ÚJABB KRITÉRIUMOK KÉT MINTA ÖSSZEHASONLÍTÁSÁRA

RÉNYI ALFRÉD

Összefoglalás

A dolgozat a Wilcoxon-féle próbával foglalkozik, és annak egy olyan módosítását adja meg, amely minden alternatív hipotézissel szemben konzisztens, továbbá egyszerűbb mint a Wilcoxon-féle próbának E. L. Lehmanntól származó, hasonló tulajdonságokkal bíró módosítása. A dolgozatban megadott próba a következő: annak eldöntésére, hogy a $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$ és $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ minták egyforma eloszlású statisztikai sokaságból származnak-e, megszámoljuk, hogy az $\eta_j < \xi_i$, $\eta_k < \xi_i$ egyenlőtlenség-párok közül hány teljesül, ha j és k az 1, 2, ... n számokon, i az 1, 2, ... m számokon fut végig; jelölje ezt a számot W_1. Hasonlóképpen megszámoljuk, hogy a $\xi_j < \eta_i$ és $\xi_k < \eta_i$ egyenlőtlenség-párok közül, ahol j és k az 1, 2, ... n számokon, i az 1, 2, ... n számokon fut végig; ezt a számot jelölje W_2. Képezve a $W = \frac{W_1}{m\binom{n}{2}} + \frac{W_2}{n\binom{m}{2}}$ kifejezést, megállapítjuk, hogy a hipotézis teljesülése esetén mely α és β határok közé kell W értékének előírt valószínűségi szint mellett esnie. A kritériumunk abban áll, hogy ha $\alpha \leq W < \beta$, akkor a hipotézist elfogadjuk, ha ez az egyenlőtlenség nem teljesül, akkor a hipotézist elvetjük. Ha a ξ_k független valószínűségi változók eloszlásfüggvénye $F(x)$ és az η_k valószínűségi változók eloszlásfüggvénye $G(x)$ továbbá $F(x) \not\equiv G(x)$, akkor

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mathbf{P}(\alpha \leq W \leq \beta) = 1,$$

vagyis a próba minden alternatív hipotézissel szemben konzisztens. Ez abból következik, hogy ha $F(x)$ és $G(x)$ két eloszlásfüggvény, úgy

$$(*) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\,dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\,dF(x) \geq \frac{2}{3}$$

és (*)-ban egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $F(x) \equiv G(x)$.

Bevezetés

A matematikai statisztika egyik — a gyakorlatban legtöbbször előforduló — problémája annak a vizsgálata, hogy két minta származhat-e ugyanabból a statisztikai sokaságból. Ez a probléma felmerül például két gyógyszer hatásának, két növénytermesztési eljárás eredményeinek, két automatagép által gyártott árucikkek minőségének összehasonlításánál stb., vagy például annak vizsgálatánál, hogy valamilyen külső tényező (pl. időjárás, hőmérséklet, a levegő nedvességtartalmának megváltozása stb.) befolyással bír-e valamilyen termelési, vagy biológiai folyamatra.

A probléma matematikailag legegyszerűbben abban az esetben oldható meg, ha a szóbanforgó véletlentől függő mennyiségek egyenlő szórású normális eloszlású valószínűségi változók és így a statisztikai vizsgálatnak csak azt kell eldöntenie, hogy a két változó várható értékei megegyeznek-e egymással. Ha ξ és η jelöli a két változót, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ a ξ változó megfigyelt értékeit, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ pedig az η változó megfigyelt értékeit, akkor tehát ebben az esetben $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ teljesen független és egyforma normális eloszlású valószínűségi változók, közös valószínűségsűrűség-függvényük $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}}$, hasonlóképpen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ egymástól és a ξ_k változóktól független és egyforma normális eloszlású valószínűségi változók, közös valószínűségsűrűség-függvényük $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma^2}}$ és az eldöntendő hipotézis az, hogy fennáll-e $m_1 = m_2$ (ez az úgynevezett »nulla-hipotézis«). Ennek eldöntésére szolgál az ú. n. »Student«- féle t-próba*; ez abban áll, hogy kiszámítjuk a $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$ és az $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)$ minták középértékét, vagyis a $\bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_m}{m}$ és $\bar{\eta} = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n}{n}$ mennyiségeket és a két minta szórásnégyzeteit, vagyis az

$$s_1^2 = \frac{\sum_{k=1}^{m} (\xi_k - \bar{\xi})^2}{m} \quad \text{és} \quad s_2^2 = \frac{\sum_{k=1}^{\eta} (\eta_k - \bar{\eta})^2}{n}$$

mennyiségeket és ezekből képezzük a

$$t = \frac{(\bar{\xi} - \bar{\eta}) \sqrt{nm\,(n + m - 2)}}{\sqrt{(n + m)\,(ms_1^2 + ns_2^2)}} \tag{1}$$

hányadost; kimutatható, hogy t $n + m - 2$ szabadsági fokú ú. n. »Student«-féle eloszlással bír, vagyis valószínűség-sűrűségfüggvénye

$$s_{n+m-2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\,(n + m - 2)}} \frac{\Gamma\left(\frac{n + m - 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n + m - 2}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n + m - 2}\right)^{\frac{+ m - 1}{2}}}. \tag{2}$$

* Ez a módszer *William S. Gosset* angol statisztikustól származik, aki dolgozatait »*Student*« írói álnév alatt közölte; ennek oka, amint ezt *J. Neyman* »First course in probability and statistics« (Hold. & Co. New York, 1950.) c. művében (331. o.) közli, az volt, hogy Gosset az A. Guiness, Son & Co. dublini sörgyár szolgálatában állott és statisztikai vizsgálatainak eredményeit a sörgyártásban felhasználták; a sörgyáros kívánsága volt, hogy Gosset álnéven írja meg cikkeit azért, hogy a konkurrens sörgyárosok ne tudják meg abból, hogy a Guiness-cég egy alkalmazottja matematikai cikkeket ír, azt, hogy a statisztikai módszereket a sörgyártásban alkalmazni lehet. Ez ugyanis veszélyeztette volna a dublini sörgyár üzleti érdekeit.

A »Student«-féle eloszlásfüggvény táblázatából megállapítható n és m minden értékére és bármely megadott $P < 1$ valószínűségi szinthez az a t_p érték, amelynél t abszolut értékének P valószínűséggel kisebbnek kell lennie, ha a nullahipotézis helytálló. Ha mármost a két mintából (1) alapján kiszámított $|t|$-érték t_p-nél nagyobb, úgy a hipotézist mint valószínűtlent elvetjük, ha viszont $|t|$ értéke t_p-nél kisebb, úgy a hipotézist elfogadjuk.

Ez az eljárás valóban kielégítő megoldását szolgáltatja a két minta összehasonlítására vonatkozó problémának, ha az eljárás alkalmazásának előfeltételei teljesülnek. Azonban, ha ezek a feltevések nem teljesülnek, tehát ha a szóbanforgó mennyiségek eloszlása nem normális eloszlás, sőt nem is közelíthető jól normális eloszlással, vagy ha a két eloszlás ugyan normális, de szórásaik erősen eltérnek egymástól, vagy pedig, ha a két minta elemei nem függetlenek egymástól, úgy a Student-féle próba nem alkalmazható. Így tehát a Student-féle próba alkalmazását alapos statisztikai vizsgálatnak kell megelőznie, amely arra irányul, hogy eldöntse, fennállnak-e azok az előfeltételek, amelyek mellett a Student-féle próba alkalmazható, és ha ez a vizsgálat azt mutatja, hogy ezek az előfeltételek nem állnak fenn, úgy más módszert kell keresni.*

