + \alpha \cdot f(x)$ -et.

AD -t úgy állítjuk be [az FE -t (10)-zel fel-le mozgatva], hogy $\frac{AD}{k}$ az előírt érték legyen (szükség esetén arányosan csökkentjük a méreteket). Lényegtelen, hogy közben (11) is fel-le vándorol, mert ez csak azt jelenti, hogy (2)-n különböző α -knál másutt lesz az összeg-görbe origója; ez közömbös.

Azonnal látható, hogy a készülék egyirányú affin transzformációt végez el. Így pl. (1)-en körvonalat helyezve el, (2)-t pedig rögzítve (12) ellipszist rajzol; paraméterei könnyen megadhatók.

Az említett $F(x)$ összeget így állítjuk elő lépésről lépésre:

Beállítjuk az A_1 együtthatónak megfelelő AD -t, (1)-re $\Phi_1(x)$ -et helyezzük, (2)-t rögzítjük. Ekkor (11) $A_1 \cdot \Phi_1(x)$ -et rajzolja fel. Most ezt a görbét helyezzük (2)-re, (1)-re pedig $\Phi_2(x)$ -et, míg AD -t A_2 -nek megfelelően állítjuk be. Mindkét asztalkát végigvezetve, (11) $A_1 \cdot \Phi_1(x) + A_2 \cdot \Phi_2(x)$ -et rajzolja fel. Az eljárást folytatjuk, míg $\Phi_N(x)$ -ig el nem jutottunk.

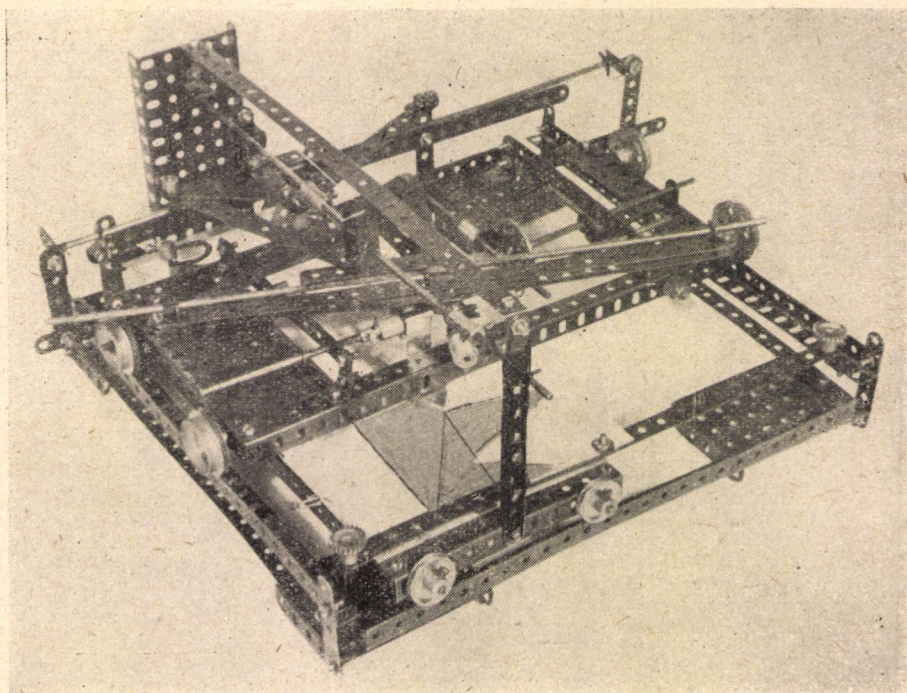
Két függvény szorzatát így képezi a készülék:

A szaggatott vonalakkal határolt rész fölé most a (III) berendezés kerül. I -ben két, egymásra merőleges rúd forog. Az egyik a (12) hüvelyt hordja. Ennek a gombja a (7) vájatban marad, míg (1) mozog és minthogy (12) a GH egyenesben mozoghat csak, (12) elmozdulása $f(x)$ -szel egyenlő abszolút értékben; $\overline{IG} = k_1$ műszerállandó. Az I -n áthaladó másik rúdon mozog a K -nál lévő kettős hüvely. Ezen halad át a (8), ill. (13) rúd, amely (2)-höz van szilárdan kapcsolva. A méretek megfelelő választásával elérhető, hogy amikor (5) alatt az abszcisszatengely van, (13) épp I -n megy át. Ha most (2)-t $g(x)$ -szel balra toljuk, (13) is $g(x)$ -szel mozdul el: $\overline{LI} = g(x)$. Ha tehát (1) és így (12) $f(x)$ -szel mozdult el, ugyanakkor pedig (2) és (13) $g(x)$ -szel, LK értéke $f(x) \cdot g(x)$ lesz. Minthogy ez az elmozdulás az abszcisszatengelyekkel párhuzamos, még át kell alakítani erre merőleges mozgássá. Erre sokféle egyszerű megoldás (pl. fogasléc, csuklós szerkezet) található. Az ábra a csuklós szerkezetet mutatja: (14). (14)-et (13) állandóan magával viszi [ide-oda csúszik a (15)-tel jelképezett vezetékben]. (14) a hozzá viszonyítva fellépő LK elmozdulást arra merőlegesbe viszi át; ezt a mozgást végzi az M -ben elhelyezett író. Az áttételek olyanok, hogy ha LK I -től felfelé mutat, M jobbra mozdul el. Ekkor az író ugyanolyan koordinátarendszerben rajzol, mint amilyenben az összeszorozandó görbék vannak. Világos, hogy M (13)-hoz, ill. (2)-höz viszo-

k_1

nyitva mozdul csak el. Ha tehát mindkét görbét végigvezetjük a fonálkereszt alatt elgördülő papíron [melyet (2) felső részére erősítettünk], a két függvény szorzatának görbét kapjuk lerajzolva $\frac{1}{k_1}$ konstans szorzótól eltekintve.

