

A RENDEZETT MINTÁK ELMÉLETÉNEK ALKALMAZÁSA A STATISZTIKAI MINŐSÉGELLENŐRZÉSSEN

FONTÁNYI ÁGOTA, SARKADI KÁROLY ÉS VAS GYÖRGYNÉ

Összefoglalás

A cikk az ipari gyártásközbéli minőségellenőrzés új statisztikai módszerét tárgyalja, mely a rendezett minták elméletén alapszik.

A statisztikai minőségellenőrzés számára — melynek fő eszközei az ú.n. ellenőrzőkártyák — sokszor jelent nehézséget az ellenőrzőkártyákon vezetni kívánt statisztikai jellemzők (pl. átlag, terjedelem) kiszámításával járó munkatöbblet. Így merült fel a szükséglet egy olyan módszer iránt, mely nem igényel számítást az ellenőrtől, mégis biztos matematikai alapjai vannak. — Ilyennek kínálkozik *Bragin-szkij* ötlete: a rendezett mintákkal való ellenőrzés, ahol a mintában mért értékeket közvetlenül visszük fel az ellenőrző diagrammra, melyen azok »maguktól rendeződnek« nagyság szerint. — A nagyság szerint k -adik elemek mindegyikére megadhatók az ú. n. ellenőrzőhatárok, melyeken belül 1-hez közeleső valószínűséggel kell elhelyezkedniök akkor, ha a gyártásban semmi rendellenesség nincsen. Az ellenőrnek csak azt kell figyelnie, hogy az elemek ezen határok között vannak-e. — A cikk tárgyalja a módszer elméleti alapjait és közli a számításokhoz szükséges segéd táblázatokat, melyeket Intézetünk dolgozott ki.

1. A matematikai statisztika szerepe az ipari minőségellenőrzésben

A minőségellenőrzés azon módszereit, amelyek a matematikai statisztika elméletének felhasználásával minta alapján következtetnek a teljes gyártmány mennyiségre, statisztikai ellenőrző módszereknek nevezzük. A statisztikai ellenőrzésnek több gyakorlati megvalósításmódja ismeretes, melyeket különböző üzemi és gazdasági követelmények alakítottak ki. Ezen módszerek egyrésze gyártásközbéli ellenőrzés során nyer alkalmazást, más része viszont a kész termékek ellenőrzésénél. E két csoporton belül még különböző lehetőségek nyílnak az ellenőrzés formájának megválasztására.

Így például a gyártásközi statisztikai minőségellenőrzés legismertebb fajtáinál a gyártásközből vett minták következő jellemzőit kísérik figyelemmel:

- a minta egyes darabjain mért értékek átlagát és ugyanakkor terjedelmét (a legkisebb és legnagyobb érték különbsége),
- a minta értékeinek átlagát és szórását,
- a mintában talált selejtes darabok számát, stb.

E módszerek közül az első kettő és még számtalan további módszer kisebb-nagyobb számítási feladatokat ró az azt alkalmazó ellenőrre. Az alábbiakban olyan módszert ismertetünk, melynek alkalmazásához semmiféle számolásra nincs szükség, de mint később látni fogjuk, további előnyökkel is rendelkezik. E módszert *Bragin-szkij*[1] szovjet szerző ötlete nyomán — szí-

gorú elméleti alapokra támaszkodva — Intézetünk dolgozta ki és hazánkban való gyakorlati alkalmazását először kezdeményezte [5].

Az alábbiakban foglalkozunk e módszer elméleti alapjaival, a gyakorlatba való bevezetés munkájához szükséges tudnivalókkal és alkalmazásának első tapasztalataival, továbbá közöljük az alkalmazáshoz szükséges — Intézetünk által kidolgozott — táblázatokat.

2. Rendezett mintaelemekkel való statisztikai minőségellenőrzés valószínűségszámítási alapjai

E módszer a rendezett minták elméletére támaszkodik. Ez az elmélet feleletet ad arra a kérdésre, hogy ha egy ismert eloszlású sokaságból n elemű mintát veszünk és a minta elemeit nagyság szerint rendezzük, akkor milyen lesz a k -adik elem eloszlása ($k = 1, 2, \dots, n$). Minthogy pedig valamely minta nagyságszerint rendezett elemeinek — pl. az elsőnek (legkisebbnek) — határozott eloszlása van, ennél fogva megadható két olyan határ, amely határok között a minta ezen eleme pl. 99%-os valószínűséggel fog elhelyezkedni. Ha tehát a minta nagyság szerint első, második, stb. elemei részére ezeket a határokat elő tudjuk írni, akkor a gyártás során figyelemmel kísérhetjük, hogy a megfelelő mintaelemek valóban az előírt határok közé esnek-e. Ez teszi lehetővé, hogy a rendezett mintaelemek figyelemmel kíséréseivel minőségellenőrzési módszert építsünk ki.

Tekintsük valamely gyártmány egy mérhető tulajdonságát. Ennek mértéke stabilis gyártás során egy bizonyos meghatározott eloszlást fog követni. Jelöljük az eloszlás sűrűségfüggvényét $f(x)$ -szel, eloszlásfüggvényét $F(x)$ -szel, az n elemű minta k -adik elemének sűrűségfüggvényét $f_{nk}(x)$ -szel, és eloszlásfüggvényét $F_{nk}(x)$ -szel ($k = 1, 2, \dots, n$).