Mivel az említett előfeltételek a gyakorlatban az esetek jelentős részében nem teljesülnek, a matematikai statisztika művelőinek érdeklődése olyan kritériumok kidolgozására irányult, amelyek általánosabb feltételek mellett is alkalmazhatók. Érthető, hogy különösen olyan módszerek kidolgozására törekedtek, amelyek »eloszlásmentesek«, vagyis amelyek érvényessége független a ξ_k és η_j változók (a nulla-hipotézis szerint közös) eloszlásának jellegétől. Ha egy kritérium eloszlásmentes, úgy ha $H(x)$ tetszőleges szigorúan monoton növekvő függvény, a kritériumnak ugyanazt az eredményt kell adnia, akár a $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$ és $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)$, akár pedig a $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_m)$ és $(\eta'_1, \eta'_2, \ldots \eta'_n)$ mintákat hasonlítjuk össze, ha $\xi'_j = H(\xi_j)$ $(j = 1, 2, \ldots m)$ és $\eta'_k = H(\eta_k)$ $(k = 1, 2, \ldots n)$. Ilyen módon egy eloszlásmentes kritérium nem használhat fel csak olyan a ξ_j és η_k számok közötti relációkat, amelyek bármely $\xi'_j = H(\xi_j)$, $\eta'_k = H(\eta_k)$ transzformációval szemben invariánsak. Márpedig csak azok a relációk ilyenek, amelyek a ξ_j és η_k számok nagyság szerinti elrendeződésére vonatkoznak. Ennélfogva eloszlásmentes kritériumokat csak a ξ_j és η_k mintaelemek közötti rendezési relációk segítségével nyerhetünk. Rendezzük el nagyság szerint egyetlen növekvő sorozatba a $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ és $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ számokat; ezen $m + n$ szám közül a nagyság szerint k-adikat jelöljük ζ_k-val; a ζ_k számok mindegyike egy ξ_j-vel vagy egy η_j-vel egyenlő; értelmezzük az ε_k indexeket a következőképpen: ha ζ_k a ξ_i, számok közül való, úgy legyen $\varepsilon_k = 1$, ha pedig ζ_k az η_j számok közül való, úgy legyen $\varepsilon_k = 0$. Szorítkozzunk arra az esetre, amikor a szóbanforgó ξ és η változók eloszlásfüggvénye folytonos; ebben az esetben 0 annak a valószínűsége, hogy a ζ_k számsorozatban két egyenlő szám forduljon elő és így ezt a lehetőséget, amely az ε_k számok értelmezését bizonytalanná tehetné, figyelmen kívül hagyhatjuk.

Számos kritérium ismeretes, amelyik az ε_k számok vizsgálata alapján dönti el, hogy a nulla-hipotézist elfogadjuk, vagy elvessük. Jelen dolgozat célja a legjelentősebb ilyen módszerek ismertetése és egy újabb kritérium

* Hogy milyen hibákhoz vezethet a Student-féle próba alkalmazása olyan esetekben, ahol az nem indokolt, kitűnik pl. az Orvosi Hetilap 1950. évi kötetében közölt vitából.

felállítása. Az 1. §-ban az ú. n. Wilcoxon-féle kritériumot tárgyaljuk és megadjuk annak eloszlásának és határeloszlásának az irodalomból ismeretesnél lényegesen egyszerűbb tárgyalását, amely egy Gauss-féle azonosságon alapszik. A Wilcoxon-féle próba abban áll, hogy megállapítjuk, hogy az ε_k számok közül melyek egyenlők 1-gyel, vagyis hogy a $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$ minta elemei a ξ_i és η_j számok egyesített $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n+m}$ sorozatában mely helyeken állnak ; ha $\varepsilon_{r_1} = \varepsilon_{r_2} = \ldots \varepsilon_{r_m} = 1$, úgy képezzük az

$$U = r_1 + r_2 + \cdots + r_m$$

összeget és ennek nagyságából következtethetünk arra, hogy a nulla-hipotézis fennáll-e vagy nem (lásd [1], [2], [3], [4]). A Wilcoxon-féle kritérium jól használható annak eldöntésére, hogy annak valószínűsége, hogy $\xi > \eta$, egyenlő-e $1/2$-el (a nulla-hipotézis esetében ez természetesen teljesül) vagy nem. Sok esetben valóban csak erre van szükség, pl. gyógyszerek, tápszerek, növénytermesztési eljárások összehasonlításánál. Azonban vannak esetek, amikor ξ és η eloszlása ugyan különböznek egymástól, azonban $\mathbf{P}(\xi > \eta) = 1/2$; ez az eset áll fenn például, ha ξ és η normális eloszlásúak, vagy más megegyező szimmetrikus eloszlásúak, és várható értékeik egyenlők, de szórásaik különbözők. Ebben az esetben, amely azért is fontos, mert itt a Student-féle próba nem alkalmazható, a Wilcoxon-féle próba nem ad megbízható eredményt. Ugyanis egy próba akkor megbízható, ha mind az elsőfajú, mind a másodfajú hiba valószínűsége tetszőleges kicsinnyé tehető ; elsőfajú hibán értjük azt a tévedési lehetőséget, hogy a nulla-hipotézist a kritérium alapján elvetjük, annak ellenére, hogy helytálló ; másodfajú hibán pedig azt a tévedési lehetőséget értjük, hogy a nulla-hipotézist elfogadjuk, annak ellenére, hogy nem helytálló. Mármost egy H_0 hipotézisre vonatkozó próbát egy H_1 a H_0-tól különböző, lehetséges alternatív hipotézissel szemben konzisztensnek nevezünk, ha az elsőfajú hiba valószínűségét tetszőlegesen rögzítve, a másodfajú hiba valószínűsége a minta elemszámának növelésével tetszőleges kicsinnyé tehető. Mármost jelölje $F(x)$ a ξ változó eloszlásfüggvényét, $G(x)$ pedig az η változó eloszlásfüggvényét ; a H_0 hipotézis legyen az, hogy $G(x) \equiv F(x)$, a H_1 hipotézis pedig az, hogy $G(x)$ egy meghatározott, $F(x)$-szel nem azonos eloszlásfüggvény. A H_0 hipotézis mellett

$$\mathbf{P}(\xi < \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, dG(x) = \tag{3}$$

$$= \int_{-\infty}^{-\infty} F(x)\, dF(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dF^2(x) = \frac{1}{2},$$

míg a H_2 hipotézis mellett

$$P(\xi < \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, dG(x) = p \tag{4}$$

értéke $G(x)$-től függ. A Wilcoxon-próbáról ismeretes (l. [7]), hogy a H_1 hipotézissel szemben konzisztens, ha a (4) alatti p valószínűség értéke $\frac{1}{2}$-től különbözik, azonban nem konzisztens, ha $p = \frac{1}{2}$, bár $G(x)$ és $F(x)$ nem azoncsak.

Ilyen módon felmerül a probléma : hogyan lehet a Wilcoxon-próbát úgy módosítani, hogy bármely alternatív H_1 hipotézissel szemben konzisztens legyen. Egy ilyen módosítást nemrégiben *E. L. Lehmann* adott meg. A 2. §-ban egy másik módosítását adjuk a Wilcoxon-próbának, amely a Lehmann-féle próbához hasonló, de valamivel egyszerűbb. A 3. §-ban néhány problémát vetünk fel. A dolgozat végén közöljük a Wilcoxon-féle U-összeg eloszlásának táblázatát $m \leq 9$ és $n \leq 9$-re.

A szóbanforgó problémakörnek igen kiterjedt irodalma van. A dolgozatban tárgyalt kritériumokon kívül a szóbanforgó célra számításba jönnek a két minta eloszlásfüggvényeinek összehasonlításán alapuló kritériumok, így elsősorban *N. V. Szmirnov* egy kritériuma és annak különböző általánosításai,* továbbá *Wald és Wolfowitz* egy kritériuma. Az, hogy mikor melyik próba előnyösebb, lényegében nyitott kérdés. Erre vonatkozólag a 3. §-ban teszünk néhány megjegyzést.

