KIEGÉSZÍTÉS
»A GALTON-FÉLE DESZKÁVAL KAPCSOLATOS NÉHÁNY PROBLÉMÁRÓL« CÍMŰ DOLGOZATHOZ

MEDGYESSY PÁL

Összefoglalás

A kiegészítés a következőkből áll:

1. A Galton-féle deszka működésére vonatkozó közelebbi vizsgálatok összefoglalása az irodalom alapján. Ezeknek az a lényege, hogy egyszerű szögekből készített Galton-deszkán egy golyó jobbra (balra) térése nem független attól, ami a megelőző szögnél történt. Ennek következtében a golyóval történő események Markov-láncot alkotnak. Az eredő eloszlás közelítőleg normális lesz, csak nagyobb szórással, mint az események függetlensége esetében. Ha a szögeket csatornák helyettesítik, (mint az Intézet készülékén), az események függetlenek.

2. A dolgozat III. tételének általánosítása: Tegyük fel, hogy egy golyó az i-ik tartályba p valószínűséggel jut ($i = 0, 1, \ldots N$) Legyen a készülékbe jutott golyók száma ξ valószínűségi változó és jusson az i-ik tartályba ($i = 0, 1, \ldots N - 1$) η_i golyó. Ekkor érvényes a következő *tétel:* Az η_i-k akkor és csak akkor függetlenek, ha ξ Poisson-eloszlású.

Alábbiakban néhány megjegyzéssel kívánjuk kiegészíteni a címben említett dolgozatot: 1. A Galton-féle deszka eredeti alakjában egyszerű szögekből áll, nem csatornákat képező ékekből. Észrevették, hogy az ilyen Galton-deszkával kapott eloszlás szórása az elméletileg kiszámított szórásnál mindig nagyobb. Főleg *W. Seitz—K. Hamacher—Odenhausen* vizsgálataiból [1] kiderült, hogy az ilyen Galton-deszkán a golyók jobbra (balra) térései, mint események, nem függetlenek, hanem Markov-láncot alkotnak: Ha egyik sorban a golyó jobbra (balra) tér el, ennek megfelelő sodrást kap, amely még akkor is megvan, amidőn a következő sor megfelelő szögéhez ért a golyó, és így annak a valószínűsége, hogy itt is jobbra (balra) tér el, nagyobb mint az ellentett eseményé. Az ezzel a (kísérletileg is igazolt) alapfeltevéssel kiszámított eredő eloszlás szintén tart a normálishoz, csak szórása nagyobb, mint az események függetlenségének esetében. (Ezt először *G. Schulz* tárgyalta [2].) Ez a nagyobb szórás megfelel a kísérletileg kapott értéknek.

Az említett szerzők az események függetlenségét úgy érték el, hogy a szögekről leguruló golyó szögekből kiképezett csatornában gurult a következő szöghöz. A csatornában a golyó pergése lecsillapodott. Látható, hogy Intézetünk készülékén ugyanez a helyzet és így az események függetlensége biztosított.

A szögek (ékek) alakjától függően tehát binomiális eloszlás, vagy Markov-lánc szemléltetésére alkalmas a Galton-féle deszka.

Az alkalmazások terén megemlítjük még, hogy *F. Bernstein* a készüléket bizonyos módosítással integráltranszformáltak közelítő előállítására használta fel [3].

2. A dolgozat III. tétele a következőkép egészíthető ki: Tegyük fel, hogy egy $N+1$ tartályú Galton-deszka ékein (pl. a beállítás folytán) a jobbra (balra) térés valószínűsége általában nem $1/2$. Ekkor a golyók eloszlása a tartályokban már nem lesz binomiális; általában csak annyit mondhatunk, hogy egy golyó az i-ik tartályba p_i valószínűséggel jut $\left(i = 0, 1, \dots N, \sum\limits_{i=0}^{N} p_i = 1\right)$.

Az így módosított Galton-deszkára öntött golyók száma ξ legyen valószínűségi változó, $P(\xi = k) = Q_k$ $(k = 0, 1, \dots)$ és jusson az i-ik tartályba η_i számú golyó. Fennáll a következő

Tétel: Az η_i $(i = 0, 1, \dots N-1)$ valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha ξ Poisson-eloszlású valószínűségi változó.

A tétel a fenti modelltől függetlenül is érdekességel bír. *Bizonyítás:* Foglalkozzunk először a szükségesség kimutatásával. Legyen $P(\xi = k) = Q_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $(k = 0, 1, \dots)$, $\lambda > 0$ konstans,

$$P(\eta_0 = \nu_0, \dots \eta_{N-1} = \nu_{N-1} \mid \xi = k)$$

annak a valószínűsége, hogy a $\xi = k$ feltétel mellett az i-ik $(i = 0, 1, \dots N-1)$ tartályba ν_i golyó jut $\left(\sum\limits_{i=0}^{N} \nu_i = k\right)$,

$$P(\eta_0 = \nu_0, \dots \eta_{N-1} = \nu_{N-1})$$

pedig ugyanezen esemény valószínűsége a $\xi = k$ feltétel nélkül. Nyilván

$$P(\eta_0 = \nu_0, \dots \eta_{N-1} = \nu_{N-1} \mid \xi = k) = \frac{k!}{\nu_0! \dots \nu_{N-1}!\,(k - \nu_0 - \dots - \nu_{N-1})!} \times$$
$$\times\, p_0^{\nu_0} \dots p_{N-1}^{\nu_{N-1}} (1 - p_0 - \dots - p_{N-1})^{k-\nu_0-\dots-\nu_{N-1}}$$