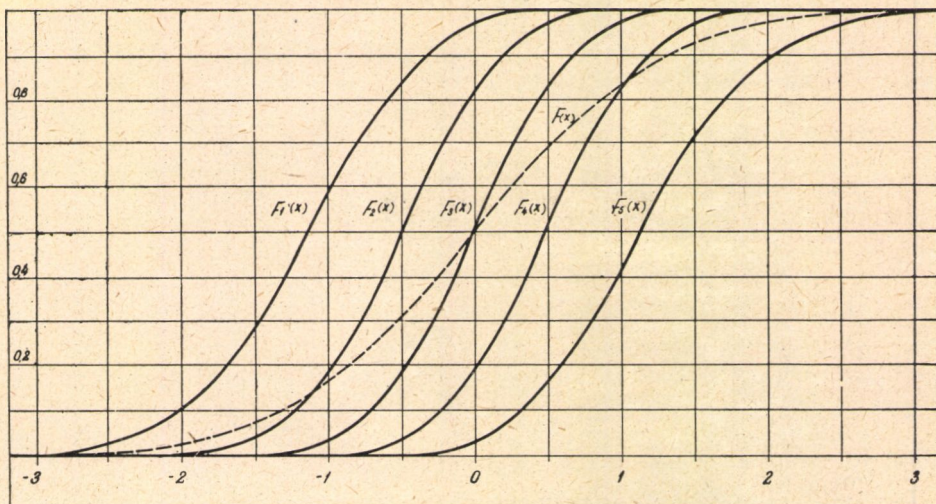
Ezen eloszlás-, illetve sűrűségfüggvények között a következő összefüggések állnak fenn [2]:

$$(1) \quad F_{nk}(x) = \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} (F(x))^r (1 - F(x))^{n-r}$$

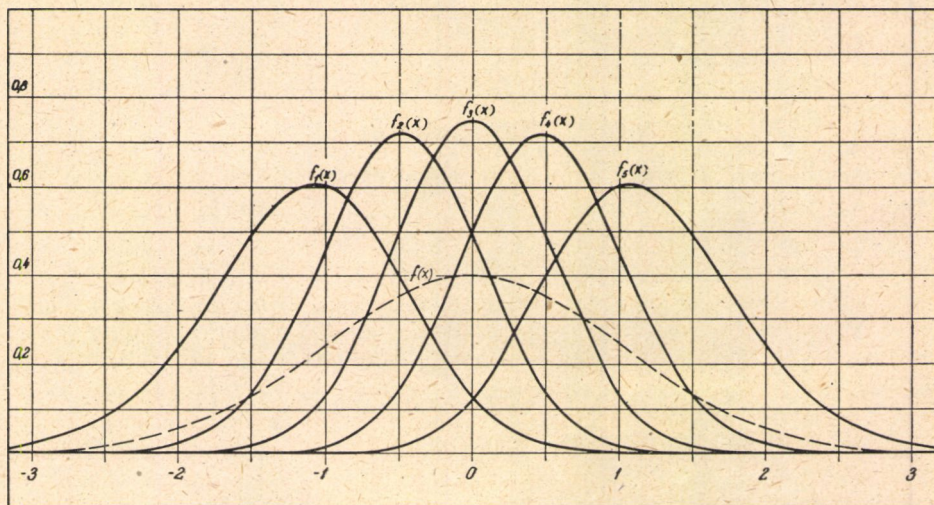
$$f_{nk}(x) = k \binom{n}{k} (F(x))^{k-1} (1 - F(x))^{n-k} f(x).$$

Ezen összefüggések lehetővé teszik, hogy az eredeti eloszlásból meghatározzuk a rendezett mintaelemek bármelyikének sűrűségfüggvényét, illetve eloszlásfüggvényét. Nevezetesen meghatározható $F(x)$ -nek két határozott x_1 és x_2 helyhez tartozó $F(x_1)$ és $F(x_2)$ függvényértékéből az $F_{nk}(x_1)$ és $F_{nk}(x_2)$ érték, tehát különbségük is, vagyis annak a valószínűsége, hogy a k -adik elem x_1 és x_2 közé esik. Ha tehát valamely n elemű minta k -adik elemére nézve valamely $F(x)$ alapeloszlásfüggvényből kiindulva meghatározzuk azon x_1 és x_2 értékeket, melyeken belül kell esnie a k -adik elem eloszlásának pl. 99%-os valószínűséggel, akkor ha a k -adik elem kívülesik ezen a 99%-os ún. ellenőrzőhatáron — ez igen nagy valószínűséggel arra enged következtetni, hogy az eredeti eloszlás már nem áll fenn a mért tulajdonság értékére nézve.

Az 1/a. sz. ábra szemléltető példaként normális eloszlású alapsokaságból vett ötelemű minták nagyság szerint rendezett elemeinek eloszlásfüggvényét



1/a. ábra



1/b. ábra

ábrázolja, az alapsokaság eloszlásfüggvényével együtt. Az 1/b. sz. ábra ábrázolja ugyanezek sűrűségfüggvényét.

Ha például megállapodunk abban, hogy 99%-os ellenőrzőhatárokat választunk, és az ellenőrzőhatár túllépését minden alkalommal jelnek tekint-

jük arra, hogy a gyártás megváltozott, akkor hibátlan gyártás esetén 99%-os valószínűsége van annak, hogy nem avatkozunk be indokolatlanul a gyártás menetébe, azaz 100 eset közül általában csak egyszer fog előfordulni, hogy a gyártásmenet megváltozására következtetünk, holott az ellenőrzőhatár túllépését csak a véletlen okozta.

A mondott 99%-os valószínűség arra vonatkozik, ha csak egyetlen elem »99%-os« ellenőrzőhatárát figyeljük. Tehát pl. a 3. elemre határozzuk meg azon x_1 és x_2 értéket, melyen belül kell esnie az esetek 99%-ában. Miután azonban egyszerre több elem ellenőrzőhatárát figyeljük, tudnunk kell azt is, hogy mi annak az együttes valószínűsége, hogy a figyelt elemek közül bármelyik túllépje az ellenőrzőhatárát; ennek valószínűsége természetesen nagyobb, mint annak, hogy csak egy bizonyos elem lépje azt túl. Az együttes valószínűség kiszámításának módjával a függelékben foglalkozunk.

A gyakorlatban általában nem valamennyi, hanem csak bizonyos kiválasztott mintaelemeket kísérünk figyelemmel, és igen sokszor ezeknek is csak vagy az alsó, vagy a felső határát.

Ahhoz, hogy dönteni tudjunk abban a kérdésben, hány elem ellenőrzőhatárát figyeljük meg és melyeknek az alsó, melyeknek a felső határát, szükséges itt röviden foglalkoznunk valamely minta különböző elemeinek egymástól való függőségével, illetve függetlenségével.

