

A RAKTÁRKÉSZLET PÓTLÁSÁRÓL II.

A KÉSZLETPÓTLÓ RENDELÉS

L. ZIERMANN MARGIT

Összefoglalás

A cikk egy olyan üzemmel foglalkozik, amelyben több egyforma gép működik és mindegyik gépben ugyanolyan típusú alkatrészek kerülnek felhasználásra. Az egyes alkatrészek előbb vagy utóbb törés következtében tönkremennek és akkor újjal kell helyettesíteni ezeket. Így a raktáron levő tartalékalkatrészek száma állandóan fogy, ezért készletpótló rendelés, utánrendelés válik belőlük szükségessé.

Kérdés már most, mikor és mennyi alkatrészt kell rendelnünk ahhoz, hogy eljárásunk gazdaságos legyen: azaz egyrészt, hogy az alkatrészek ne heverjenek hosszú ideig raktáron, de másrészt viszont ne kerüljön sor túl gyakran rendelésre.

A probléma tárgyalására a következő egyszerű s a gyakorlat követelményeit jól kielégítő utánrendelési terv szolgál: ha a raktárkészlet r_0 -ra, az ú. n. törzskészletre apad le, úgy azonnal rendelünk r számú alkatrészt. r_0 meghatározásával az I. dolgozat foglalkozik. Ebben a cikkben a szerző az utánrendelés nagyságát határozza meg, azaz megadja r -nek azt az optimális értékét, amely a fentebb említett és egymásnak meg-
lehetősen ellentmondó gazdaságossági követelményeket a lehető legjobban kielégíti.

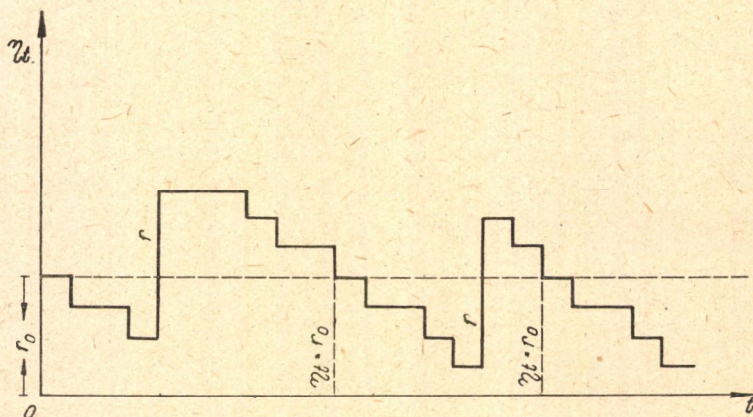
A termelésben részvevő gépek alkatrészei az igénybevétel következtében előbb vagy utóbb használhatatlanná válnak (törés, kopás stb. folytán) és ekkor ki kell cserélni őket. A folyamatos termelés és a tervgazdálkodás megköveteli, hogy ezekből az alkatrészekből egy bizonyos mennyiséget raktáron tartsunk. Ha egy alkatrész elkopik, vagy eltörik, a raktárunkon lévő alkatrészek egyikével kicseréljük. Ilyen módon a tartalékkészlet állandóan fogy, idővel gondoskodnunk kell a kiegészítéséről, ezért időközönként bizonyos számú darabot rendelünk a szóbanforgó alkatrészfajtából. Míg a megrendelés befut, az ú. n. pótlási idő alatt is sor kerülhet alkatrész-cserére s így előfordulhat az, hogy egy, esetleg több gép áll mindaddig, míg a megrendelt alkatrészek megérkeznek. Kérdés tehát, hogy *mikor és mennyi* alkatrészt kell rendelni, ha azt akarjuk, hogy gazdaságosan termeljünk, azaz hogy

1. minél kevesebb idő essen ki a termelésből gépállás miatt;
2. minél ritkábban kerüljön sor rendelésre (rendelés, szállítás stb. költségek csökkentése céljából);
3. ne heverjen túl sok alkatrész a raktáron (mert ez a szükségesnél nagyobb forgóalap lekötését jelenti).

Ezen — egymásnak meg lehetőséggel ellentmondó — követelményeket kell szemelőtt tartanunk a pótlási terv elkészítésekor.

A raktárkészlet időbeli változását az 1. ábra tünteti fel. Az ábrán a vízszintes tengelyen az idő szerepel,* a függőleges tengelyen pedig a raktárkészlet (darabszám). A raktáron lévő tartalékalkatrészek darabszámát t időpontban r_t valószínűségi változóval jelöljük. r_t értéke 1-gyel csökken abban a pillanatban, amikor egy alkatrész eltörik (ugyanis a hibásat azonnal kicseréljük egy, a raktárkészletből kivett újjal) s megnövekszik abban a pillanatban, amidőn a rendelt alkatrészek megérkeznek, mégpedig a megérkezett alkatrészek számával.

