EGY MINŐSÉGELLENŐRZÉSSEL KAPCSOLATOS SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATRÓL

SZÉKELY GÁBOR

Összefoglalás

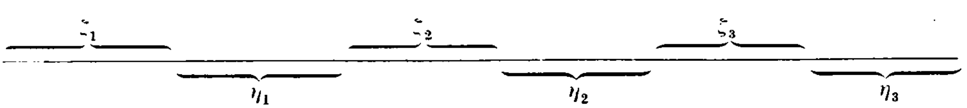
Automata gyártásnál több gépet ellenőriz egy futóellenőr. Bizonyos időközökben (két visszatérés között eltelt idő valószínűségi változó) egy adott géphez visszatér és ha az selejtet gyárt, a gépet megjavítja és újra elindítja. Utóellenőrzésnél mindig egy gép által bizonyos meghatározott idő alatt gyártott gyártmányokat ellenőriznek. A probléma egy sztochasztikus folyamatra vezethető vissza. Meg kell határozni bizonyos t idő alatt gyártott tételben a selejtes darabok számának eloszlását. A tárgyalásnál feltételeztük, hogy a gép selejtmentes gyártási periódusai exponenciális eloszlást követnek, vagyis azt, hogy a gép elromlása nem függ attól, mióta működik a gép. Fenti hipotézis mellett sikerült kiterjeszteni a megoldást arra az esetre is, amikor a selejtgyártási periódusban a gép csak p valószínűséggel gyárt selejtet. A szóbanforgó p valószínűség lehet konstans, vagy valószínűségi változó ismert eloszlásfüggvénnyel.

Automatagépekkel történő sorozatgyártás esetén egy futóellenőr több gépet ellenőriz. Ha valamely gépnél az ellenőr selejtet észlel, azt leállítja és a selejt okának megszüntetése után újból elindítja. A futóellenőrnek egy adott géphez történő egymásutáni két visszatérése között eltelt időtartamokról feltesszük, hogy független valószínűségi változók, $g(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Legyen továbbá a gép működése közben annak a valószínűsége, hogy a gép elromoljék (selejtet kezdjen gyártani) konstans, azaz független attól, mióta működik a gép. Utóbbi feltétel sok esetben teljesül ; ez a helyzet például csavarautomatáknál, ahol a selejtet a kés törése okozza.

Mint ismeretes, ekkor a selejtmentes gyártási szakaszok hossza exponenciális eloszlású, $h(t) = \lambda e^{-\lambda t} (t \geqq 0)$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy a gép a $t, t + \Delta t$ időszakaszban elromoljék.

A kitűzött feladat a következő : Elindul a gép; ha egy időpillanatban elromlik, elkezd selejtet gyártani és mindaddig selejtet gyárt, amíg a visszatérő futóellenőr le nem állítja. Megjavítás után a gép újból elkezd működni és kezdődik a folyamat elölről. Kérdés : t idő alatt gyártott tételben mi a selejtesek számának az eloszlása. A probléma az utóellenőrzés szempontjából fontos, ugyanis ez oly módon történik, hogy bizonyos, pl. 2 óra alatt gyártott tételek kerülnek utóellenőrzésre. Elképzelhető olyan gyártás is, ahol a gép meghatározott tételeket automatikusan csomagol.

A szóbanforgó folyamat sematikusan a következőképpen ábrázolható:



Az ábrán a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók jelentik a futóellenőrnek a géphez történő két visszatérése között eltelt időtartamokat, az $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ valószínűségi változók pedig a gép selejtgyártási periódusait, és $\zeta_i = \xi_i - \gamma_i$ pedig selejtmenetes gyártási periódusokat. (A rajzon látható esetben $\eta_2 = 0$ $\eta_5 = 0$) ζ_i és γ_i egymástól nem függetlenek, azonban együttes eloszlásfüggvényük éppen a folyamat jellegéből kifolyóan könnyen felírható. Legyen

$$P(\xi_i \leq x; \eta_i \leq y) = G(x, y) \tag{1}$$

a szóbanforgó kétváltozós függvény. Mivel a ζ_i változó (a gép selejtmentes gyártási periódusa) exponenciális eloszlású, következik, hogy

$$G(x, y) = \begin{cases} G(x, 0) + \int\limits_0^x \int\limits_0^y \lambda e^{-\lambda(u-v)} g(u)\, dv du & \text{ha } x \geq y \\ 0 & \text{ha } x < y, \end{cases} \tag{2}$$