A rendezés nélküli minta elemeit egymástól függetleneknek tekinthetjük, ami azt jelenti, hogy ha az egyik mintaelem pontos értékét ismerjük, ezzel még nem tudunk semmivel sem többet a többi mintaelem eloszlásáról. Nem mondható el ugyanez a rendezett minta elemeiről. A függelékben kimutatjuk, hogy a minta rendezett elemei között pozitív korreláció áll fenn. Ez annál szorosabb, minél közelebbi elemekről van szó. Mennél nagyobb a korreláció, annál könnyebben fordul elő, hogy két mintaelem egyszerre »jelez«: egyszerre lépik át felső vagy egyszerre alsó ellenőrzőhatárukat.

A korreláció megmarad akkor is, ha az eredeti eloszlás eltolódik, vagy megváltozik. Ezért, ha nem minden egyes mintaelem viselkedését figyeljük, két egymástól távolabb eső elem ellenőrzése érzékenyebb eljárás, mint két szomszédos elemé, ha azonos oldali ellenőrzőhatárokat kísérünk figyelemmel.

Tehát úgy kell megválasztanunk az ellenőrzendő mintaelemeket, hogy azok — bár egymástól függetlenek nem lehetnek — mégis közel függetlenek legyenek egymástól. Éppen ez a körülmény igen egyszerű közelítő számítást tesz lehetővé az együttes valószínűségekre nézve. Ha a számítást úgy végezzük, hogy feltesszük, hogy a vizsgált mintaelemek egymástól függetlenek, akkor annak a valószínűsége, hogy a vizsgált mintaelemek egyike se lépje át ellenőrzőhatárát, egyenlő azoknak a valószínűségeknek a szorzatával, hogy az egyes vizsgált mintaelemek külön-külön nem lépik át ellenőrzőhatáraikat. Bár ez a feltevés és a számítás is csak közelítő, annál inkább elfogadható lesz, mennél nagyobb a minta darabszáma (ugyanannyi megvizsgált elem esetén) és az egyes elemek mennél távolabb esnek egymástól. A függelékben ezt a kérdést is részletesen megvizsgáljuk. A numerikus számítások azt mutatják, hogy már ötelemű mintánál, ha a két szélső elem külső ellenőrzőhatárát és a középső elem mindkét ellenőrzőhatárát figyeljük, a két számítási módszerrel kiszámított értékek közti különbség nem lesz nagyobb, mint a számítási hiba határa, a gyakorlat által megkövetelt számítási pontosság mellett. Ez azt jelenti, hogy a gyakorlati számítások szempontjából majdnem mindig fel lehet téte-

lezni a függetlenséget. Így pl. ha a mondott esetben a két szélső elemre nézve 97,5%-nál választjuk a valószínűségi határt, míg a középső elemre 95%-nál, akkor annak valószínűsége, hogy egyik vizsgált elem sem lép ki ellenőrzőhatárai közül, közelítőleg $0,975^2 \cdot 0,95 \approx 0,903$ lesz. Az exakt módszerrel kapott eredmény 0,907, ahol azonban az utolsó számjegy a számítási hiba-határ következtében már nem megbízható.

3. Eddig alkalmazott módszerek, amelyeknél a rendezett minták elméletét felhasználták

Olyan statisztikai ellenőrző módszereket, amelyek rendezett minta-elemek valamelyikének figyelemmel kísérésén alapulnak, már régebben alkalmaznak.

Így igen elterjedt a minta mediánjának ellenőrzése, amely mellett általában valamely más természetű jellemző (pl. a terjedelem) megfigyelése is szokásos. A medián alkalmazását elsősorban az indokolja, hogy szimmetrikus eloszlás esetén nem ad sokkal rosszabb felvilágosítást a sokaság elhelyezkedéséről, mint a minta átlaga, ugyanakkor nem igényel semmiféle számítást.

A rendezett minták elemeinek eloszlását használja fel az a minőség-ellenőrzési módszer is, amelynél a minta legnagyobb és legkisebb elemét kísérik figyelemmel. — Említi ezt a módszert a szovjet irodalom is. — Széleskörben alkalmazzák a maximum-minimum rendszerű kártyákat a cseh ipari minőség-ellenőrzésben. Az erre vonatkozó gyakorlati utasítások, valamint az ellenőrzőhatárok kiszámításához szükséges táblázat fontos részt foglal el pl. *J. Uchytíl* és a cseh Nehézipari Kutatóintézet statisztikai minőségellenőrzésről szóló könyvében [3] [4].

Azt a gondolatot, hogy a rendezett minta bármely elemének valószínűségi határait fel lehet használni az ipari minőségellenőrzésben, *Braginszkij* vetette fel.

Könyvében az ilyen módszerrel vezetett ellenőrzőkártyának több változatát ismerteti és részletes, gyakorlati szempontból értékes útmutatásokat ad azok vezetésére.

A rendezett minta elemeinek valószínűségi határaitra táblázatokat ad és leírja, hogy ezeket a határokat hogyan számította ki. Ez az eljárás meg-egyezik az általunk követett és fentebb ismertetett eljárással abban, hogy x -nek azt a két értékét, amely közé a k -adik mintaelemnek bizonyos valószínűséggel esnie kell, úgy számítja ki, hogy előbb meghatározza a keresett x értékekhez tartozó két $F(x)$ értéket.

Ezen értékek kiszámítását azonban *Braginszkij* nem az exakt matematikai összefüggések alapján oldotta meg. Számításainak alapjait a következőkben ismertetjük röviden:

Az $F(\xi_k^*)$ várható értékét $\frac{2k-1}{2n}$ -nek tekinti (ξ_k^* -gal jelöltük a nagyság szerint rendezett k -adik mintaelem értékét, amely valószínűségi változó). Szórás-négyzetének becsléséül pedig az $\frac{F(\xi_k^*)[1-F(\xi_k^*)]}{n}$ kifejezést adja meg. Ezután az ellenőrzőhatárokat úgy állapítja meg, hogy a várható értéktől való távolságuk a szórás háromszorosa legyen.