Ha most a szorzatfüggvény integrálja szükséges, legegyszerűbb M -hez kötni egy planiméter vezetőcsúcsát, miközben a planiméter fix pontját (2)-höz rögzítjük. A két görbe végigjárása után az abszcisszatengelyeken visszafutva



M is az abszcisszatengelyen fut végig s így a planiméter a szorzatfüggvény integrálját adja meg az $\frac{1}{k_1}$ szorzótól eltekintve.

(II) és (III) könnyen egyesíthető egyetlen készülékben is. Ekkor némi átkapcsolás után a szükséges berendezés fog működni.

Ha Fourier-analízis szükséges, a sablonok bizonyos léptékben $\varphi(x) = \sin \frac{2n\pi}{l} x$ ($n = 1, 2, \dots$)-t ábrázolják, előre megadott l -lel. Ilyenkor a feldolgozandó görbét előbb még a megfelelő méretre kell hoznunk. A cos-os tagok együttthatoinak megállapításakor a sablont negyed-periódushosszal eltolva kell alkalmazni. Szintézisnél az eredményt legtöbbször nem is kell grafikusan átalakítani.

A gép fő hátrányának a feldolgozandó görbe átrajzolását kell tekintenünk. Mindenesetre szerkeszthető olyan készülék is, amely ezt a hátrányt kiküszöböli. Erről itt beszélni azonban túl messze vezetne.

A gép fő előnyének a szintézis elvégzését látjuk. Figyelemreméltó, hogy nincs harmonikus függvényekhez kötve, mint a Fourier-szintetizátorok, amellet pedig teljes egészében megadja a görbét nemcsak pontonként, mint a különben is fáradságos numerikus eljárás.

Ha a binokuláris lupét mellőzni akarjuk, a készüléket némileg át kell alakítani. Ekkor a sablonokat átlátszó lemezre (pl. celluloid) rajzoljuk, vagy papírból vágjuk ki; ez alatt mozoghat a másik görbe. Metszéspontjuk az eljárás alatt mutató, vagy leolvasó — lupe fonálkeresztje alatt tartandó. Közelebbi részletezés túllépné cikkünk kereteit; csak azt említjük meg, hogy a gép primitív modelljét sikerült »Märklin« fémépítőszekrény alkatrészeiből megépíteni s bebizonyosodott, hogy a vázolt elgondolásnak mechanikai akadályai nincsenek. Ezt a modellt a fénykép mutatja.

IRODALOM

[1] L. pl. F. A. Willers: Mathematische Maschinen und Instrumente. Berlin, 1951. 225—235. o.

[2] L. pl. F. A. Willers, i. m. 229. o.

[3] A. B. Macnee: A high speed product integrator. Rev. Sci. Instr. 24. No. 3. (March, 1953), 207. o.

[4] L. pl. E. H. Winkler: Principle and design of a new type Stieltjes integrator Rev. Sci. Instr. 22. (1951). 406—410. o.

[5] L. pl. F. A. Willers, i. m. 220., vagy М. Г. Серебренников. Гармонический анализ, Москва 1948. vonatkozó fejezetét.

[6] L. szerző »Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire« c. cikkét a Kiadvány más helyén.

НОВЫЙ ПРИБОР ДЛЯ СИНТЕЗА И АНАЛИЗА ФУРЬЕ И ПОДОБНЫХ ЗАДАЧ

П. Меддеши

Резюме

При исследованиях в области прикладной математики часто нужно разложить эмпирические функции в ряд по некоторой ортогональной системе функции и представлять отрезкой ортогонального ряда при данных коэффициентах графически.

Важным примером этого является анализ и синтез Фурье. Задача заключается по существу в представлении интеграла произведения двух функций и в графическом сложении некоторых функций. Описываемый прибор вычерчивает упомянутые произведения функций с помощью изготовленных раз навсегда шаблонов, или он умножает функции на шаблонах на некоторые константы и слагает их графически. Прибор работает механически и требует только одного обслуживателя (вместо двух). Шаблоны не подвергаются механической нагрузке. С надлежащими шаблонами прибор употребляем не только при гармонических, а также при любых других ортогональных функциях. Далее он может быть использован для графического умножения и сложения и некоторого преобразования графиков функций.

UN APPAREIL NOUVEAU POUR LA SYNTHÈSE ET ANALYSE DE FOURIER AINSI QUE POUR DES PROBLÈMES ANALOGUES

P. MEDGYESSY

Résumé

En quelques recherches de mathématiques appliquées, nous ayons fréquemment besoin du développement d'une fonction empirique suivant un système quelconque des fonctions orthogonales, ainsi que de la présentation graphique des segments d'une série des fonctions orthogonales, les coefficients étant donnés. Nous citons l'analyse et synthèse de Fourier comme exemple. Au fond, notre problème est conforme à la formation de l'intégral du produit de deux fonctions ou à l'addition graphique de certaines fonctions. Avec l'aide des chablon préparés une fois pour toutes, l'appareil en question peut dessiner les séries de fonctions mentionnées ou, après avoir multiplié par certains constants, il peut additionner graphiquement les fonctions sur les chablon. Il est mécanique et exige un seul manipulateur au lieu de deux. Les chablon ne sont pas mis à contribution mécanique. Avec des chablon convenables, l'appareil peut utiliser en cas de n'importe quelles fonctions orthogonales non seulement des fonctions harmoniques. Il peut aussi utiliser pour l'addition, multiplication et transformation (dans un certain sens) des graphiques des fonctions quelconques.