Meggondolásainkat a következő utánrendelési tervre alapozzuk:** Ha a raktáron lévő alkatrészek száma r_0 -ra csökkent, úgy azonnal rendelünk r darab alkatrészt. A készletpótló rendelés időpontja tehát az a t időpont, amelyben a raktárkészlet éppen r_0 értékre csökken le. A pótlási idő alatt is előfordulhat alkatrész-csere, tehát a raktárkészlet r_0 alá is csökkenhet, sőt teljesen ki is fogyhat; ekkor természetesen nem tudjuk a raktárból fedezni a



1. ábra

törött alkatrészeket, ezért gépállásra is sor kerülhet. A megrendelt r számú alkatrész megérkezésekor a raktárkészlet r -rel megnövekszik. A gazdaságos pótlási terv tehát r_0 és r értékének helyes megválasztásán múlik.

Rényi A. és Szentmártony T. [1] dolgozatukban megállapították, hogy mekkora legyen a szóbanforgó alkatrészfajtából tartalékolandó azon legkisebb mennyiség (az ú. n. törzskészlet, az ábrán r_0), amelyre ha a tartalék lepad, azonnal rendelünk, mert a termelés folyamatossága — bizonyos megkövetelt biztonság mellett — csak ekkor biztosítható. Az említett cikkben a szerzők lényegében a pótlási idő alatti cserék várható számát és szórásnégyzetét számítják ki és így határozzák meg r_0 értékét. Nem foglalkoznak azonban külön annak a vizsgálatával, hogy mekkora legyen a mindenkorai rendelés darabszáma (r), csak azt jegyzi meg, hogy r nem lehet kisebb r_0 -nál, és az egy-

* Idő alatt mindig üzemidő értendő.

** Természetesen sokféle más pótlási terv is számításba jöhet, de az itt vázolt látszik a legegyszerűbbnek és a gyakorlati követelményeket is leginkább kielégítőnek. (Gondolhatnánk arra is pl. hogy szabályos időközökben rendelünk és a mindenkorai rendelés nagyságát a pillanatnyi raktárkészlettel tesszük függővé.)

szerűség kedvéért $r = r_0$ -al számolnak. Jelen dolgot — bizonyos feltételek mellett — r meghatározásának kérdését tárgyalja.

Tegyük fel, hogy egy üzemben m számú egyforma gép működik, egyforma alkatrészekkel. Ez a feltevés azt jelenti, hogy minden egyes gépalkatrészre nézve a törési valószínűség ugyanakkora. A továbbiakban eltekintünk az alkatrészek kopásától és feltesszük, hogy egy alkatrész elkopása előtt majdnem bizonyosan eltörik, továbbá, hogy az alkatrészek törése csupán a géptől és nem az alkatrészek »életkorától« (állapotától) függ.

Mindezen feltételeket matematikai szempontból a következőképen fogalmazhatjuk meg:

Legyen annak a valószínűsége, hogy működő gép t és $t + \Delta t$ időpontok között eltör egy alkatrészt: $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, ahol λ az illető gép törési sűrűségét jelenti; minél nagyobb λ , annál sűrűbben történik törés és minél kisebb, annál ritkábban. Mivel feltettük, hogy az üzemben m egyforma gép működik, ezért az m számú alkatrésze az együttes törési sűrűség $\Lambda = m\lambda$.

Feltevéseinkből következik, hogy annak a valószínűsége, hogy egy alkatrész élettartama t -nél kisebb: $G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, azaz exponenciális eloszlású.

Az exponenciális eloszlás ugyanis az egyetlen olyan eloszlás, amely azzal a sajátsággal bír, hogy ha tudjuk, hogy valamely adott alkatrész már bizonyos ideje, mondjuk u ideje működik, úgy annak a valószínűsége, hogy a rákövetkező t időtartam alatt eltörik, független attól, hogy mióta működik már az alkatrész. Ez abból következik, hogy $G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ az egyetlen olyan eloszlásfüggvény, amely kielégíti a következő összefüggést:

$$\frac{G(u+t) - G(u)}{1 - G(u)} = G(t).$$

Itt a baloldal annak a valószínűségét jelenti, hogy egy u ideje működő alkatrész ($u, u+t$) időközben eltörik, míg a jobboldal annak a valószínűsége, hogy egy újonnan beállított alkatrész a t időtartam alatt eltörik. Törési törvényünk tehát valóban azt jelenti, hogy az alkatrészek nem »öregszenek«, hanem csupán véletlen »balesetek« következtében törnek el. Az elmondottakból viszont az is következik, hogy egy gépben működő alkatrész eltörésének időpontjai — ha a törés pillanatában új alkatrésszel cseréljük ki — Poisson-folyamatot alkotnak.