Ez az eljárás többféle szempontból kifogásolható : a háromszoros szórás határ használata csak normális eloszlás esetében indokolt és $F(\xi_k^*)$ eloszlása nem az ; továbbá nem indokolt a szórás helyett az ellenőrzőhatártól függő szórásbecsléssel dolgozni. A szórásbecslésre és a várható értékre adott kifejezések még csak nem is megfelelő közelítések.

Ezért, a *Braginszkij* által megadott módszer alap gondolatának és egyes gyakorlati utasításainak megtartása mellett, az ellenőrzésnél alkalmazandó határokat *Braginszkij* eljárásától eltérően a rendstatisztika ismert eredményeinek felhasználásával exakt módon számítottuk ki.

4. Az ellenőrzőhatárok kiszámításának módja, gyakorlati segédtablázataink ismertetése

Minthogy a rendezett elemű mintákkal való minőségellenőrzés azon alapszik, hogy valamely többelemű minta egyes rendezett elemeire nézve megfigyeljük, hogy azok az ellenőrzőhatárok közé esnek-e, első feladat ezen ellenőrzőhatároknak a kiszámítása, illetve erre vonatkozó módszer kidolgozása.

Annak érdekében, hogy az ellenőrzőhatárok kiszámítását megkönnyítsük, táblázatot készítettünk, amelynek segítségével meghatározhatók tetszőleges — valamely gépre és gyártmányra adatfelvétel alapján megállapított — eloszláshoz a minták rendezett elemeire vonatkozó ellenőrzőhatárok.

Az ellenőrzőhatárok megállapításánál a gyártás körülményeinek figyelembevétele alapján kell határozni a felett, hogy ezen határok közé a k -adik elem milyen valószínűséggel essék. Táblázatainkat 99 és 95 százalékos valószínűségi határokkal készítettük el oly módon, hogy mind a felső, mind az alsó határra nézve annak a valószínűsége, hogy a mintaelem az illető határon kívülesik, az első esetben 0,5—0,5%, a második esetben 2,5—2,5%. Ez tehát azt jelenti, hogy olyan x_1 , illetve x_2 értékeket keresünk, amelyekre nézve $F_{nk}(x_1) = 0,005$, illetve 0,025 és $F_{nk}(x_2) = 0,995$, illetve 0,975. A 99%-os valószínűségi határok jobban védenek a gyártás menetébe való felesleges beavatkozással szemben. Ugyanakkor azonban gyakrabban minősítik a minta alapján megfelelőnek a ténylegesen selejtes gyártást, mint a 95%-os határok. — A gyakorlatban tehát akkor fogunk a szigorúbb, 95%-os határokkal dolgozni, ha nagy biztonsággal akarunk a selejt megjelenése ellen védekezni. Ha azonban a gyártás menetébe való felesleges beavatkozás elkerülése nagyobb érdek, akkor a 99%-os kevésbé szigorú határok választása célszerű.

Meg kell jegyeznünk, hogy a táblázatokon feltüntetett 99%-os, illetve 95%-os valószínűségi szint csak az egyes mintaelemekre vonatkozik, és pedig arra az esetre, ha mindkét oldali ellenőrzőhatárt figyeljük.

Az I. táblázat azokat az értékeket tartalmazza, amelyekből egy adott gyártási eljárásnál tapasztalatilag meghatározott eloszláshoz kiszámíthatjuk a különböző darabszámú minták egyes elemeinek alsó és felső ellenőrzőhatárait. A minták darabszámát n -nel, a nagyság szerint rendezett minták sorszámát pedig k -val jelöltük. A táblázat baloldalán a 95%-os, jobboldalán a 99%-os valószínűségi határokhöz tartozó értékek találhatók.

Ezen értékeket a gyakorlatban elegendőnek látszó n és k számokra dolgoztuk ki, mégpedig $n = 4 - 15$ -ig minden egyes mintára és minden elemre, ezen felül $n = 29$ -ig pedig csak kiválasztott mintadarabszámokra és ezen belül is csak meghatározott elemekre.

Az ellenőrzőhatárok megállapításánál tehát arról van szó, hogy adott $F_{nk}(x)$ értékekhez tartozó x értékeket keresünk. Ezt nem tudjuk közvetlenül megtenni. Amint az előzőkből azonban már láttuk, az $F_{nk}(x)$ értékek meghatározzák az ugyanezen x -hez tartozó $F(x)$ értékeket. Az x -hez tartozó $F(x)$ érték ismeretében viszont — ha ismerjük az eloszlásfüggvényt — az x értéke meghatározható.

A I. sz. táblázat első oszlopa tartalmazza $F(x)$ -nek azokat az értékeit, amely értékekhez tartozó x_1 , illetve x_2 -re vonatkozóan az $F_{nk}(x_1) = 0,005$, illetve $0,025$ (alsó ellenőrzőhatárok) és az $F_{nk}(x_2) = 0,995$, illetve $0,975$ (felső ellenőrzőhatárok). Hogy ezen értékekből miképpen határozhatjuk meg a gyakorlatban, egyszerű eszközökkel bármilyen eloszlás esetén a keresett x_1 , illetve x_2 értékeket, annak szemléltetésére egy konkrét példát adunk.

Az túloldali 1. sz. táblázat egy adagból származó csapágygolyók törőere-jének tapasztalati eloszlását tartalmazza. Az első oszlop tartalmazza a mért értékeket, a második oszlop ezek gyakoriságát, a harmadik oszlop pedig az illető értéknél nem nagyobb darabok számát, a negyedik oszlop ezen utóbbiak arányát az összes darabok számához viszonyítva, vagyis a tapasztalati eloszlásfüggvény értékeit.