1. §. A Wilcoxon-féle próba

Legyen $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ és $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ két minta ugyanabból az $F(x)$ folytonos eloszlásfüggvényű statisztikai sokaságból $(m \leq n)$. A két minta elemeit rendezzük el egyetlen sorozatba nagyság szerint, legyen ez a sorozat $\zeta_1 \leq \zeta_2 \leq \ldots \leq \zeta_{n+m}$. Vizsgáljuk meg, hogy ebben a sorozatban a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ számok mely helyeket foglalják el : legyenek ezek a helyek az r_1-edik, r_2-edik, $\ldots$ r_m-edik, és legyen

$$U = r_1 + r_2 + \cdots + r_m. \tag{1}$$

Határozzuk meg az U valószínűségi változó eloszlását. Az $r_1, r_2, \ldots, r_m$ számok nyilván a $1, 2, \ldots, n+m$ számok egy m-elemű kombinációját alkotják ; feltevésünk értelmében a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ változók teljesen függetlenek és egyforma eloszlásúak, ebből következik, hogy az említett kombinációk mind egyenlő valószínűséggel fordulhatnak elő. Mivel az említett kombinációk száma $\binom{m+n}{m}$, tehát mindegyik kombináció valószínűsége $\frac{1}{\binom{m+n}{m}}$ és így

$$\mathbf{P}(U = k) = \frac{N_{m,n}(k)}{\binom{m+n}{m}} \tag{2}$$

ha $N_{m,n}(k)$-val jelöljük a k nem-negatív egész számnak $k = r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ $(1 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_m \leq m+n)$ alakban való különböző lehetséges előállításainak a számát. U eloszlásának meghatározását tehát egy számelméleti problémára, mégpedig a »partitio numerorum« egy feladatára vezettük vissza. Mivel U minimális értékét nyilván akkor veszi fel, ha $r_k = k$ $(k = 1, 2, \ldots m)$ maximális értékét pedig, ha $r_k = n + k$ $(r = 1, 2, \ldots m)$, tehát

* Lásd ezekre vonatkozólag Juvancz Iréneusz és Lipták Tamás dolgozatát az AMI Közleményeinek I. kötetében

$$\frac{m(m+1)}{2} \leq U \leq \frac{m(m+1)}{2} + mn .$$

Célszerű bevezetni az

$$U' = U - \frac{m(m+1)}{2}$$

változót; U' lehetséges értékei nyilván 0, 1, 2, ... mn.

Képezzük a

$$C_m^{(m+n)}(x) = \sum_{k=0}^{mn} N_{m,n}\left(\frac{m(m+1)}{2} + k\right) x^k \tag{3}$$

polinomokat. Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$C_m^{(m+n)}(x) = \frac{(1-x^{m+n})(1-x^{m+n-1})\,..\,(1-x^{n+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)}. \tag{4}$$

Ezt a következőképpen bizonyíthatjuk be: egyszerűen belátható, hogy

$$\sum_{m=0}^{N} C_m^{(N)}(x)\, x^{\frac{m(m+1)}{2}} y^m = \Pi_{r=1}^{N} (1 + yx^r) \tag{5}$$

Ugyanis az (5) jobboldalán álló polinomban $y^m x^k$ együtthatója nyilván egyenlő a k számnak $k = r_1 + r_2 + \dots + r_m$ $(1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_m \leq N)$ alakban való előállításainak számával. Másrészt már *Gauss* ismerte a binomiális tétel következő általánosítását:

$$\Pi_{r=1}^{N} (1 + yx^r) = \tag{6}$$

$$= \sum_{m=0}^{N} y^m x^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{(1-x^N)(1-x^{N-1})\dots(1-x^{N-m-1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)}.$$

(6) legegyszerűbben N-re vonatkozó teljes indukcióval igazolható. (6) a binomiális tétel általánosításának tekinthető; ugyanis az $x = 1$ speciális esetben, figyelembevéve, hogy

$$\lim_{x\to 1} \Pi_{k=1}^{m} \left(\frac{1-x^{N-k+1}}{1-x^k}\right) = \lim_{x\to 1} \Pi_{k=1}^{m} \frac{\left(\frac{1-x^{N-k+1}}{1-x}\right)}{\left(\frac{1-x^k}{1-x}\right)} = \binom{N}{m} \tag{7}$$

a (6) azonosság az

$$\Pi_{r=1}^{N} (1 + y) = (1+y)^N = \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} y^m \tag{8}$$

összefüggésre, vagyis *Newton* binomiális tételére redukálódik.

Ilyen módon a

$$C_m^{(N)}(x) = \frac{(1-x^N)\,(1-x^{N-1})\ldots(1-x^{N-m+1})}{(1-x)\,(1-x^2)\ldots(1-x^m)} \tag{9}$$

polinomokat binomiális együttható-polinomoknak nevezhetjük és a binomiális együtthatók általánosításának tekinthetjük. A fentiekre való tekintettel nyerjük, hogy az $U' = U - \binom{m+1}{2}$ valószínűségi változó generátorfüggvénye*

$$\sum_{k=0}^{m\,n} \mathbf{P}\,(U' = k)\,x^k = \frac{1}{\binom{m+n}{m}}\,C_m^{(m+n)}(x) \tag{10}$$

* A (10) összefüggésre igen egyszerű, pusztán valószínűségszámítási meggondolásokon alapuló bizonyítást adott Dr. ing. *J. Hajek* (Prága), akinek bizonyítását szíves hozzájárulásával alábbiakban közöljük:

Válasszuk ki találomra az $1, 2, \ldots, n+m$ számok egy tetszőleges Π_{m+n} permutációját, feltéve, hogy az összes permutációk egyenlően valószínűek. Jelentse J_{m+n} a Π_{m+n} permutáció inverzióinak számát, akkor J nyilván valószínűségi változó. J a következőképpen bontható fel: $J_{m+n} = J_m + J_n + U'$, ahol J_m jelenti az $1, 2, \ldots m$ számok egymás közötti inverzióinak számát, J_n az $m+1, m+2, \ldots m+n$ számok egymás közötti inverzióinak számát, U' pedig az $1, 2 \ldots m$ és $m+1, m+2, \ldots m+n$ számsorozatok elemeinek egymással való inverzióinak számát. Más szóval U' jelenti, hogy hány olyan (j, k) $(j > m, k \leq m)$ számpár van, hogy j megelőzi k-t, Π_{m+n}-ben.

Világos, hogy U' megegyezik a fentebb definiált $U' = U - \binom{m+1}{2}$ -változóval. Könnyen belátható továbbá, hogy a J_m, J_n, és U' változók függetlenek egymástól, hiszen J_m csak az $1, 2, \ldots m$ számoknak egymáshoz képest való elhelyezkedésétől, J_n csak az $m+1, m+2, \ldots, m+n$ számoknak egymáshoz képest való elhelyezkedésétől, U' pedig csak az $1, 2, \ldots m$ számoknak az $m+1, m+2, \ldots, m+n$ számokhoz képest való elhelyezkedésétől függ. Ilyen módon ha $G_{m+n}(x)$, $G_m(x)$ és $G_n(x)$ jelölik J_{m+n}, J_m és J_n generátorfüggvényeit és $P_{m,n}(x)$ jelöli U' generátorfüggvényét, úgy