A továbbiakban tegyük fel, hogy a pótlási idő eloszlásfüggvénye $F(x)$ tetszőleges. Várható értéke legyen

$$\alpha = \int_0^{\infty} x dF(x).$$

I. A törzskészlet r_0 meghatározása

A következő megfontolásokat alkalmazhatjuk:

A) r_0 értékét olyan nagyra kell választani, hogy a pótlási idő alatt nagy biztonsággal fedezze az esetleges töréseket. A pótlási idő alatt $j = 0, 1, 2, \dots, r_0, r_0 + 1, \dots, m$ törés fordulhat elő. Ha a törések száma $\leq r_0$, úgy az eltört alkatrészeket a törzskészletből pótolhatjuk, míg r_0 -nál több törés esetében egyes gépek leállítására kerül sor. Éppen ezért r_0 úgy határozandó meg, hogy a törések száma nagy valószínűséggel ne legyen nagyobb nála.

Annak a valószínűsége, hogy a pótlási idő alatt j törés történik :

$$p_j = \int_0^{\infty} e^{-\Lambda x} \frac{(\Lambda x)^j}{j!} dF(x) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, r_0)$$

és kell hogy

$$p_0 + p_1 + \dots + p_r \geq 1 - \varepsilon$$

fennálljon, ahol ε a kockázatot jelenti, azaz annak a valószínűségét, hogy a pótlási idő alatt a raktár nem fedezi az alkatrész-szükségletet. A gyakorlatban elegendő ε -t 0,01 ; 0,001 ; 0,0001 é. i. t. értékek választani.

Ha a pótlási idő, α állandó, úgy

$$p_j = e^{-\Lambda \alpha} \frac{(\Lambda \alpha)^j}{j!} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, r_0).$$

Lényegében ez a megfontolás szerepel Rényi A. és Szentmártony T. már említett [1] cikkében.

B) Kiindulhatnánk abból a követelményből is, hogy a pótlási idő alatt a várható gépállási idő (az ú. n. *holidő*) legyen elhanyagolható. A várható holidő :

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^x e^{-\Lambda(x-t)} \frac{[\Lambda(x-t)]^{r_0-1}}{(r_0-1)!} \Lambda m \left\{ \frac{\lambda t + e^{-\lambda t} - 1}{\lambda} \right\} dt \right] dF(x).$$

Ezt a következőképpen láthatjuk be. A pótlási időt jelöljük ξ -vel ; ξ valószínűségi változó, eloszlásfüggvénye $F(x)$. Tegyük fel, hogy $\xi = x$ és hogy az r_0 -adik törés az $x - t$ időpontban következik be. ($0 \leq t \leq x$). Az r_0 -adik törés időpontjának sűrűségfüggvénye : $e^{-\Lambda(x-t)} \frac{[\Lambda(x-t)]^{r_0-1}}{(r_0-1)!}$. Ezen feltételek mellett nézzük meg, hogy az egyes alkatrészekre mennyi a várható állási idő az $(x - t, x)$ időintervallumban. Ez egy alkatrésze

$$\int_0^t e^{-\lambda y} \lambda(t-y) dy = \frac{e^{-\lambda t} - 1 + \lambda t}{\lambda},$$

mert ha az $x - t + y$ időpontban törik el egy alkatrész, úgy $t - y$ ideig áll. m alkatrésze a várható állási idő m -szer annyi. Végül a várható holidőre a fentebb felírt kifejezést a feltételes várható értékek formulája alapján kapjuk.

Az elmondottak alapján r_0 értékét úgy kell megválasztani, hogy az így kiszámított várható holidő elegendő kicsiny legyen.

II. A rendelt alkatrészek számának, r -nek meghatározása

1. Mivel a törzskészlet meghatározásánál arra törekedtünk, hogy nagy valószínűséggel fedezze a pótlási idő alatti alkatrészcseréket, másszóval, hogy elhanyagolhatóan kis idő essen ki a termelésből gépállás miatt (l. 1 követelményt), ezért a további tárgyalásunkból kizárjuk azt az esetet, amikor a

törzskészlet a pótlási idő alatt teljesen elfogy s hogy mire a megrendelés befut, már álló gépek is vannak.*

Vizsgáljuk most meg tehát a második és a harmadik követelményt. Ezek azt mondják ki, hogy a rendelések számának, valamint a heverési időnek minimálisnak kell lennie. Számítsuk ki ezért, mondjuk a $(0, T)$ időintervallumra eső rendelések átlagos számát és az átlagos heverési időt. Mindenekelőtt azonban az η_t folyamat sajátágaival kell megismerkednünk.

Jelentse a raktár készletét t időpontban η_t valószínűségi változó. Az η_t változó egy sztochasztikus folyamatot ír le. Ennek a folyamatnak regenerációs pontjai (Markov-pontjai) azok az időpontok, amikor a raktár a törzskészletre apad le, azaz amikor $\eta_t = r_0$ (lásd 1. ábrát). Ezekben a pontokban ugyanis a folyamat előlről kezdődik, azaz bármelyik regenerációs ponttól számítva η_t jövő sztochasztikus menete független η_t -nek a multban felvett értékeitől. A jelen állapot tehát teljesen meghatározza a jövőt. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a $t = 0$ időpontban $\eta_t = r_0$ és ekkor éppen egy rendelés történt.