Vegyük például az ötelemű minta esetét és határozzuk meg a második mintaelem 95%-os valószínűségű alsó és felső ellenőrzőhatárát. Az I. sz. táblázat 1. oszlopából látjuk, hogy az $F(x_1) = 0,052$, és az $F(x_2) = 0,717$. Az 1. sz. táblázat negyedik oszlopában megnézzük, hogy ezen értékeket melyik ott szereplő $F(x)$ értékek közelítik meg legjobban. Látjuk, hogy az $F(x_1) = 0,052$ értéket az $F(x) = 0,054$ érték, az $F(x_2) = 0,717$ értéket az $F(x) = 0,720$ érték. Tehát az ezekhez tartozó $x_1 = 3800$ képezi a második elem alsó és az $x_2 = 5600$ a második elem felső ellenőrzőhatárát.

Ha valamely gyártási eljárásnál a tapasztalat is alátámaszt valamely elvileg indokolt, ismert eloszlást $F(x)$ -re nézve, akkor ezen eloszlásnak táblázatban kidolgozott adataira támaszkodhatunk, vagyis az I. táblázat 1. oszlopából megállapított $F(x_1)$, illetve $F(x_2)$ -höz tartozó x_1 és x_2 értékeket ebből a táblázatból keressük vissza.

A normális eloszlásra vonatkozóan ezen visszakeresést elvégeztük, mivel az ipari minőségellenőrzés gyakorlatában az esetek igen nagy részében normális, vagy ahhoz igen közelálló eloszlású sokaságok fordulnak elő. A 2. oszlop értékei a 0 átlagos értékű és egységnyi szórású normális eloszlás megfelelő elemeinek ezen visszakeresett ellenőrzőhatárait tartalmazzák. Ezekből az úgynevezett »kontrolltényező«-ből a tényleges eloszlás ellenőrzőhatárait a következőképpen kapjuk meg: a kontrolltényezőt szorozzuk az adott gyártóberendezésre és gyártmányra vonatkozó adatfelvételtől kapott szórással, és az így kapott értékeket hozzáadjuk — természetesen az előjel figyelembevételével — a műszaki követelmények által megszabott legkedvezőbb átlaghoz. A legkedvezőbb átlag normális eloszlás esetén a tűrésmező közepén van akkor, ha a tűréshatárok távolsága kb. egyenlő 6σ -val, vagy annál kisebb. (Az utóbbi esetben szükség szerint az átlag a javítható selejt irányába eltolható.)

Amennyiben a tűréshatárok egymástól való távolsága nagyobb, mint 6σ , úgy gyakorlatilag a gyártás selejtmentes lesz mindaddig, amíg az átlag mindkét tűréshatártól legalább 3σ -nyi távolságra van. Nem szükséges tehát, hogy az átlag a tűrésmező közepén helyezkedjék el, hanem e sávon belül eltolódhat. Ebben az esetben a felső ellenőrzőhatárokat úgy kapjuk meg, ha

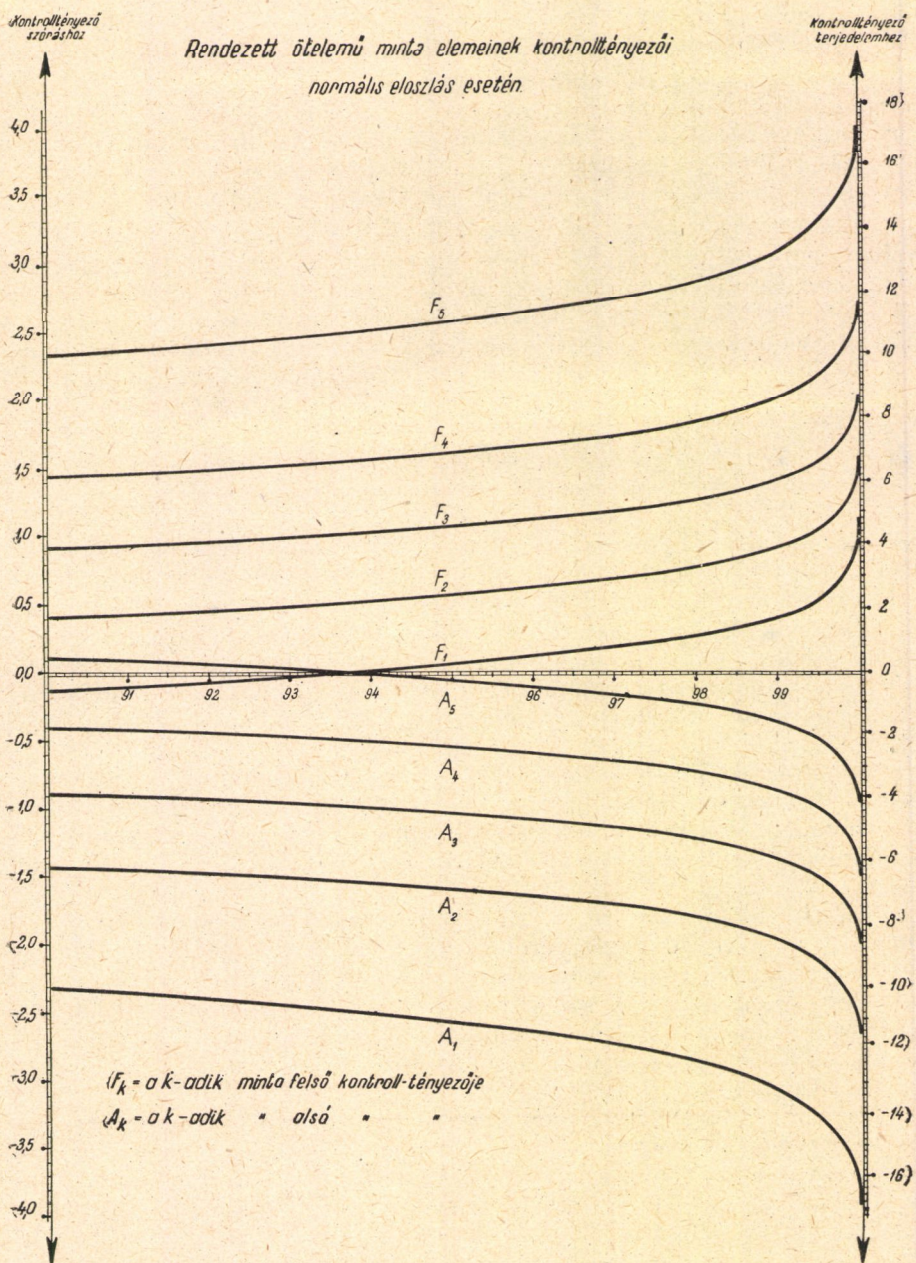
a lehető legnagyobb megengedhető átlaggal számolunk, — amely a felső tűréshatártól lefelé 3σ -nyi távolságra van — az alsó határokat pedig úgy, hogy a legkisebb megengedhető átlaggal számolunk, amely az alsó tűréshatártól felfelé van 3σ -val.