$$G_{m+n}(x) = G_m(x)\,G_n(x)\,P_{m,n}(x).$$

Vizsgáljuk most meg az J_m változót. J_m előállítható a következő alakban: $J_m = \sum_{k=2}^{m-1} \xi_{mk}$ ahol ξ_{mk} jelenti, hogy a k szám az $1, 2, \ldots m$ sorozat hány elemével alkot inverziót Π_{m+n}-ben. Π_{m+n}-ben az $1, 2, \ldots m$ számok egymásközt egy Π_m permutációt alkotnak, és ha az összes Π_{m+n} permutációk egyformán valószínűek, úgy az összes Π_m permutációk is egyformán valószínűek; továbbá a Π_m permutáció megválasztása úgy történhet, hogy az $1, 2, \ldots m$ számok mindegyikére vonatkozólag megadjuk, hogy Π_m-ben hányadik helyen áll. Ha meg van adva, hogy Π_m-ben az $1, 2, \ldots k$ számok hányadik helyen állnak, úgy $\xi_{m2}, \xi_{m3}, \ldots \xi_{m,k+1}$ nem függnek ezen helyek indexeitől, csak attól, hogy az $1, 2, \ldots k$ számok rendre melyik helyet foglalják el a k hely közül. Ezzel szemben $\xi_{m,k+1}$ nem függ ettől, csak az említett indexektől. Ilyen módon $\xi_{m,k+1}$ független a $\xi_{m,2}, \xi_{m,3}, \ldots \xi_{m,k}$ változóktól $(k = 2, 3, \ldots m-1)$ és így a $\xi_{m,2}, \xi_{m,3}, \ldots \xi_{m,m}$ változók teljesen függetlenek. Azt is könnyen beláthatjuk, hogy $\xi_{m,k+1}$ a $0, 1, 2, \ldots, k$ értékeket egyenlő valószínűséggel veszi fel, és így $\xi_{m,k+1}$ generátorfüggvénye

$\frac{1}{k+1}\,\frac{1-x^{k+1}}{1-x}$. Ennélfogva $G_m(x) = \frac{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}{m!\,(1-x)^m}$ továbbá $G_n(x) =$

$= \frac{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}{n!\,(1-x)^n}$ és $G_{m+n}(x) = \frac{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{m+n})}{(m+n)!\,(1-x)^{m+n}}$, tehát

$$P_{m,n}(x) = \frac{G_{m+n}(x)}{G_m(x)\,G_n(x)} = \frac{1}{\binom{m+n}{m}}\,C_m^{(n+m)}(x)\,,$$

amit bizonyítani akartunk.

Az U' változó generátorfüggvénye segítségével kiszámíthatjuk U' várható értékét és szórását:

$$\mathbf{M}(U') = \frac{mn}{2} \tag{13}$$

és

$$\mathbf{D}(U') = \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}} \tag{14}$$

$\mathbf{M}(U')$ és $\mathbf{D}(U')$ egyébként elemi úton is meghatározhatók a következő meggondolással. Legyen $\varepsilon_{ij} = 1$, ha $\eta_j < \xi_i$ és $\varepsilon_{ij} = 0$, ha $\eta_j > \xi_i$; akkor könnyen belátható, hogy

$$U' = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}, \tag{15}$$

vagyis U' egyenlő azon (ξ_i, η_j) párok számával, melyekre $\eta_j < \xi_i$. Mivel $\mathbf{M}(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}$, tehát (15)-ből $\mathbf{M}(U') = \frac{mn}{2}$; (15) alapján meghatározható U' szórása is.

U' generátorfüggvényének ismeretében könnyen meghatározhatjuk U' határeloszlását is. Legyen

$$U^* = \frac{U' - \mathbf{M}(U')}{\mathbf{D}(U')} = \frac{U' - \frac{mn}{2}}{\sqrt{\frac{mn(m+n-1)}{12}}} \tag{16}$$

az U' változó standardizálásával nyert változó, és számítsuk ki U^* karakterisztikus függvényét, amelyet $\varphi_{m,n}(t)$-vel jelölünk, vagyis

$$\varphi_{m,n}(t) = M(e^{itU^*}). \tag{17}$$

(10) segítségével könnyen következik,* hogy

$$\varphi_{m,n}(t) = \prod_{k=1}^{m} \frac{S\left((m+n+1-k)\frac{t}{2\sigma}\right)}{S\left(k\frac{t}{2\sigma}\right)}, \tag{18}$$

ahol $\sigma = \mathbf{D}(U')$ és

$$S(x) = \frac{\sin x}{x}. \tag{19}$$

* A $\varphi_{m,n}$ (t) karakterisztikus függvénynek ez a kifejezése megtalálható már D. van Dantzig [6] dolgozatában.

Felhasználva azt a tényt, hogy

$$S(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4) \quad \text{ha } x \to 0, \tag{20}$$

következik, hogy

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \varphi_{m,n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{21}$$

eloszlása a normális eloszláshoz konvergál:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \mathbf{P}(U^* < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \tag{22}$$

és így U^* eloszlása m és n nagy értékeire közelítőleg normálisnak vehető.

Itt jegyezzük meg, hogy azt a tényt, hogy U (ill. U^*) határértékben normális eloszlású, először *H. B. Mann* és *D. R. Whitney* bizonyították be [4]. Az ő bizonyításuk a momentum-módszeren alapszik és meglehetősen bonyolult, emellett csak arra az esetre vonatkozik, amikor $\frac{m}{n}$ korlátos.

A $\varphi_{m,n}(t)$ karakterisztikus függvény explicit kifejezése alapján megbecsülhető U^* eloszlásának a normális eloszlástól való eltérése is; ezzel a kérdéssel itt nem foglalkozunk.

A Wilcoxon-féle próba alkalmazása ezek után semmi nehézségbe nem ütközik, ugyanis ha egy tetszőleges megadott 1-hez közeli P valószínűségi szintet írunk elő, adott m és n mellett meghatározhatjuk azokat az u_1 és u_2 határokat, melyekre $P(u_1 \leq U < u_2) = P$ és ha a vizsgált mintából számított U érték u_1 és u_2 közé esik, úgy elfogadjuk az $F(x) \equiv G(x)$ hipotézist, ha pedig nem, úgy elvetjük. A mondottak értelmében, ha m és n nagy számok, úgy

$$\mathbf{P}(-\lambda \leq U^* \leq +\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

és így a P valószínűségi szinthez tartozó határok U-ra nézve

$$\frac{m(m+n+1)}{2} - \lambda_P \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}} \leq$$

$$\leq U < \frac{m(m+n+1)}{2} + \lambda_P \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}$$

ahol λ_P értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda_P}^{+\lambda_P} e^{-\frac{u^2}{2}} du = P$$

legyen. Ha m és n értékei kicsinyek, úgy a dolgozat végén közölt táblázatból határozzuk meg u_1 és u_2 értékét.

Mint említettük, a Wilcoxon-féle próba csak olyan alternatív hipotézisekkel szemben konzisztens, amelyek szerint ξ eloszlásfüggvénye $F(x)$, és η eloszlásfüggvénye olyan $G(x)$ függvény, amelyre nézve

$$\mathbf{P}(\eta < \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\, dF(x) \neq \frac{1}{2}.$$

Ilyen módon a Wilcoxon-féle próba tulajdonképpen nem is a $G(x) \equiv F(x)$, hanem az ennél kevesebbet kívánó $\mathbf{P}(\eta < \xi) = \frac{1}{2}$ hipotézis ellenőrzésére szolgál, és erre a célra teljesen meg is felel, ennél többet azonban nem várhatunk tőle. Ezt plauzibilissé teszi az, hogy $\frac{U'}{mn}$ nem más, mint a $\eta < \xi$ esemény relatív gyakorisága egy mn (egymástól nem független) kísérletből álló kísérletsorozatban. Természetszerűleg felmerül az a gondolat, hogy az $m = n$ esetben a $\mathbf{P}(\eta < \xi) = \frac{1}{2}$ hipotézist úgy ellenőrizzük, hogy egyszerűen megszámoljuk, hogy az $\eta_k < \xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ egyenlőtlenségek közül hány teljesül, vagyis az $(\eta < \xi)$ esemény relatív gyakoriságát n független kísérletből álló kísérletsorozatban vizsgáljuk. Ez az ú. n. »előjel-próba«, amelyet *J. Arbuthnot* már 1710-ben alkalmazott [11]. Ez esetben a relatív gyakoriság szórása $\frac{1}{2\sqrt{n}}$, míg a Wilcoxon-féle eljárásnál az $n = m$ esetben $\frac{U'}{n^2}$ szórása $\sqrt{\frac{2n+1}{12\,n^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{6n}} = \frac{1}{2{,}4\sqrt{n}}$. A Wilcoxon-féle próba szórása tehát ez esetben 0,83-adrésze az előjel-próba szórásának. A Wilcoxon-féle eljárás előnye tehát nem jelentős. Ha n nagy m-hez képest, úgy a szórások aránya valamivel javul és lecsökken közel 0,57-re. Ha ugyanis $n > m$ és csak független kísérleteket engedünk meg, úgy az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ számok közül csak az első m darabot tartjuk meg és a $\eta_k < \xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ egyenlőtlenségek közül vizsgáljuk meg, hogy hány teljesül és ilyen módon információt vesztünk.