A teljes valószínűség tételéből következik, hogy

$$P(\eta_0 = \nu_0, \dots \eta_{N-1} = \nu_{N-1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) \cdot P(\eta_0 = \nu_0, \dots \eta_{N-1} = \nu_{N-1} \mid \xi = k),$$

amibe a vonatkozó valószínűségek kifejezéseit beírva, egyszerű átalakítással nyerjük, hogy

$$P(\eta_0 = \nu_0, \dots \eta_{N-1} = \nu_{N-1}) = \prod_{r=0}^{N-1} e^{-\lambda p_r} \frac{(\lambda p_r)^{\nu_r}}{\nu_r!},$$

vagyis egyenlő $N-1$ számú, csak az egyes η_i-ktől függő Poisson-eloszlás szorzatával, tehát az η_i-k függetlenek.

Lássuk most az elégségesség bizonyítását. Ha $P(\eta_i = \nu_i)$ $(i = 0, 1, \dots N-1)$ annak a valószínűsége, hogy az i-ik tartályba ν_i golyó jut, a tételben kimondott függetlenség folytán:

$$P(\eta_0 = \nu_0, \dots \eta_{N-1} = \nu_{N-1}) = P(\eta_0 = \nu_0) \dots P(\eta_{N-1} = \nu_{N-1}),$$

vagyis, egyelőre ismeretlen $P(\xi = k) = Q_k$-val:

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k \frac{k!}{\nu_0! \dots \nu_{N-1}! (k - \nu_0 - \dots \nu_{N-1})!} \times$$

$$\times\, p_0^{\nu_0} \dots p_{N-1}^{\nu_{N-1}} (1 - p_0 - \dots - p_{N-1})^{k-\nu_0-\dots-\nu_{N-1}} =$$

$$= \prod_{r=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \frac{k!}{\nu_r! (k-\nu_r)!} p_r^{\nu_r} (1-p_r)^{k-\nu_r}.$$

Ebből kell Q_k-t meghatároznunk. E célból vegyük a min $(-p_i) + p_i < p_i v_i \leq \leq p_i$-vel definiált v_i valós számokat. Szorozzuk előző egyenlőségünket $v_0^{\nu_0} \dots v_{N-1}^{\nu_{N-1}}$-gyel és összegezzünk az összes $\nu_i = 0, 1, 2, \dots$ $(i = 0, 1, \dots N-1)$ értékekre; egyszerű átalakítások után a

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k \, [p_0(v_0 - 1) + \dots + p_{N-1}(v_{N-1} - 1) + 1]^k =$$

$$= \prod_{r=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \, [p_r(v_r - 1) + 1]^k$$

összefüggést kapjuk, amelyben a sorok a Q_k és v_r-ekre tett feltevések folytán konvergensek és amely $p_r(v_r - 1) = x_r$ és $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k (1+z)^k$ $(0 \geq z > -1)$ jelölésekkel a $\Phi(x_0 + \dots + x_{N-1}) = \prod_{r=0}^{N-1} \Phi(x_r)$-be megy át. Ha ezt a függvényegyenletet meg tudjuk oldani a $(-1, 0]$ intervallum tetszőleges kis részintervallumán, megoldása, $\Phi(z)$ ismeretében a Q_k-k meghatározhatók. A függvényegyenlet nem azonos a Cauchy-félével, mert az x_i-ik nem a $(-\infty, \infty)$-en mozognak, ezért külön kell tárgyalnunk. Követjük a Cauchy-féle függvényegyenlet megoldásának szokásos menetét [4].