1. táblázat

i	1.	2.	3.	4.
	x_i	f_i	$\sum_{i=1}^k f_i$	$\sum_{i=1}^k f_i$
	kg	db.		$F(x) = \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{N}$
1	3300	1	1	0,004
2	3400	1	2	0,008
3	3500	2	4	0,017
4	3600	3	7	0,029
5	3700	2	9	0,038
6	3800	4	13	0,054
7	3900	5	18	0,075
8	4000	3	21	0,088
9	4100	2	23	0,096
10	4200	3	26	0,109
11	4300	4	30	0,126
12	4400	6	36	0,151
13	4500	5	41	0,172
14	4600	9	50	0,209
15	4700	11	61	0,255
16	4800	11	72	0,301
17	4900	9	81	0,339
18	5000	14	95	0,397
19	5100	13	108	0,452
20	5200	17	125	0,523
21	5300	15	140	0,586
22	5400	11	151	0,632
23	5500	12	163	0,682
24	5600	9	172	0,720
25	5700	12	184	0,770
26	5800	8	192	0,803
27	5900	7	199	0,833
28	6000	8	207	0,866
29	6100	3	210	0,879
30	6200	7	217	0,908
31	6300	6	223	0,933
32	6400	4	227	0,950
33	6500	3	230	0,962
34	6600	2	232	0,971
35	6700	3	235	0,983
36	6800	2	237	0,992
37	6900	1	238	0,996
38=n	7000	1	239	1,000

x_i = mért érték

f_i = előfordulási gyakoriság. $\sum_{i=1}^n f_i = N = 239$.



2. ábra

A tűréshatárok és a szórás viszonyának figyelembevétele az ellenőrzőhatárok megállapításakor egyéb minőségellenőrzési módszereknél is szokásos.

A szórás ismeretében alkalmazandó kontrolltényezők mellett kidolgoztuk azokat a kontrolltényezőket is, amelyekből az átlagos terjedelem segítségével nyerhetjük az ellenőrzőhatárokat, mivel a gyakorlatban valamely adatfelvétel alapján az átlagos terjedelem kiszámítása egyszerűbb, mint a szórás meghatározása. Ezeket a kontrolltényezőket a 3. oszlop tartalmazza.

Visszatérve az I. sz. táblázat 1. oszlopára, megjegyezzük, hogy az abban foglalt értékek tekinthetők egyúttal az $F(x) = x$ ($0 \leq x \leq 1$) eloszlásfüggvényű egyenletes eloszlás kontrolltényezőinek is. Azonban az ipari minőségellenőrzés során ilyen eloszlással nemigen találkozhatunk, — tehát ezen oszlop közvetlen felhasználására a gyakorlatban általában nem nyílik alkalom.

Tekintettel arra, hogy a gyártásközi statisztikai minőségellenőrzés gyakorlatában igen gyakran fordul elő, hogy ötelemű mintákkal folyik az ellenőrzés, kidolgoztuk és diagrammba foglaltuk az ötelemű minták minden elemének a 90%-ot meghaladó tetszőleges biztonsághoz tartozó kontrolltényezőit (2. sz. ábra) normális eloszlású alapsokaságra. A kontrolltényezők a diagrammból közvetlenül leolvashatók mind a szórás, mind az átlagos terjedelem egységében.

5. A minták darabszáma, az ellenőrzendő mintaelemek és ellenőrzőhatárok kiválasztásának szempontjai

Az eddigiekből látható, hogy n elemű minták esetében meghatározhatók a nagyságszerint rendezett elemek mindegyikének ellenőrzőhatárai, a gyakorlatban azonban legfeljebb 5—6 elem figyelemmel kísérése látszik megvalósíthatónak. Előfordulhat természetesen, hogy igen nagy gazdasági érdek fűződik valamely gyártmány alapos ellenőrzéséhez, amikor ügyelni kell arra is, hogy a mért adat eloszlása semmiféle elváltozást ne mutasson. Ilyenkor több elem figyelemmel kísérése érdekében kerülhet sor. Ez azonban nyilván kivételes eset.

Felmerül azonban a kérdés, hogy ha meghatároztuk a figyelemmel kísért elemek számát és azt pl. ötnél választottuk, akkor vajon egy ötelemű minta minden elemét kísérjük-e figyelemmel, vagy pedig nagyobb darabszámú minta elemei közül válasszuk ki az ellenőrzőkártyán vezetendő öt elemet.

Ennek eldöntésénél figyelembe kell vennünk a rendezett minta elemeinek egymástól való függőségéről mondottakat. Nagyjából azt mondhatjuk, hogy nagyelemű mintának szomszédos elemei kb. ugyanarra figyelmeztetnek, tehát nagyelemű mintából az egymástól távolabb eső elemek figyelemmel kísérése ajánlatos. Pl. 13 elemű mintánál a nagyság szerint első, negyedik, hetedik, tizedik és tizenharmadik mintaelem választása célszerű, ha öt elemet kívánunk figyelni.

Tehát az ötelemű minta két szomszédos elemének függősége nagyobb, mint ha egy nagy elemszámú mintából öt elemet úgy választunk ki, hogy azok egyenlő távolságra és minél messzebb essenek egymástól. Ezért, ha nagyobb biztonsággal akarunk dolgozni, nagy elemszámú mintából válasszuk ki a megfigyelendő öt mintaelemet. Ha a sok munkadarab mérése technikai nehézséget okoz, akkor természetesen kisebb mintát választunk, esetleg csak éppen akkorát, ahány elemet figyelni akarunk, példánkban öteleműt.