A 2. követelmény értelmében arra kell törekednünk, hogy minél ritkábban kerüljön sor rendelésre a vizsgált $(0, T)$ időközben. A $(0, T)$ időközben előforduló rendelések számának várható értékét a felújítási elmélet segítségével kiszámíthatnók; nekünk azonban csak arra az eredményre van szükségünk, amely azt mondja ki, hogy ha v_T jelenti a $(0, T)$ intervallumban előforduló rendelések számának a várható értékét és u két egymástkövető regenerációs pont távolságának a várható értékét, azaz két egymást követő rendelés között eltelt idő átlagértékét, akkor

$$(1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{v_T}{T} = \frac{1}{u},$$

mint az a felújítási elméletből ismeretes [2].

Megjegyezzük, hogy v_T annál kisebb, minél nagyobb r , mert minél több alkatrészt rendelünk egyidejűleg, annál ritkábban kerül sor rendelésre. Így ha csak erre a feltételre lennénk tekintettel, arra a következtetésre jutnánk, hogy r -et célszerű minél nagyobbra választani.

A 3. követelmény értelmében arra kell törekednünk, hogy ne heverjen túl sok alkatrész a raktáron. A gépalkatrészek heverési idejét a vizsgált $(0, T)$ időtartamra vonatkozóan úgy kapjuk meg, hogy mindenegyes alkatrésztől megállapítjuk, mennyi ideig feküdt a raktáron, azaz hogy a raktárba érkezése időpontjától T időpontig (illetve, ha közben felhasználásra került, úgy a felhasználás időpontjáig) mennyi idő telt el és ezeket — az egyes alkatrészekre megállapított — raktározási, heverési időtartamokat összegezzük minden olyan alkatrésztre, amely a $(0, T)$ időtartam alatt kerül a raktárba.

Célszerűbb azonban úgy eljárunk, hogy az időtengelyt egységekre bontjuk és megnézzük, hogy mindegyik egység alatt mennyi volt a raktáron lévő alkatrészek száma; e számosságnak az időegységgel való szorzata adja az

* Arra az esetre, amikor ez mégis bekövetkezne, tegyük fel, hogy van egy pótraktárkészletünk s ebből pótoljuk az eltört alkatrészeket addig, míg a rendelés meg nem érkezik — azért, hogy álló gépek ne legyenek. Az ε kockázatot, illetve várható holtidőt úgy kell azonban megválasztani, hogy erre csak ritkán, mondjuk átlag 10 évenként kerüljön sor. Így gyakorlatilag ez az eset valóban elhanyagolható.

illető időegységre jutó heverési időt s ezeknek a T időpontig való összegezése pedig a $(0, T)$ időtartam alatti összes heverési időt. Ha az időegységet minden határon túl csökkentjük s η_t jelenti a raktárkészlet pillanatnyi nagyságát, úgy T időtartam alatt az összes heverési idő

$$\int_0^T \eta_t dt,$$

ami tulajdonképpen nem más, mint az η_t görbe és az időtengely által bezárt terület. Ez a terület maga is valószínűségi változó, bennünket azonban csak a várható értéke érdekel.

Az átlagolás és összegezés felcserélhetőségére vonatkozó ismert tétel általánosításaként kapjuk, hogy

$$M \left(\int_0^T \eta_t dt \right) = \int_0^T M(\eta_t) dt.$$

A keresett várható-érték tehát η_t átlagának $M(\eta_t)$ -nek integráljával egyenlő. Ennek kiszámításánál a következő megfontolásokat vesszük alapul.

Az η_t folyamatot vizsgálva fentebb már láttuk, hogy azon időpontok, amikor a raktárkészlet éppen r_0 -ra apad le, a folyamat regenerációs pontjait alkotják, azaz ezekben az időpontokban a folyamat újrakezdődik.

Kézenfekvő tehát először annak a megállapítására törekedni, hogy átlag mekkora heverési idő esik egy ilyen szakaszra s ebből következtetni a keresett várható értékre.

Jelöljük az egymást követő rendelési időpontokat (regenerációs pontokat) t_i -vel ($t_1 = 0$, $i = 1, 2, \dots$) és jelöljük a (t_i, t_{i+1}) ($i = 1, 2, \dots$) szakaszokra eső heverési időket χ_i -vel ($i = 1, 2, \dots$), közös várható értékeket pedig h -val. h ismeretében a keresett várható értékre a következő összefüggést kapjuk:

$$(2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M(\eta_t) dt = \frac{h}{u},$$

ahol u a két egymást követő rendelés között eltelt idő várható értékét jelenti.

Ugyanis nyilvánvaló, hogy

$$(2/a) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \eta_t dt = \frac{\chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_\nu}{T} - \frac{1}{T} \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} \eta_t dt,$$

ahol ν a $(0, T)$ intervallumban előforduló rendelések száma; $t_{\nu+1}$, tehát a T időpont utáni első rendelés időpontja.