ahol

$$G(x, 0) = \int\limits_0^x e^{-\lambda u} g(u)\, du$$

az eloszlásfüggvény $y = 0$ helyen vett ugrásának nagysága. Ugyanis annak a valószínűsége, hogy a futóellenőr u és $u + \Delta u$ időközben visszatérjen $g(u)\Delta u + o(\Delta u)$; két visszatérési időpont között a gép vagy 1. elromlik vagy 2. nem romlik el; annak a valószínűsége, hogy $(u - v)$ és $(u - v) + \Delta v$ időközben elromoljék a gép $\lambda e^{-\lambda(u-v)} \Delta v + o(\Delta v)$ és annak a valószínűsége, hogy u időpontig nem romlik el $e^{-\lambda u}$. Legyen $\alpha_t = 1$, ha a t időpontban a gép selejtmentesen termel és $\alpha_t = 0$, ha selejtet gyárt. Az $\{\alpha_t\}$ sztochasztikus folyamat nem Markov-típusú, azonban a futóellenőr visszatérési időpontjai a folyamat regenerációs pontjai (Markov-féle pontjai), ugyanis két visszatérési időpont között akár elromlott a gép, akár nem, a visszatérési időponttól kezdve selejtmentesen gyárt mindaddig, amíg el nem romlik. A legutolsó visszatérési időponttól az elromlás időpillanatáig eltelt idő viszont exponenciális eloszlású.

Jelentse $\Omega(t, z)$ annak a valószínűségét, hogy t idő alatt a selejtgyártási periódusok összege β_t kisebb vagy egyenlő legyen, mint z. $\Omega(t, z)$ meghatározására az alábbi kétváltozós integrálegyenlet írható fel:

$$\Omega(t, z) = \begin{cases} \int\limits_0^t \int\limits_0^x \Omega(t-x, z-y)\, \lambda e^{-\lambda(x-y)} g(x)\, dy dx + \\ + \int\limits_0^t \Omega(t-x, z)\, e^{-\lambda x} g(x)\, dx + \\ + e^{-\lambda t} \int\limits_t^\infty g(x)\, dx \quad \text{ha } (0 \leq z \leq t) \\ 0 \quad \text{ha } t < z. \end{cases} \tag{3}$$

Ugyanis, ha a 0 időpontban kezdődik a gyártás, három eset lehetséges:
1. Az ellenőr először x és $x + \Delta x$ időpontok között tér vissza $(0 < x < t)$ és $(x - y)$ és $(x - y) + \Delta y$ közötti időpontban elromlik a gép $(0 < y < x)$ és $(y < z)$ ennek a valószínűsége $\lambda e^{-\lambda(x-y)}\, g(x)\, \Delta x \Delta y$, ekkor azonban a hátralévő $t - x$ időszakaszban a selejtgyártási periódusok összege kisebb, mint $(z - y)$, aminek a valószínűsége $\Omega\,(t - x, z - y)$.

2. Az ellenőr először x és $x + \Delta x$ között tér vissza $(0 < x < t)$ és eddig az időpontig nem romlik el a gép, ennek a valószínűsége $e^{-\lambda x}\, g(x)\, \Delta x$, ekkor a hátralévő $t - x$ szakaszon a selejtgyártási periódusok összege kisebb kell legyen, mint z, aminek a valószínűsége $\Omega\,(t - x, z)$. Ezeket a valószínűségeket kell integrálnunk 0-tól t-ig és 0-tól z-ig.

3. Az ellenőr a $(0, t)$ időintervallum alatt nem tér vissza és ezalatt nem romlik el a gép; ennek a valószínűsége $e^{-\lambda t} \int\limits_t^\infty g(x)\, dx$.

Az integrálegyenletben faltung-jellegű tagok szerepelnek és így kétszeres Laplace-transzformációval könnyen megoldható. Vegyük előbb mindkét oldalnak t-változó szerinti Laplace-traszformáltját:

$$(4)\quad \omega(s, z) = \int\limits_0^x \omega(s, z - y)\Gamma(s, y)\, dy + \omega(s, z)\, \gamma(s + \lambda) + \frac{1 - \gamma(s + \lambda)}{s + \lambda},$$

ahol

$$\omega(s, z) = \int\limits_0^\infty \Omega(t, z)\, e^{-st}\, dt, \quad \Gamma(s, y) = \lambda \int\limits_y^\infty e^{-xs} e^{-(x-y)\lambda} g(x)\, dx =$$

$$= \lambda e^{\lambda y} \gamma(s + \lambda) - \lambda e^{\lambda y} \int\limits_0^y e^{-x(s+\lambda)} g(x)\, dx \quad \text{és} \quad \gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} g(x)\, dx\,.$$