Azt mondhatjuk azonban, hogy ezen kiválasztott elemek egy diagrammon való figyelemmel kísérése még mindig rendkívül bonyolult akkor, ha ezen elemek mindkét ellenőrzőhatárát berajzoljuk. A sok határ a diagrammot áttekinthetatlenné teszi, márcsak azért is, mert az ellenőrzőszávok (az egyes elemek ellenőrzőhatárai között lévő területek) általában egymásbanyúlnak. Ennek elkerülését teszi lehetővé, ha nem figyeljük minden kiválasztott elem mindkét ellenőrzőhatárát, hanem a középső elemnél kisebbeknek csak az alsó, a középső elemnél nagyobbaknak csak a felső ellenőrzőhatárát. Az így elhagyott belső ellenőrzőhatárok figyelmen kívül hagyása nem jelenti az ellenőrzés hatásosságának számbajövő csökkenését, hiszen ezek túllépése — abban az esetben, ha egyidejűleg minden adat a külső ellenőrző határokon belül van — csupán azt teszi valószínűvé, hogy az eloszlás még jobban az átlag körül sűrűsödik. Természetesen a mediánnak célszerű mind az alsó, mind a felső határát vezetni.

A mintaelemek kiválasztásánál tekintetbe kell venni azt a körülményt, hogy a statisztikai minőségellenőrző módszerek célja annak felderítése, hogy az eloszlásban nem állt-e be olyan változás, amelynek következtében a selejt megnövekszik. A leggyakrabban előforduló ilyen változás az, amikor az eloszlás jellege ugyan nem változik lényegesen, de átlaga eltolódik, vagy szórása megnövekszik, esetleg mindkettő egyszerre. Ha az átlag eltolódik, akkor minden egyes mintaelem elhelyezkedése megváltozik ugyan, azonban az eltolódást legérzékenyebben a medián jelzi, amely túllépi az eltolódás irányába eső ellenőrzőhatárát. Ha a szórás növekszik meg, úgy erre legérzékenyebben a szélső elemek reagálnak külső ellenőrzőhatáruk túllépésével. A külső elemeknek legalább valamelyike ezenkívül jelezni fog minden olyan egyéb változást is, amely a selejt megnövekedésével jár.

Fenti szempontok alapján ajánlatos a minta szélső elemei külső ellenőrzőhatárainak feltétlen figyelése és ezek mellett páratlan mintadarabszám esetén a középső elem mindkét határának, páros darabszám esetén a két középső elem mindegyike külső ellenőrzőhatárának figyelése.

Ha az ellenőrzést így végezzük, akkor a 2. pontban mondottak szerint az egy elemre vonatkozó 99%-os valószínűségi szint 98%-os, a 95%-os valószínűségi szint 90,3%-os valószínűséget jelent a valóságban arra nézve, hogy megfelelő gyártási folyamat esetén nem történik felesleges beavatkozás.

* 6. *Maximum-minimum-rendszerű ellenőrzés*

Mint már említettük, speciális esete a rendezett elemű mintákkal történő minőségellenőrzésnek az úgynevezett »maximum-minimum-kártyák« használata. Ennek a módszernek alkalmazásánál az ellenőrzőhatárok kiszámítása nem az általunk előbbiekben ismertetett módon szokott történni, bár így is elvégezhető. Ugyanis általában nem az alapsokaság eloszlásának jellemzőit használják fel, hanem a legkisebb, ill. legnagyobb mintaelem eloszlásának átlagát, ami az ellenőrzés hibaforrásait csökkenti. A szélső értékek átlagának megállapításához olyan adatfelvétel szükséges, amelynél sok akkora elemszámú mintát veszünk, amekkora minták alapján ellenőrizni akarunk.

Az ellenőrzőhatárok kiszámítását úgy végezzük, hogy a szélső elemek eloszlásának átlagát adatfelvételek alapján határozzuk meg és ehhez adjuk

hozzá — maximum esetében —, illetve vonjuk le — minimum esetében — az ugyancsak adatokból nyert átlagos terjedelem értékét, megszorozva egy — a minta darabszámától függő — táblázatban megadott konstanssal.

Intézetünkben a szélső elemek figyelemmel kísérésén alapuló ellenőrzési módszert több szempontból továbbvittük. Két — *Uchytíl* könyvében használttól különböző — valószínűségi szintre dolgoztuk ki a kontrolltényezőket, és pedig az ott találhatónál nagyobb mintaelemszám esetére is, valamint meghatároztuk a szélső értékeknek mind alsó, mind felső ellenőrzőhatárát is, normális alapeloszlás feltételezése mellett. Természetesen a gyakorlatban el lehet tekinteni a belső határok vezetésétől itt éppúgy, mint több mintaelem ellenőrzése esetében. Az ellenőrzőhatárok meghatározásánál a szélső értékek adatfelvételnél kapott átlagát egybevetjük az egész eloszlás minőség szempontjából legmegfelelőbb átlagával.

Módszerünk kidolgozásánál arra törekedtünk, hogy az a gyakorlati szakemberek kezében könnyen kezelhető maradjon. Ezt a célt szolgálja a II. sz. táblázat. Ez a táblázat tartalmazza a legnagyobb és legkisebb mintaelem kontrolltényezőit. A kontrolltényezők az ellenőrzőhatároknak a maximum, illetve minimum átlagától való távolságát adják meg — a feltüntetett valószínűségi szint mellett — az átlagos terjedelem egységében.

Tehát a táblázatból az ellenőrzőhatárokat a következőképpen kapjuk meg;

$$\begin{aligned} \text{a maximum felső ellenőrzőhatára : } & \bar{x}_{\max} + K_m \bar{R} \\ \text{a maximum alsó ellenőrzőhatára : } & \bar{x}_{\max} - B_m \bar{R} \\ \text{a minimum felső ellenőrzőhatára : } & \bar{x}_{\min} + B_m \bar{R} \\ \text{a minimum alsó ellenőrzőhatára : } & \bar{x}_{\min} - K_m \bar{R} \end{aligned}$$

ahol $\bar{x}_{\max}$ = a maximum átlaga,

$\bar{x}_{\min}$ = a minimum átlaga,

$\bar{R}$ = az átlagos terjedelem,

$\bar{x}_{\max} - \bar{x}_{\min} = \bar{R}$.