2. §. *A Wilcoxon-féle próba javítása*

A Wilcoxon-féle próba, mint láttuk, abban áll, hogy megszámoljuk, hogy az $\eta_j < \xi_i$ egyenlőtlenségek közül hány teljesül, ha i végigfut az $1, 2, \ldots, m$ számokon és j az $1, 2, \ldots, n$ számokon. Ehelyett most vizsgáljuk meg, hogy az $\eta_j < \xi_i$, $\eta_k < \xi_i$ egyenlőtlenség-párok közül hány teljesül, ha j és

$k \neq j$ végigfutnak az 1, 2, ..., n számokon, i pedig az 1, 2, ..., m számokon; ezt a számot jelöljük W_1-el. Hasonlóképpen vizsgáljuk meg, hogy a $\xi_h < \eta_j$, $\xi_i < \eta_j$ egyenlőtlenség-párok közül hány teljesül, ha h és $i \neq h$ az 1, 2, ..., m számokon, és j az 1, 2, ..., n számokon fut végig; ezt a számot jelöljük W_2-vel. Legyen továbbá

$$W = \frac{W_1}{m\binom{n}{2}} + \frac{W_2}{n\binom{m}{2}} \tag{1}$$

Meghatározva azt a (W_1, W_2) intervallumot, amelybe W értékének P valószínűséggel esni kell, ha az $F(x) \equiv G(x)$ hipotézis teljesül, egy kritériumot nyerünk az $F(x) \equiv G(x)$ hipotézisre, ha a következőképpen járunk el: a nullahipotézist elfogadjuk, vagy elvetjük aszerint, hogy a két mintából számított W érték az említett (w_1, w_2) intervallumba beleesik vagy nem. Ezt a próbát a rövidség kedvéért W-próbának nevezzük. Mivel $m\binom{n}{2}$ az összes (η_j, η_k, ξ_i) számhármasok száma, $n\binom{m}{2}$ pedig az összes (ξ_h, ξ_i, η_j) számhármasok száma, W nem más, mint az $\eta < \xi$, $\eta' < \xi$ egyenlőtlenségek együttes bekövetkezésében álló A esemény és az $\eta < \xi$, $\eta < \xi'$ egyenlőtlenségek együttes bekövetkezésében álló B esemény relatív gyakoriságainak összege, ahol ξ és ξ' független és ugyanazon $F(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változók, η és η' pedig egymástól az ξ és ξ' valószínűségi változóktól független és ugyanazon $G(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változók. Mivel

$$\mathbf{P}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\,dF(x) \tag{2}$$

és

$$\mathbf{P}(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\,dG(x) \tag{3}$$

tehát

$$\mathbf{M}(W) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\,dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\,dF(x). \tag{4}$$

Ha $F(x) \equiv G(x)$, úgy nyilván

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\,dG(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\,dF(x) = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} dF^3(x) = \frac{1}{3} \tag{5}$$

és így

$$\mathbf{M}(W) = \frac{2}{3}. \tag{6}$$

A W mennyiség értékének vizsgálata alapján tehát az

$$(7)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\,dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\,dF(x) = \frac{2}{3}$$

hipotézist lehet ellenőrizni, ugyanúgy, ahogyan a Wilcoxon-féle próbával az

$$(8)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\,dF(x) = \frac{1}{2}$$

hipotézist lehet ellenőrizni. A különbség abban áll, hogy míg (8)-ból nem következik $G(x) \equiv F(x)$, addig (7)-ből következik, hogy $G(x) \equiv F(x)$. Ugyanis parciális integrálással belátható, hogy

$$(9)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\,dF(x) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dG^2(x) = 1 - 2\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,G(x)\,dG(x)$$

és így

$$(10)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\,dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\,dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (F^2(x) - 2F(x)\,G(x))\,dG(x) + 1\,.$$

Mivel továbbá

$$(11)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\,dG(x) = \frac{1}{3}$$

tehát

$$(12)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\,dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\,dF(x) - \frac{2}{3} = \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x) - G(x))^2\,dG(x)\,.$$

(12)-ből azonban következik, hogy ha

$$(13)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\,dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\,dF(x) = \frac{2}{3},$$

akkor

$$(14)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x) - G(x))^2\,dG(x) = 0$$

(14) viszont azt jelenti, hogy $F(x) = G(x)$, kivéve esetleg olyan nyilt intervallumok belsejét, melyekben $G(x)$ állandó; mivel az említett intervallumok végpontjaiban $F(x) = G(x)$, tehát egy ilyen intervallum belsejében is fenn kell állni az $F(x) = G(x)$ összefüggésnek, tekintve hogy $G(x)$ és $F(x)$ monoton

nem-csökkenő függvények. Tehát ha (14) teljesül, úgy $F(x) \equiv G(x)$. Ha tehát a W-próbával (13) fennállását ellenőrizzük, ezzel egyben a nulla-hipotézist ellenőrizzük.

Ezen meggondolásból következik, hogy a W-próba minden $G(x) \not\equiv F(x)$ alternatív hipotézissel szemben konzisztens. Ennek bizonyítását itt nem részletezzük, mivel az lényegében megegyezik *E. L. Lehmann* bizonyításával (l. [7]) arra vonatkozólag, hogy az általa megadott eljárás minden $G(x) \not\equiv F(x)$ alternatív hipotézissel szemben konzisztens. Csak vázoljuk ennek a bizonyításnak a gondolatmenetét. Bebizonyítható, hogy ha $n \to \infty$ és $m \to \infty$, úgy $\mathbf{D}^2(W) \to 0$, tekintet nélkül arra, hogy $F(x) \equiv G(x)$ vagy $F(x) \not\equiv G(x)$. Mármost a W-próba abban áll, hogy adott P valószínűségi szinthez meghatározzuk azokat a w_1 és w_2 számokat, melyekre $\mathbf{P}(w_1 \leq W < w_2) = P$. A Csebisev-egyenlőtlenségből azonban következik, hogy ha $n \to \infty$ és $m \to \infty$, úgy $w_1 \to \frac{2}{3}$ és $w_2 \to \frac{2}{3}$, ennélfogva, ha $F(x) \not\equiv G(x)$, úgy $\mathbf{M}(W) = M \neq \frac{2}{3}$ és így a $\mathbf{P}(w_1 \leq W < w_2)$ valószínűség elég nagy n-re és m-re kisebb lesz, mint a $\mathbf{P}(|W - \mathbf{M}(W)| > \varepsilon)$ valószínűség, hacsak $\varepsilon < \left|M - \frac{2}{3}\right|$, és így újból a Csebisev-egyenlőtlenség szerint $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mathbf{P}(w_1 \leq W < w_2) = 0$; ebből azonban már következik, hogy annak a valószínűsége, hogy W a $W < w_1$ és $w_2 < W$ egyenlőtlenségek által definiált kritikus tartományba essék, 1-hez konvergál, ha n és m minden határon túl nőnek, vagyis a W-próba minden, a nulla-hipotézistől különböző alternatív hipotézissel szemben konzisztens.