Az (5) egyenlet z változó szerinti Laplace-transzformációja után kapjuk:

$$(5)\qquad \psi(s, w) = \frac{1}{s + \lambda}\, \frac{1 - \gamma(s + \lambda)}{1 - \gamma(s + \lambda) - \Lambda(s, w)},$$

ahol

$$\psi(s, w) = \int\limits_0^\infty w(s, z)\, e^{-wz}\, dz = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Omega(t, z)\, e^{-st} e^{-wz}\, dt dz$$

$$\text{és} \quad \Lambda(s, w) = \int\limits_0^\infty \Gamma(s, y)\, e^{-wy}\, dy = \frac{\lambda}{w - \lambda}\gamma(s + \lambda) - \frac{\lambda}{w - \lambda}\gamma(w + s)\,.$$

Azaz $\Omega\,(t, z)$ kétszeres Laplace-transzformáltja

$$(6)\qquad \psi(s, w) = \frac{1}{s + \lambda}\, \frac{1 - \gamma(s + \lambda)}{1 - \frac{w}{w - \lambda}\gamma(s + \lambda) + \frac{\lambda}{w - \lambda}\gamma(w + s)}$$

alakban írható, ahonnan $g(x)$ függvény Laplace-transzformáltjának ismeretében, a keresett $\Omega(t, z)$ eloszlásfüggvény kétszeres visszatranszformálással nyerhető.

Megjegyzés: Az $\Omega(t, z)$ függvény bizonyos esetekben az integrálegyenlet segítségével közvetlenül is előállítható. Ugyanis a futóellenőr visszatérési ideje a ξ valószínűségi változó, $\xi = b + \varrho$ összegként fogható fel, ahol b egy adott konstans (a futóellenőr b időn belül nem is térhet vissza, nevezzük ezt a gépek körüljárási idejének) és ϱ pedig valószínűségi változó. Ekkor az $\Omega(t, z)$ függvény az $0 - b$ szakaszon

$$\Omega(t, z) = e^{-\lambda(t-z)} \qquad (0 \leq t \leq b).$$

Az integrálegyenletből ismerve a függvény értékét a $(0, b)$ szakaszon, előállítható a függvény értéke szukcesszíve, a $(b, 2b)$, $(2b, 3b)$ stb. szakaszokra. Ez az eljárás sok esetben egyszerűbb a Laplace-transzformált kétszeres visszatranszformálásánál.

Ha a gyártó üzem valamely p átlagos selejtarányt kíván garantálni az átvevőnek, a futóellenőrre legfeljebb annyi gépet kell bíznia, hogy

$$\frac{m(t)}{t} = p$$

legyen, ahol $m(t)$ a β_t mennyiség várható értékét jelenti

$$m(t) = \int_0^\infty z d\Omega(t, z).$$

(7) segítségével előállítható $m(t)$ Laplace-traszformáltja is. Ugyanis a (7) kifejezés w szerinti deriváltja a $w = 0$ helyen éppen a kérdéses Laplace-transzformáltat szolgáltatja:

(7)
$$\mathcal{L}(m(t)) = \left[\frac{\partial \psi(s, w)}{\partial w}\right]_{w=0} = \frac{[1-\gamma(s+\lambda)]\,[\gamma(s)-\gamma(s+\lambda)+\lambda\gamma'(s)]}{\lambda(s+\lambda)\,[1-\gamma(s)]^2},$$

ahol

$$\gamma'(s) = \frac{d\gamma(s)}{ds}$$

(8) kifejezést s hatványai szerint Laurent-sorba fejtve és visszatranszformálva, $m(t)$-re a következő közelítő képletet kapjuk:

(8) $$m(t) = \frac{a}{d}t + \left(\frac{b}{d} - \frac{ae}{d}\right) + \varepsilon(t) \quad \text{ahol} \quad \varepsilon(t) \to 0 \text{ ha } t \to \infty$$