Az $I = (\min(-p_i), 0]$ intervallumba eső x_i-kre a függvényegyenlet feltételeink folytán nyilván fennáll; erre az intervallumra fogjuk megoldani. Ha $y_i \in I$ és $\sum_{i=0}^{N-1} y_i \in I$ $(i = 0, 1, \ldots N-1)$, az I-n értelmezett $\Phi(z)$-re $\Phi(y_0 + \cdots + y_{N-1}) = \prod_{r=0}^{N-1} \Phi(y_r)$; a $\Phi(z)$-t definiáló egyenletből nyerhető $\Phi(0) = 1$ segítségével könnyen bebizonyítható, hogy akárhány összeadandónál is fennáll a függvényegyenlet. Most már teljesen az idézett munkát követjük, csak a feltételeket választjuk meg dolgozatunk viszonyainak megfelelően. Így $\Phi(z) > 0$ (ha $\Phi(z) \not\equiv 0$) kimutatásánál $\Phi(x)$-et $\Phi\left[\left(x - \frac{\alpha}{k}\right) + \frac{\alpha}{k}\right]$ alakban írjuk fel, ahol k oly nagy egészszám, hogy $x - \frac{\alpha}{k} \in I$; $\alpha \in I$, feltevés szerint, s így $\frac{\alpha}{k} \in I$, tehát a függvényegyenlet alkalmazható; továbbá α-t $\frac{\alpha}{k}$-k összegére bontva fel $\Phi(\alpha) = 0$-ból $\Phi\left(\frac{\alpha}{k}\right) = 0$ is következik, s ezzel az idézett helyen található bizonyítás minden szükséges elemét megkaptuk. A későbbiekben az az eltérés, hogy $\Phi(x) = \left[\Phi\left(-\frac{1}{m}\right)\right]^{\tau x}$ (m rögzített egészszám, $\left(-\frac{1}{m}\right) \in I$ $x \in I$) fennállását bizonyítjuk be, először $x = -\frac{p}{q}$-ra ($p, q > 0$, egész), $\Phi\left(-\frac{1}{m}\right)$-ben $\left(-\frac{1}{m}\right)$-et, $\Phi\left(-\frac{p}{q}\right) = \Phi\left(-\frac{mp}{mq}\right)$-ban pedig $\left(-\frac{mp}{mq}\right)$-t bontva fel $\left(-\frac{1}{mq}\right)$-k összegére, különben pedig az idézett bizonyítást alkalmazva; irracionális x-re is ugyanúgy terjesztjük ki, mint ott található; végül tehát azt kapjuk, hogy

$$\Phi(z) = \left[\Phi\left(-\frac{1}{m}\right)\right]^{mz} = e^{\lambda z} \quad (z \in I, \ \lambda \text{ valós})$$

aminek segítségével Q_k-ra a $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k (1+z)^k$-ból a

$$Q_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

kifejezést kapjuk. Minthogy Q_k valószínűség, $\lambda > 0$, vagyis a ξ Poisson-eloszlású. Ezzel az elégségességet is bebizonyítottuk.

IRODALOM

1. *W. Seitz—K. Hamacher—Odenhausen:* Naturw. 22. (1934) 494. o. (cím nélkül a »Kurze Originalmitteilungen« rovatban).

2. *G. Schulz:* Zur Theorie des Galtonschen Brettes. Zs. Phys. 92. (1934) 747. o.

3. *F. Bernstein:* Verallgemeinertes Galtonbrett zur Durchführung von Funktionaltransformationen. Zs. Phys. 77. (1932) 104. o.

4. *L. Pl. Szász Pál:* A differenciál- és integrálszámítás elemei. Bp. 1951. I. 387. o.

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ »О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ СВЯЗАННЫХ С ПРИБОРОМ ГАЛЬТОНА«

П. Меддешши

Резюме

Дополнение содержит:

1. Резюме подробных исследований относительно работы прибора Гальтона на основе относящейся сюда литературы: На приборе Гальтона, имеющем простые штифты, отклонение шарика направо (налево) зависит от события на предыдущем штифте. Вследствие этого события, происходящие шариками, образуют цепь Маркова. Результирующее распределение является приблизительно нормальным, но оно имеет бо́льшую дисперсию, чем в случае независимости событий. Если штифты заменены канальцами (как на приборе Института), то события независимы.

2. Обобщение теоремы III. упомянутой статьи: Предположим, что шарик попадает в i-й резервуар с вероятностью p_i $(i = 0,1, \ldots N)$. Пусть число ξ шариков, попавших на прибор, является случайной величиной и пусть в i-й резервуар попадает η_i шариков $(i = 0,1, \ldots \ldots N-1)$. Тогда имеет силу следующая т е о р е м а: Случайные величины η_i независимы тогда и только тогда, если случайная величина ξ имеет распределение Пуассона.

A SUPPLEMENT TO THE PAPER »SOME PROBLEMS CONCERNING GALTON'S APPARATUS«

P. MEDGYESSY

Summary

In supplementing his paper mentioned in the title

1. author reviews the data in the literature referring to close investigations concerning the operation of Galton's apparatus. In essence, he arrives at the result that on an apparatus simply employing nails the deviation of the ball to the right (left) at a certain nail is not independent of what has happened at the nail before it, in consequence whereof the events happening to the ball form a Markov chain. The resulting distribution will be approximately normal but with a standard deviation larger than that in the case of independent events. If ducts are employed in place of nails (this is the case in the apparatus of the Institute), the events will be independent.

2. Author further generalizes his theorem III as follows: Let us suppose a ball arrives to the i-th receptacle with probability p_i $(i = 0, 1, \ldots N)$, the number of balls filled into the apparatus is a random variable ξ, and η_i $(i = 0, 1, \ldots N-1)$ balls arrive in the i-th receptacle. Then the η_i-s are independent if and only if ξ has a Poisson distribution.