A Lehmann-féle próba a következő: megvizsgáljuk, hogy a

$$\xi_{i1} < \eta_{j1}, \quad \xi_{i2} < \eta_{j1}, \quad \xi_{i1} < \eta_{j2} \quad \text{és} \quad \xi_{i2} < \eta_{j2}$$

négy egyenlőtlenség hány, az 1, 2, ... m számok közül kiválasztott $(i_1, i_2,$ és az 1, 2, ... n számok közül kiválasztott (j_1, j_2) kombináció esetében teljesül egyidejűleg; ezen esetek számát jelöljük L_1-gyel; hasonlóképpen meghatározzuk, hogy a

$$\xi_{i1} > \eta_{j1}, \quad \xi_{i2} > \eta_{j1}, \quad \xi_{i1} > \eta_{j2}, \quad \xi_{i2} > \eta_{j2}$$

négy egyenlőtlenség hány esetben teljesül egyidejűleg; ezt a számot jelöljük L_2-vel és képezzük az

$$L = \frac{L_1 + L_2}{\binom{m}{2}\binom{n}{2}} \tag{15}$$

hányadost. Meghatározva azt az (l_1, l_2) intervallumot, amelybe L értékének P valószínűséggel esnie kell, ha a $G(x) \equiv F(x)$ nulla-hipotézis teljesül, a nulla-hipotézist elfogadjuk, vagy elvetjük aszerint, hogy a két mintából számított L-érték az (l_1, l_2) intervallumba beleesik, vagy nem.

Azt, hogy a Lehmann-féle kritérium minden alternatív $G(x) \not\equiv F(x)$ hipotézissel szemben konzisztens, a következőképpen láthatjuk be: a Lehmann-féle eljárás tulajdonképpen annak ellenőrzését jelenti, hogy fennáll-e az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\,(1 - F(x))\,dF(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\,(1 - G(x))\,dG(x) = \frac{1}{6} \tag{16}$$

egyenlőség. Mivel azonban (16) baloldala a következőképpen alakítható át:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\,(1-F(x))\,dF(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\,(1-G(x))\,dG(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\,dF(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\,dG(x) - \frac{1}{2},$$

tehát (16) ekvivalens (13)-mal és így a $G(x) \equiv F(x)$ hipotézissel.

A mi eljárásunk egyszerűbb Lehmann-énál, mivel egyenlőtlenség-párok teljesülésének ellenőrzésén alapszik 4—4 egyenlőtlenség ellenőrzése helyett.

Visszatérve a fent megadott kritériumra, jegyezzük meg, hogy W a következőképpen fejezhető ki explicit alakban: jelentsék $r_1, r_2, \ldots, r_m$ azoknak a helyeknek a sorszámait a $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ és $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ minták elemeinek egyesített és nagyság szerint rendezett sorozatában, ahol a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mintaelemek állnak és $s_1, s_2, \ldots, s_n$ azoknak a helyeknek a sorszámait, ahol az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ mintaelemek állnak. Akkor

$$W_1 = \sum_{k=1}^{m} \binom{r_k - k}{2} \tag{17}$$

és

$$W_2 = \sum_{j=1}^{m} \binom{s_k - k}{2}. \tag{18}$$

Ennélfogva

$$W = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \binom{r_k - k}{2}}{m \binom{n}{2}} + \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \binom{s_j - j}{2}}{n \binom{m}{2}}. \tag{19}$$

Látjuk, hogy a W mennyiség ugyanúgy függ az r_k mint az s_j számoktól: a W-próbánál egyik minta sincsen kitüntetve.

3. §. *Néhány további probléma*

Befejezésül néhány megoldatlan problémát említünk meg.

Kívánatos volna a W-próba elméletének részletesebb megvizsgálása W pontos eloszlásának, határeloszlásának és a határeloszláshoz való konvergenciája sebességének vizsgálata, továbbá a W-próba és a Lehmann-féle próba összehasonlítása. A Wilcoxon-féle próbát újabban többen kiterjesztették kettőnél több minta összehasonlítására is; itt csak utalunk *Rijkoort* [8] vizsgálataira. Kívánatos volna ugyanezt a W-próba esetében is elvégezni.

A Wilcoxon-féle próba »erejét« alternatív hipotézisekkel szemben, normális eloszlású változók esetére *van der Waart* [9] és *van der Waerden* [10] vizsgálták meg. Hasonló vizsgálatok elvégzése a W-próba esetében is kívánatos volna. Érdekes volna megvizsgálni, hogy a két minta összehasonlítására vonatkozó különböző próbák mennyire érzékenyek arra nézve, ha a minta elemei nem pontosan vannak megadva, hanem bizonyos mérési hibákkal eltorzítva. Ebből a szempontból össze kellene hasonlítani a *Wilcoxon*-, a *W*- és az *L*-próbát *Wald* és *Wolfowitz* [5] próbájával. Teljesen nyitott kérdés többdimenziós eloszlásckból vett minták összehasonlításának kérdése, pedig a probléma a gyakorlatban fel szokott merülni. Még az az eset sincsen megvizsgálva, amikor például a változók lehetséges értékei egy zárt síkgörbén (pl. körön) fekszenek és így csak a minta elemeinek ciklikus sorrendje adható meg.

Ezeket a problémákat annak dokumentálására említettük meg, hogy a két minta összehasonlításának problémaköre távolról sincs még kellő mértékben feltárva és e téren még sok nyitott probléma vár a kutatókra. A probléma gyakorlati jelentősége kívánatossá teszi, hogy Intézetünk e kérdésekkel behatóan foglalkozzék.

Mellékeljük a Wilcoxon-féle próba használatához szükséges táblázatokat arra az esetre, ha a két minta elemszáma 3 és 9 közé esik. Ezeket a táblázatokat *Kósa András* IV. éves alkalmazott matematikus hallgató készítette az Intézetünkben töltött szakmai gyakorlata idején. A táblázatokat *Varga Ottóné* ellenőrizte. Gondos munkájukért ezúton is köszönetet mondok.

IRODALOM

[1] *F. Wilcoxon :* Individual comparisons by ranking methods, Biometrics Bulletin (1945), 1. No. 6. 80—83. o.

[2] *F. Wilcoxon:* Individual comparisons of grouped data by ranking methods, Journ. Econ. Entomology, 39 (2), 269. o. (1946).

[3] *F. Wilcoxon:* Probability tables for individual comparisons by ranking methods ; Biometrics Bull. 3. No. (1947).

[4] *H. B. Mann* & *D. R. Whitney:* On a test whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Ann. Math. Stat. 18 50—60. o. (1947).

[5] *A. Wald* és *I. Wolfowitz:* On a test whether two samples are from the same population, Ann. Math. Stat. 11 147—162. o. (1940).

[6] *D. van Dantzig:* On the consistency and the power of Wilcoxon's two sample test. Indagationes Math. 13 1—8. o. (1951).

[7] *E. L. Lehmann:* Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests, Ann. Math. Stat. 22 165—180. o. (1951).

[8] *P. J. Rijkoort:* A generalization of Wilcoxon's test, Indagationes Math. 14 394—404. o. (1952).

[9] *H. R. van der Waart:* Proc. Nederl. Akad. Wet. 53 (1950) 494.

[10] *B. L. van der Waerden:* Order tests for the two sample problems and their power, I. Indagationes Math. 14 453—458. o. (1952) II. u. o. 15 303—310, o. (1953) III. u. o. 15 (1953) 311—316. l. továbbá E. L. Lehmann, The power of rank tests, Ann. Math. Stat. 24 23. o. (1952).