Képezzük (2a) mindkét oldalának a várható értékét, s a jobboldalon szereplő $\eta_\nu = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_\nu$ összeg várható értéke kiszámításához használjuk fel *A. N. Kolmogorov* és *Ju. V. Prohorov* [3] tételének következő speciális esetét:

Legyenek $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ egyforma várható értékű valószínűségi változók. Tekintsük az $\eta_\nu = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_\nu$ összeget, ahol a tagok száma ν maga is valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy $n > m$ -re a χ_n valószínűségi változók függetlenek a $\nu = m$ eseménytől. Legyen $M(\chi_n) = h$ ($n = 1, 2, \dots$) és $M(\nu)$ véges, úgy

$$M(\eta_\nu) = h M(\nu).$$

Mivel a (2a) jobboldalán szereplő $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\nu$ valószínűségi változók kielégítik fenti tétel feltételeit, ezért e tétel alapján felírhatjuk, hogy

$$M(\chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_\nu) = h \nu_T.$$

A jobboldal második tagjára nyilvánvalóan fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\eta_t \leq r + r_0$$

és így

$$\int_T^{t_{\nu+1}} \eta_t dt \leq (r + r_0)(t_{\nu+1} - T).$$

Tehát

$$M\left(\frac{1}{T} \int_T^{t_{\nu+1}} \eta_t dt\right) \leq \frac{r + r_0}{T} M(t_{\nu+1} - T).$$

Jelen kötet [4] cikkében azonban ki van mutatva, hogy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M(t_{\nu+1} - T) = \frac{\sigma^2 + u^2}{2u},$$

ahol σ^2 a regenerációs pontok közötti távolság szórásnégyzetét jelenti. Így — mivel η_t nem-negatív, következik, hogy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M\left(\frac{1}{T} \int_T^{t_{\nu+1}} \eta_t dt\right) = 0.$$

Végeredményben tehát felírható, hogy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M\left(\frac{1}{T} \int_0^T \eta_t dt\right) = \lim_{T \rightarrow \infty} h \frac{\nu_T}{T},$$

amivel — (1)-et tekintetbevéve — (2) állításunkat igazoltuk.

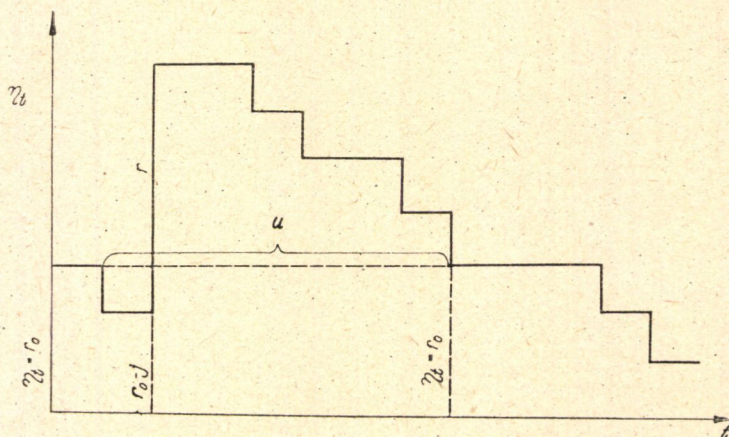
Nyilvánvaló, hogy a heverési idő várható értéke *annál kisebb, minél kisebb r* , ugyanis ha egyszerre kevés alkatrészt rendelünk, akkor sűrűn kell rendelnünk s az alkatrészek keveset állnak a raktáron. Így ha csak erre a követelményre lennénk tekintettel, úgy akkor járnánk el helyesen, ha r -et a lehető legkisebbre választanánk.

Az (1) és (2) formulákban szereplő u illetve h értékének meghatározását az alábbiakban adjuk.

1^o. u , mint az a 2. ábrán is látható, két szakaszból tehető össze.

Az első szakasz a pótlási idő, ennek átlagos hossza α , a második szakasz hosszának várható értéke a pótlási idő alatti gépalkatrész-törések számától függ. Ha a pótlási idő alatt j ($j = 0, 1, 2, \dots, r_0$) törés történik (ennek a valószínűsége p_j), akkor a második szakaszban $r - j$ alkatrész törik el addig, míg a készlet r_0 törzskészletre apad le. Mivel két törés közötti idő várható értéke $\frac{1}{\Lambda}$, ezért

$$u = \alpha + \frac{1}{\Lambda} \sum p_j (r - j).$$



2. ábra

u r -nek lineáris függvénye, tehát a következő alakban is írható:

ahol
$$u = A_1 + B_1 r,$$

$$(3) \quad A_1 = \alpha - \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=0}^{r_0} j p_j \quad \text{és} \quad B_1 = \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=0}^{r_0} p_j$$

2^o. h meghatározása. A pótlási idő alatt — mint már említettük — $j = 0, 1, 2, \dots, r_0$ törésre számíthatunk, mivel r_0 -t úgy határoztuk meg, hogy az r_0 -nál több törés valószínűsége elhanyagolhatóan kicsiny legyen.