és ahol

$$a = 1 + m_0^* (m_0^* - 2) + \lambda m_1 (m_0^* - 1)$$

$$b = (\lambda m_2 + 2m_1^*) (1 - m_0^*) + m_1 (m_0^* - \lambda m_1^* - 1)$$

$$c = [2 (1 - m_0^*) - \lambda m_1] m_2^* + 2m_1^* (\lambda m_2 - m_1 + m_1^*) + m_2 (1 - m_0^*)$$

$$d = m_1^2 \lambda^2$$

$$e = m_1 \lambda (m_1 - m_2 \lambda)$$

továbbá

$$m_k = \int_0^\infty x^k g(x)\, dx \qquad \text{és} \qquad m_k^* = \int_0^\infty x^k e^{-\lambda x} g(x)\, dx.$$

Legyen τ egy darab gyártmány gyártási ideje. Ekkor t idő alatt $\left[\frac{t}{\tau}\right]$ darabot gyárt a gép. Annak a valószínűsége, hogy ezek közül pontosan s legyen selejtes

$$P(t, s) = \Omega(t, s\tau) - \Omega(t, (s-1)\tau). \tag{9}$$

Tekintsük most azt az esetet, amikor a selejtgyártási periódus alatt nem állandóan selejtet gyárt a gép. Legyen p annak a valószínűsége, hogy ebben a periódusban egy darab gyártmány selejt legyen és $1 - p = q$ annak a valószínűsége, hogy hibátlan.

Ha a szóbanforgó periódusban csak p valószínűséggel keletkezik selejt, annak a valószínűsége, hogy t idő alatt gyártott $\left[\frac{t}{\tau}\right]$ darab gyártmány között k legyen selejtes :

$$V(t, k) = \sum_{s=k}^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} \binom{s}{k} p^k q^{s-k} P(t, s). \tag{10}$$

Ha pedig p nem konstans, hanem maga is változó, a (11) valószínűség

$$V(t, k) = \int_0^1 \sum_{s=k}^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} \binom{s}{k} p^k q^{s-k} P(t, s)\, dF(p) \tag{11}$$

alakban írható, ahol $F(p)$ p-nek az eloszlásfüggvénye.

ОБ ОДНОМ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ СВЯЗАННОМ С КОНТРОЛЕМ КАЧЕСТВА

Г. Секей

Резюме

При автоматическом производстве один контролер проверяет несколько машин. Через некоторые промежутки времени контролер возвращается к каждой машине (время прошедшее между двумя возвращениями является случайной величиной) и если данная машина изготовляет брак, исправляет ее и снова приводит в действие. При контроле готовых продуктов проверяются продукты, изготовленные машиной в течение некоторого определенного времени. Проблема может быть решена с помощью теории стохастических процессов. Нужно определить распределение числа дефектных изделий в партии, изготовленной в течение времени. При этом предполагаем, что безбрачные периоды машины распределяются по показательному закону т. е. что порча машины не зависит от продолжительности хода машины. На основании вышеупомянутой гипотезы удалось распространить решение проблемы и на тот случай, когда в период изготовления брака машина изготовляет брак только с вероятностью р. Упомянутая вероятность р может быть постоянной или случайной величиной с известной функцией распределения.

EIN MIT DER QUALITÄTSKONTROLLE ZUSAMMENHÄNGENDER STOCHASTISCHER PROZESS

G. SZÉKELY

Zusammenfassung

Bei automatischer Erzeugung wird das Produkt mehrerer Maschinen durch einen einzigen Prüfer überwacht. Dieser kehrt in gewissen Zeitabschnitten (die Zufallsvariabeln sind) zur Maschine zurück ; findet er, dass sie Ausschuss erzeugt, so verbessert sie und setzt sie so wieder in Bewegung. Bei der Nachprüfung werden dagegen immer die während einer bestimmten Zeit von ein und derselben Maschine erzeugten Produkte der Kontrolle unterzogen. Das Problem lässt sich somit auf einen stochastischen Prozess zurückführen. Man hat die prozentuelle Verteilung des Ausschusses in einem während der Zeit t erzeugten Satz zu bestimmen. Bei der Behandlung des Problems wurde angenommen, dass die Perioden, in welchen die Maschine ausschussfrei arbeitet, eine exponentielle Verteilung befolgen, d. h. dass das Verderben der Maschine unabhängig davon ist, seit wann sie sich in Betrieb befindet. Die Annahme ermöglicht die Lösung des Problems auch für den Fall, dass die Maschine in der ausschusserzeugenden Periode Ausschuss nur mit einer Wahrscheinlichkeit p erzeugt. Diese Wahrscheinlichkeit p kann konstant sein, der irgendeine Zufallsveränderliche mit bekannter Verteilungsfunktion.