[11] lásd *I. Todhunter:* A history of the mathematical theory of probability, Cambridge 1865, 131. o.

НОВЫЕ КРИТЕРИИ СРАВНЕНИЯ ДВУХ ВЫБОРОК

А. Реньи

Резюме

Работа занимается критерием Вилькоксона и дает некоторую модификацию этого критерия, которая является консистентной относительно всякой альтернативной гипотезы, и которая более проста, чем подобная модификация, принадлежащая Е. Л. Леману. Сообщаемый в работе критерия, состоит в следующем: для решения проблемы, происходят ли выборки (ξ_1 ξ_2, ... ξ_m) и (η_1, η_2, ... η_n) из статистических совокупностей с одинаковыми распределениями, обозначим через W_1 число, показывающее сколько из

пар неравенств $\eta_j < \xi_i$, $\eta_k < \xi_i$ будет выполняться, если j и k пробегают числа 1, 2, ... n, а i – числа 1, 2, ... m. Соответственно, обозначим через W_2 числа показывающее сколько из пар неравенств $\xi_j < \eta_i$ и $\xi_k < \eta_i$ выполнено где j и k пробегают числа 1, 2 ... n, а i – числа 1, 2, ... n; Далее рассматривается выражение $W = \dfrac{W_1}{m\binom{n}{2}} + \dfrac{W_2}{n\binom{m}{2}}$, и определяются границы α и β, между которыми величина W должна находиться при различных наперед заданных уровнях вероятностей, если гипотеза выполняется.

Критерий состоит в том, что если $\alpha \leq W < \beta$ гипотеза принимается. Если неравенство неверно, то гипотеза отбрасывается.

Если $F(x)$ и $G(x)$ – функции распределения взаимно независимых случайных величин ξ_k соответственно η_k и $F(x) \neq G(x)$ то $\lim\limits_{n,m\to\infty} \mathrm{P}(\alpha \leq W < \beta)] = 1$ т. е. критерий консистентен относительно всякой альтернативной гипотезы. Это следует из того, что, если $F(x)$ и $G(x)$ функции распределения, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^2(x)dG(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G^2(x)dF(x) \geq \frac{2}{3}$$

и равенство имеет место только в случае $F(x) \equiv G(x)$.

NEUE KRITERIEN ZUM VERGLEICH ZWEIER STICHPROBEN

A. RÉNYI

Zusammenfassung

Der Aufsatz behandelt den Wilcoxonschen Test und liefert eine Modifikation desselben, die gegenüber jeder alternativen Hypothese konsistent, ausserdem einfacher ist, als die von *E. L. Lehmann* stammende und ähnliche Eigenschaften besitzende Abänderung.

Das in der Abhandlung gelöste Problem ist folgendes:

Zur Entscheidung der Frage, ob die Stichproben $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$ und $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)$ aus Grundgesamteinheiten gleicher Verteilung stammen, wird abgezählt, wie viele der Ungleichungpaare $\eta_j < \xi_i, \eta_k < \xi_i$ erfüllt sind, wo j und k die Zahlen 1, 2, ... n, un und i die Zahlen 1, 2, ... m durchlaufen; die Anzahl sei mit W_1 bezeichnet. Auf ähnliche Weise wird abgezählt, wie viele von den Ungleichungpaaren $\xi_j < \eta_i$ und $\xi_k < \eta_i$ erfüllt sind, wo j und k die Zahlen 1, 2, ... n, und i die Zahlen 1, 2, ... m durchlaufen; diese Anzahl sei mit W_2 bezeichnet. Wir bilden nun den Ausdruck

$$W = \frac{W_1}{m\binom{n}{2}} + \frac{W_2}{n\binom{m}{2}}$$

und bestimmen die Grenzen α und β, zwischen denen im Falle der Erfüllung der Hypothese der Wert von W bei vorgeschriebenem Wahrscheinlichkeitsniveau liegen muss. Unser Kriterium besteht darin, dass wir die Hypothese im Falle $\alpha \leq W < \beta$ annehmen sonst verwerfen.

Ist $F(x)$ die Verteilungsfunktion der unabhängigen Zufallsveränderlichen ξ_k und $G(x)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsveränderlichen η_k, gilt ferner $F(x) \not\equiv G(x)$, so gilt

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mathrm{P}(\alpha < W < \beta) = 1$$

somit ist also die Probe gegenüber jeder alternativen Hypothese konsistent. Dies folgt daraus, dass wenn $F(x)$ und $G(x)$ Verteilungsfunktionen sind,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\, dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)\, dF(x) \geq \frac{2}{3}$$

wo Gleichheit nur im Falle $G(x) \equiv F(x)$ stattfindet.

T Á B L Á Z A T
a Wilcoxon féle próba használatához*
n = 3

k	m=3 n=3	m=4 n=3	m=5 n=3	m=6 n=3	m=7 n=3	m=8 n=3	m=9 n=3
0	0,05000	0,02857	0,01786	0,01190	0,00833	0,00606	0,00455
1	10000	05714	03571	02381	01667	01212	00909
2	20000	11429	07143	04762	03333	02424	01818
3	35000	20000	12500	08333	05833	04242	03182
4	50000	31429	19643	13095	09167	06667	05000
5	65000	42857	28571	19048	13333	09697	07273
6	80000	57143	39286	27381	19167	13939	10455
7	90000	68571	50000	36714	25833	18788	14091
8	95000	80000	60714	45238	33333	24848	18636
9	1,00000	88571	71429	54762	41667	31515	24091
10		94286	80357	64286	50000	38788	30000
11		97143	87500	72619	58333	46061	36364
12		1,00000	92857	80952	66667	53939	43182
13			96429	86905	74167	61212	50000
14			98214	91667	80833	68485	56818
15			1,00000	95238	86667	75151	63636
16				97619	90833	81212	70000
17				98810	94167	86061	75909
18				1,00000	96667	90303	81364
19					98333	93333	85909
20					99167	95758	89545
21					1,00000	97576	92727
22						98788	95000
23						99394	96818
24						1,00000	98182
25							99091
26							99545
27							1,00000

*A táblázat a $P\ (U' \leq k)$ valószínűségeket tartalmazza (k = 0,1, . . . m n)

n = 4

k	m=4 n=4	m=5 n=4	m=6 n=4	m=7 n=4	m=8 n=4	m=9 n=4
0	0,01429	0,00794	0,00476	0,00303	0,00202	0,00140
1	02857	01587	00952	00606	00404	00280
2	05714	03175	01905	01212	00808	00559
3	10000	05556	03333	02121	01414	00979
4	17143	09524	05714	03636	02424	01678
5	24286	14286	08571	05455	03636	02517
6	34286	20635	12857	08182	05455	03776
7	44286	27778	17619	11515	07677	05315
8	55714	36508	23809	15757	10707	07413
9	65714	45238	30476	20606	14141	09930
10	75714	54762	38095	26364	18384	13007
11	82857	63492	45714	32424	23030	16503
12	90000	72222	54286	39394	28485	20699
13	94286	79365	61904	46364	34141	25175
14	97143	85714	69524	53636	40404	30210
15	98571	90476	76190	60606	46667	35524
16	1,00000	94444	82381	65756	53333	41259
17		96825	87143	73636	59596	46993
18		98413	91428	79394	65859	53007
19		99206	94286	84242	71515	58741
20		1,00000	96667	88485	76970	64475
21			98095	91818	81616	69790
22			99048	94545	85859	74825
23			99524	96363	89293	79301
24			1,00000	97878	92323	83496
25				98788	94545	86993
26				99394	96364	90070
27				99697	97576	92587
28				1,00000	98586	94685
29					99192	96224
30					99596	97482
31					99798	98322
32					1,00000	99021
33						99440
34						99720
35						99860
36						1,00000