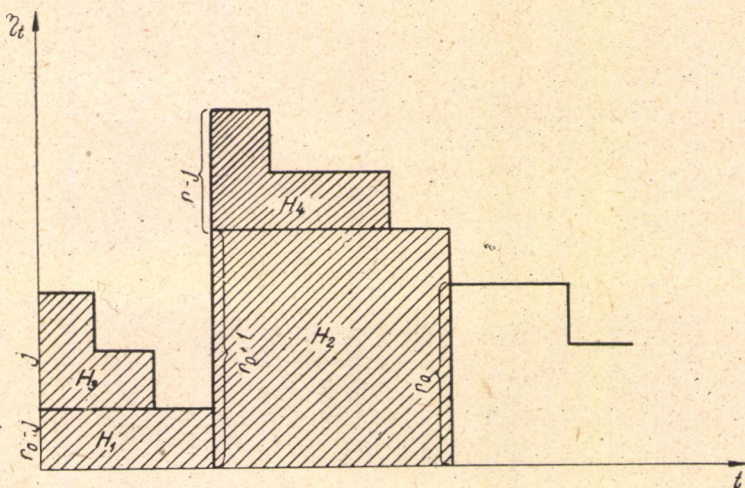
Feltesszük tehát, hogy a pótlási idő alatt j törés történik ($j = 0, 1, 2, \dots, r_0$), aminek a valószínűsége p_j s jelöljük a megfelelő feltételes várható értéket h_j -vel. Ekkor a feltételes várható értékre vonatkozó ismert tétel szerint

$$h = \sum_{j=0}^{r_0} p_j h_j.$$

Meghatározandó tehát h_j .

Lenti ábráról leolvasható, hogy h_j értéke négy területből tehető össze. E területek várható értékeit a következő kifejezések szolgáltatják: $M(H_1) = \alpha(r_0 - j)$, ugyanis a H_1 téglalap alapja a pótlási idő, s ennek várható értéke α ; magassága pedig $r_0 - j$. $M(H_2) = (r_0 + 1) \frac{r-j}{\Lambda}$, ugyanis a H_2 téglalap alapjának várható értéke $\frac{r-j}{\Lambda}$, magassága pedig $r_0 - j$. H_3 és H_4 területét kissé bonyolultabb úton állapítottuk meg. *Hajós György* egy észrevétele e két terület egyszerűbb kiszámítását tette lehetővé.

Tekintsünk egy Λ sűrűségű Poisson-folyamatot a $0 \leq t$ időpontokban és



3. ábra

jelentse a ξ_t valószínűségi változó a $(0, t)$ időintervallumban előforduló események számát. Kérdés, mivel egyenlő az

$$s_t = \int_0^t \xi_u du$$

valószínűségi változó várható értéke azon feltétel mellett, hogy $\xi_t = n$.
Állítás:

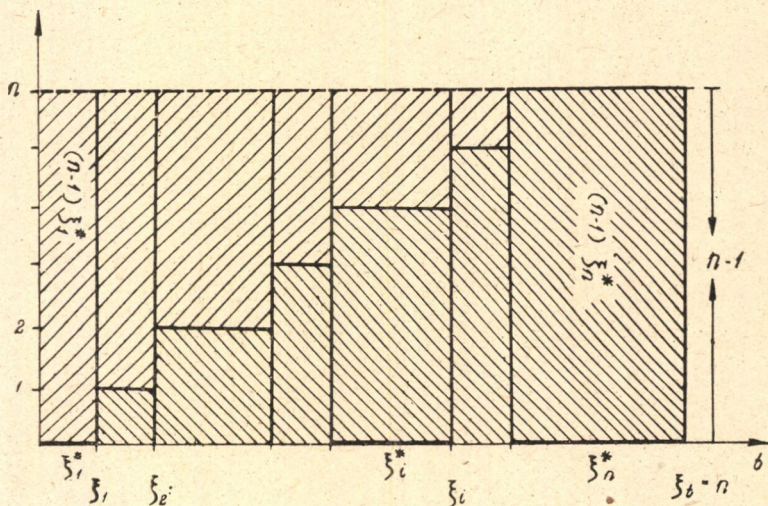
$$M\left(\int_0^t \xi_u du \mid \xi_t = n\right) = \frac{nt}{2},$$

ami — az alábbi ábrát tekintve — nem más, mint a t alapú és n magasságú téglalap területének a fele.

Bizonyítás: Jelentse ξ_i^* az i -edik és $(i-1)$ -edik esemény bekövetkezése közötti időtartam hosszát ($i = 2, 3, \dots, n$), ξ_1^* a $t = 0$ -tól az első esemény

bekövetkezéséig tartó időtartam hosszát, ξ_{n+1}^* pedig az n -edik esemény bekövetkezésétől t -ig terjedő időtartam hosszát.