n = 5

k	m=5 n=5	m=6 n=5	m=7 n=5	m=8 n=5	m=9 n=5
0	0,00397	0,00216	0,00126	0,0078	0,00050
1	00794	00433	00253	00155	00100
2	01587	00866	00505	00311	00200
3	02778	01515	00884	00544	00350
4	04762	02597	01515	00932	00599
5	07540	04113	02399	01476	00949
6	11111	06277	03662	02253	01449
7	15476	08874	05303	03263	02098
8	21032	12338	07449	04662	02997
9	27381	16450	10101	06371	04146
10	34524	21429	13384	08547	05594
11	42036	26840	17172	11111	07343
12	50000	33117	21591	14219	09491
13	57936	39610	26515	17716	11988
14	65476	46537	31944	21756	14885
15	72619	53463	37753	26185	18182
16	78968	60390	43813	31080	21878
17	84524	66883	50000	36208	25924
18	88889	73160	56187	41647	30320
19	92460	78571	62247	47164	34965
20	95238	83550	68056	52836	39860
21	97222	87662	73485	58353	44905
22	98413	91125	78409	63792	50000
23	99206	93732	82828	68920	55095
24	99603	95887	86616	73815	60140
25	1,00000	97403	89899	78244	65035
26		98485	92551	82284	69680
27		99134	94697	85781	74076
28		99567	96338	88889	78122
29		99783	97601	91453	81818
30		1,000000	98485	93629	85115
31			99116	95338	88012
32			99495	96737	90509
33			99748	97747	92657
34			99874	98524	94406
35			1,00000	99068	95854
36				99456	97003
37				99689	97902
38				99845	98551
39				99922	99051
40				1,00000	99401
41					99650
42					99800
43					99900
44					99950
45					1,00000

n = 6

k	m=6 n=6	m=7 n=6	m=8 n=6	m=9 n=6
0	0,00108	0,00058	0,00033	0,00020
1	00216	00117	00067	00040
2	00433	00233	00133	00080
3	00758	00408	00233	00140
4	01299	00699	00400	00240
5	02056	01107	00633	00380
6	03247	01748	00999	00599
7	04654	02564	01465	00879
8	06602	03671	02131	01279
9	08983	05070	02946	01798
10	12013	06876	04063	02478
11	15476	09033	05395	03317
12	19697	11713	07093	04396
13	24242	14744	09058	05674
14	29437	18298	11422	07233
15	34957	22261	14119	09051
16	40909	26690	17249	11189
17	46861	31410	20679	13607
18	53139	36538	24542	16384
19	59091	41783	28638	19421
20	65043	47261	33100	22797
21	70563	52739	37729	26434
22	75758	58217	42591	30350
23	80303	63462	47486	34446
24	84524	68590	52514	38781
25	87987	73310	57409	43197
26	91017	77739	62271	47732
27	93398	81702	66900	52268
28	95346	85256	71362	56803
29	96753	88287	75458	61219
30	97944	90967	79321	65554
31	98701	93124	82751	69650
32	99242	94930	85881	73566
33	99567	96329	88578	77203
34	99784	97436	90942	80579
35	99892	98252	92907	83616
36	1,00000	98893	94605	86394
37		99301	95937	88811
38		99592	97036	90949
39		99767	97869	92767
40		99883	98535	94326
41		99942	99001	95604
42		1,00000	99367	96683
43			99600	97522
44			99767	98202
45			99867	98721
46			99933	99121
47			99967	99401
48			1,00000	99620
49				99760
50				99860
51				99920
52				99960
53				99980
54				1,00000

n = 7

k	m=7 n=7	m=8 n=7	m=9 n=7	k	m=7 n=7	m=8 n=7	m=9 n=7
0	0,00029	0,00016	0,00009	33	0,87034	0,73209	0,58147
1	00058	00031	00017	34	89569	76830	62115
2	00117	00062	00035	35	91753	80155	65970
3	00204	00109	00061	36	93590	83217	69677
4	00350	00186	00105	37	95134	85952	73199
5	0055	00295	00166	38	96358	88407	76512
6	00874	00466	00262	39	97348	90536	79607
7	01311	00699	00393	40	98106	92401	82447
8	01894	01026	00577	41	98689	93970	85044
9	02652	01445	00822	42	99126	95307	87386
10	03642	02005	01145	43	99446	96395	89475
11	04866	02704	01556	44	99650	97296	91311
12	06410	03605	02089	45	99796	97995	92919
13	08246	04693	02745	46	99883	98555	94292
14	10431	06030	03558	47	99941	98974	95463
15	12966	07599	04537	48	99970	99301	96442
16	15880	09464	05708	49	1,00000	99534	97255
17	19143	11593	07080	50		99705	97911
18	22786	14048	08689	51		99813	98444
19	26748	16783	10524	52		99891	98855
20	31002	19845	12614	53		99938	99178
21	35519	23170	14956	54		99969	99423
22	40239	26791	17552	55		99984	99607
23	45076	30629	20393	56		1,00000	99738
24	50000	34716	23488	57			99835
25	54924	38943	26801	58			99895
26	59761	43326	30323	59			99939
27	64481	47754	34030	60			99965
28	68998	52245	37885	61			99985
29	73252	56674	41853	62			99991
30	77214	61057	45909	63			1,00000
31	80857	65284	50000				
32	84120	69371	54090				

n = 8

k	m=8 n=8	m=9 n=8	k	m=8 n=8	m=9 n=8
0	0,00008	0,00004	37	0,71313	0,55582
1	00016	00008	38	74732	59260
2	00031	00016	39	77910	62851
3	00054	00029	40	80886	66351
4	00093	00049	41	83590	69708
5	00148	00078	42	86068	72929
6	00233	00123	43	88275	75965
7	00350	00185	44	90256	78828
8	00521	00276	45	91973	81481
9	00738	00395	46	93481	83937
10	01033	00555	47	94755	86170
11	01406	00761	48	95851	88206
12	01896	01032	49	96752	90020
13	02494	01370	50	97506	91641
14	03248	01798	51	98104	93060
15	04149	02320	52	98594	94303
16	05245	02961	53	98966	95364
17	06519	03723	54	99262	96277
18	08026	04636	55	99479	97038
19	09744	05697	56	99650	97680
20	11725	06940	57	99767	98202
21	13932	08359	58	99852	98630
22	16410	09979	59	99907	98967
23	19114	11793	60	99946	99239
24	22090	13830	61	99969	99445
25	25268	16063	62	99984	99605
26	28687	18519	63	99992	99724
27	32269	21172	64	1,00000	99815
28	36045	24035	65		99877
29	39922	27071	66		99922
30	43924	30292	67		99951
31	47956	33649	68		99971
32	52043	37149	69		99983
33	56076	40740	70		99992
34	60078	44418	71		99996
35	63955	48128	72		1,00000
36	67731	51872			

n = 9

k	m=9 n=9	k	m=9 n=9
0	0,00002	42	0,56835
1	00004	43	60191
2	00008	44	63478
3	00014	45	66676
4	00025	46	69759
5	00039	47	72715
6	00062	48	75529
7	00093	49	78186
8	00138	50	80675
9	00200	51	82995
10	00282	52	85134
11	00389	53	87096
12	00531	54	88877
13	00710	55	90488
14	00938	56	91925
15	01222	57	93205
16	01573	58	94326
17	01999	59	95304
18	02515	60	96150
19	03126	61	96874
20	03850	62	97485
21	04696	63	98001
22	05675	64	98427
23	06795	65	98778
24	08075	66	99062
25	09513	67	99291
26	11121	68	99470
27	12904	69	99611
28	14866	70	99718
29	17005	71	99801
30	19325	72	99862
31	21814	73	99908
32	24471	74	99938
33	27285	75	99961
34	30241	76	99975
35	33324	77	99986
36	36521	78	99992
37	39808	79	99996
38	43165	80	99998
39	46571	81	1,00000
40	50000		
41	53429		