A 4. ábrán látható téglalap két területből tehető össze, ezek egyike a sűrűbben vonalkázott idom, területe: $1 \cdot \xi_2^* + 2 \xi_3^* + \dots + (n-1) \xi_n^*$, a másik pedig az ezt téglalappá kiegészítő terület: $(n-1) \xi_1^* + (n-2) \xi_2^* + \dots + 1 \cdot \xi_{n-1}^*$. *Hajós György* észrevétele abban áll, hogy e két terület várható értéke megegyezik, ugyanis a $\xi_t = n$ feltevés mellett az egyes események bekövetkezéseinek időpontjai egyenletes eloszlásúak $(0, t)$ -ben is így a $\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_{n+1}^*$ változók együttes eloszlása megegyezik a $\xi_{n+1}^*, \xi_n^*,$



4. ábra

$\dots, \xi_1^*$ változók eloszlásával, vagyis ha az eseményeket t -től visszafelé vizsgáljuk, ugyanolyan eloszlású pontokat nyerünk. Ennélfogva tehát

$$\begin{aligned} M\left(\int_0^t \xi_u du \mid \xi_t = n\right) &= M(1 \xi_2^* + 2 \xi_3^* + \dots + (n-1) \xi_n^* \mid \xi_t = n) = \\ &= M((n-1) \xi_1^* + (n-2) \xi_2^* + \dots + 1 \xi_{n-1}^* \mid \xi_t = n) = \frac{nt}{2}. \end{aligned}$$

Ha most t nem állandó, hanem τ valószínűségi változó, $G(t)$ eloszlásfüggvénnyel, úgy

$$M\left(\int_0^\tau \xi_u du \mid \xi_\tau = n\right) = \int_0^\infty \frac{nt}{2} dG(t) = \frac{n}{2} \int_0^\infty t dG(t) = \frac{n}{2} M(\tau),$$

tehát egyenlő annak a téglalapnak a fél területével, amelynek alapja τ várható értéke, magassága pedig n .

Így tehát fentiek értelmében $M(H_3) = \frac{\alpha \cdot j}{2}$ ugyanis H_3 alapjának várható értéke α , magassága pedig j . Most vizsgáljuk meg a H_4 területet. H_4 esetében a téglalap alapja szintén valószínűségi változó, amelynek várható értéke $\frac{r-j-1}{\Lambda}$, tehát $M(H_4) = \frac{(r-j-1)(r-j)}{2\Lambda}$.

Végül tehát h_j -re a következő kifejezést kaptuk :

$$(4^*) \quad h_j = \alpha(r_0 - j) + (r_0 + 1) \frac{r-j}{\Lambda} + \frac{\alpha \cdot j}{2} + (r-j-1) \cdot \frac{r-j}{2\Lambda}$$

és

$$(4) \quad h = \sum_{j=0}^{r_0} p_j h_j.$$

Behelyettesítve (4*)-ot (4)-be, r -ben kvadratikussá kifejezést kapunk, ezért (4)-et a következő formában is felírhatjuk :

$$(5) \quad h = A_2 + B_2 r + C_2 r^2,$$

ahol

$$A_2 = \alpha r_0 \sum_{j=0}^{r_0} p_j - \left[\alpha + \frac{1}{\Lambda} (r_0 - 1) \right] \sum_{j=0}^{r_0} j p_j + \frac{1}{2\Lambda} \sum_{j=0}^{r_0} p_j j^2 + \frac{r_0 (r_0 + 1)}{4\Lambda}$$

$$B_2 = \frac{r(2r_0 - 1)}{2\Lambda} \sum_{j=0}^{r_0} p_j - \frac{2r}{\Lambda} \sum_{j=0}^{r_0} j p_j$$

és

$$C_3 = \frac{1}{2\Lambda} \sum_{j=0}^{r_0} p_j.$$

2. Az előbbieken a $(0, T)$ időintervallumban bekövetkező rendelések várható számának, v_T -nek, továbbá az ugyanezen időintervallumra eső heverési idő várható értékének, $\int_0^T M(\eta_t) dt$ -nek a meghatározásával foglalkoztunk.

Feladatunk most r értékének a meghatározása oly módon, hogy a rendelési költségek és a felhasználatlan heverő gépalkatrészek okozta népgazdasági kár a minimális legyen.

Általában egy rendelés költsége : $a + br$, összetevődik egy darabszámtól függő és egy tőle független költségből. Így a T időre eső várható rendelési költség

$$v_T (a + br).$$

Ehhez a költséghez hozzá kell még vennünk — egy megfelelően választott c költségfaktoriall súlyozva — a heverési időt, azaz

$$c \int_0^T M(\gamma_t) dt.$$

Végeredményben tehát arra kell törekednünk, hogy adott T -nél

$$v_T(a + br) + c \int_0^T M(\gamma_t) dt$$

a minimális legyen.

Itt az a probléma merül fel, hogy milyen nagyra válasszuk T értékét. Mivel bennünket csupán az érdekel, hogy az átlagos költség legyen minimális, ezért kiszámítjuk az időegységre eső költséget, amely

$$(6) \quad \frac{v_T}{T}(a + br) + c \frac{1}{T} \int_0^T M(\gamma_t) dt.$$

Célszerű T -t minél nagyobbra választani, ezért elvégezzük (6)-ban a $T \rightarrow \infty$ határátmenetet. Ekkor (1) és (2) felhasználásával adódik, hogy az időegységre eső költség

$$(7) \quad \frac{a + br}{u} + \frac{ch}{u}$$

s erről kell eldöntenünk, hogy r milyen értéke mellett lesz minimális.

Helyettesítsük be (7)-be az u -ra és a h -ra kapott (3), illetve (5) értékeket; ekkor r -nek az alábbi függvényét kapjuk:

$$f(r) = \frac{a + br + c(A_2 + B_2r + C_2r^2)}{A_1 + B_1r},$$

vagy másképen

$$f(r) = \frac{A_3 + B_3r + C_3r^2}{D + r},$$

ahol

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{a}{B_1} + \frac{cA_2}{B_1}, & B_3 &= \frac{b}{B_1} + \frac{-cB_2}{B_1}, \\ C_3 &= \frac{cC_2}{B_1}, & D &= \frac{A_1}{B_1}. \end{aligned}$$

Differenciálással nyerjük, hogy $f(r)$ minimumát akkor veszi fel, ha

$$(8) \quad r^* = \sqrt{\frac{A_3 - B_3D + C_3D^2}{C_3}} - D.$$

Megvizsgálva $f(r)$ görbe menetét s szemelött tartva, hogy gyakorlatilag csak pozitív egész r^* értékek jöhetnek számításba, arra az eredményre jutunk, hogy [(8)-ban pozitív gyököt véve] r^* -nak felfelé kerekített egész értékét, azaz az

$$(9) \quad r = [r^*] + 1$$

egész számot kell a készletpótló rendelés darabszámául választanunk.

IRODALOM

[1] Rényi Alfréd és Szentmártony Tibor: Gépkatrészek és felszerelési tárgyak törzskészletének valószínűségszámítási meghatározása. Matematikai Lapok. Budapest. 1952. III. évf. 2. sz. 129—139. o.

[2] W. Feller: On the integral equation of renewal theory. Annals of Math. Stat. Vol. 12. (1941). 243—267. o.

[3] Л. пл. Б. В. Гнеденко: Курс теории вероятностей. Москва. 1950. 332. o.

[4] Takács Lajos: Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál. A. M. I. Közl. II. (1953)

ПОПОЛНЕНИЕ ЗАПАСА ДЕТАЛЕЙ НА СКЛАДЕ. II. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАКАЗЫ

М. Цирманн

Резюме

На заводе, где работает несколько однотипных станков, имеющих одинаковые детали, с течением времени некоторые детали ломаются и приходится их заменить. В виду этого количество запасных деталей на складе постоянно уменьшается и с целью укомплектования необходима выдача дополнительных заказов.

Вопрос состоит в том, когда и какое количество деталей должно быть заказано, — при соблюдении экономии, — т. е. с одной стороны, чтобы детали не держались долгое время на складе, а с другой стороны, чтобы заказы не были слишком частыми.

Для решение данной проблемы предлагается нижеследующий удовлетворяющий практическим требованиям план дополнительных заказов: Если число запасных частей на складе убывает до r , т. е. до так называемого основного запаса, то немедленно заказывается деталей. Определением r_0 занимается сообщение I. В этой статье автор определяет размер дополнительных заказов, т. е. устанавливает оптимальное значение r количества необходимого для удовлетворения вышеуказанных, в некотором степени противоречащих одно другому экономических требований.

ERGÄNZUNG DES LAGERVORRATES. II. NACHBESTELLUNG

M. ZIERMANN

Zusammenfassung

Betrachten wir einen Betrieb, in dem mehrere gleiche Maschinen arbeiten und in jeder Maschine Bestandteile gleichen Typs zur Verwendung kommen. Die einzelnen Bestandteile gehen früher oder später infolge von Bruch zugrunde und müssen dann durch neue ersetzt werden. Die Anzahl der Reservebestandteile nimmt beständig ab, daher werden Bestellungen zur Auffüllung des Lagerbestandes nötig.

Es erhebt sich nun die Frage, wann und wieviel Bestandteile bestellt werden sollen, um wirtschaftlich zu verfahren, d. h. um zu vermeiden, dass Bestandteile einerseits zu lange im Lager verweilen, andererseits zu oft nachbestellt werden müssen.

Als Grundlage zur Behandlung des Problems dient folgender einfacher und die praktischen Anforderungen gut befriedigender Nachbestellplan : nimmt der Lagervorrat bis zu einem gewissen Stammvorrat r_0 ab, so werden sofort r_0 neue Bestandteile bestellt. r_0 wurde in der gleichbetitelten Abhandlung I. bestimmt. In der vorliegenden Arbeit wird das Ausmass der Nachbestellung bestimmt, also der optimale Wert von r , der die obenerwähnten und einander ziemlich widersprechenden wirtschaftlichen Anforderungen im höchstmöglichen Grade befriedigt.