7. Kísérleti adatfelvétel és a gyakorlati alkalmazás első tapasztalatai

A rendezett minták elméletén alapuló statisztikai minőségellenőrzési módszer gyakorlati üzemi alkalmazása előtt kísérleti adatfelvételekkel ellenőriztük, hogy a tapasztalati adatok mennyire tesznek eleget feltevéseinknek. Méréseket végeztünk a Csepel Autógyárban, továbbá a Rákosi Mátyás Művek Kerékpárgyárában. A gyártmány megválasztásánál az volt az irányadó, hogy a rendelkezésünkre álló mérőműszerekkel tűréshatárokon belül legalább 10—15 különböző értéket mérhessünk. Így a kapott eloszlás mellett egy-egy mintán belül a különböző elemek ritkán estek össze. Az adatfelvételt oly módon végeztük, hogy a kiválasztott gépen, minden egyes gyártmánydarabot az elkészülés sorrendjében mértünk le és jegyeztünk fel. A gyártásba történt külső beavatkozást mindenkor feltüntettük és feldolgozáskor csak azokat az adatokat tekintettük egy alapsokaságból származóknak, melyek beavatkozás nélkül készültek. Az egymásután következő adatokból akkora csoportokat

Kísérleti adatfelvétel

Készült: RM Művek Kerékpárgyárában

Gép: Skoda 40 egyorsós forgácsoló automata

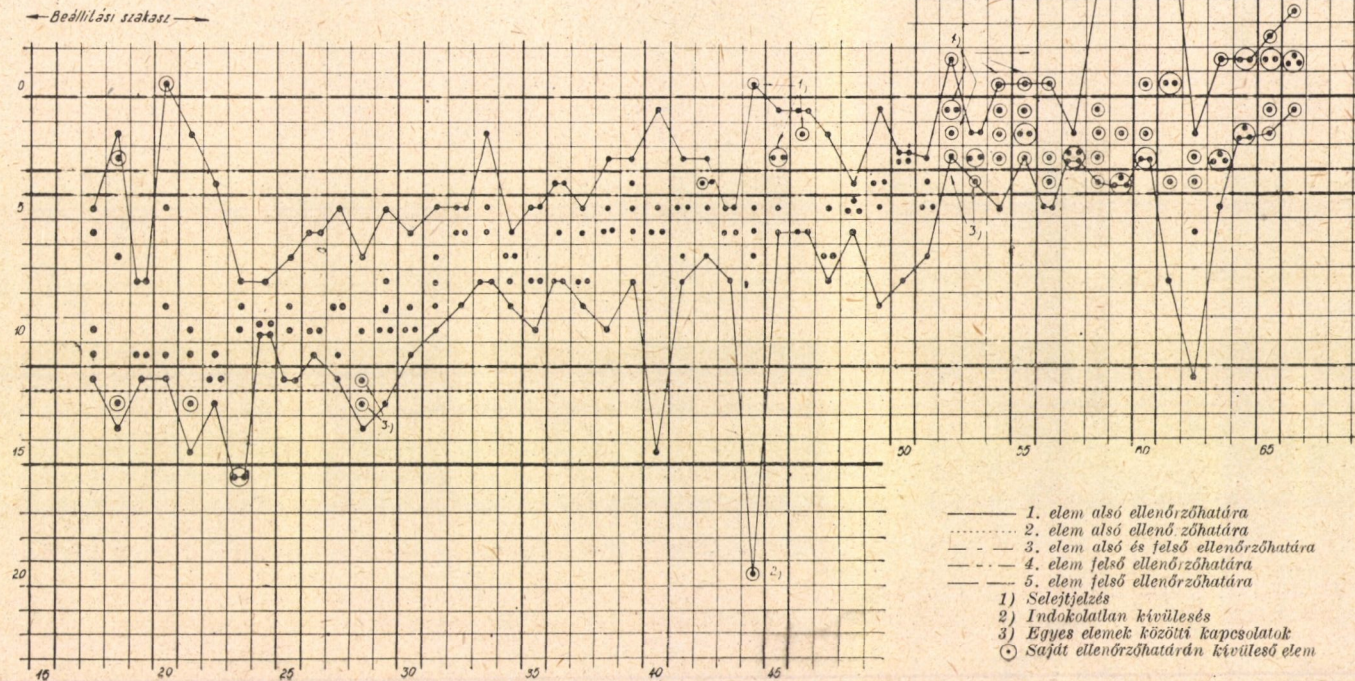
Gyártmány: Kormány alsókúp

Mért méret: Külső átmérő

Néveleges méret: 36,6 mm

Tűréshatárok $+0,00$
 $-0,16$ mm

1 óra alatt készül 45 db
Ellenőrizre minden darab



3. ábra

képezve, amekkora mintákkal a gyakorlatban ellenőrizni kívánunk, az egyes csoportokba tartozó értékeket a 4. ábra szerinti ellenőrzőkártya egy-egy függőleges oszlopának megfelelő kockájába jegyeztük be. Ezekután kiszámítottuk az ellenőrzőhatárokat — egy-egy csoportot egy-egy mintának tekintve — és berajzoltuk őket. Mivel mindenegyes darab méretének ismeretében biztosan meg tudtuk állapítani, meddig volt a gyártás selejtmentes, a kártya segítségével ellenőriztük, hogy ezen ellenőrzőhatárok mennyiben reagálnak helyesen a gyártási hibákra, ill. mikor jeleznek ok nélkül selejtet. A kísérleti adatok igen jól illeszkedtek a valószínűségszámítás alapján kidolgozott határokhöz, ami alátámasztja a módszer alkalmazhatóságát. Példaképpen közöljük egyik ilyen adatfelvételünk anyagát, amely az R.-M. Művek Kerékpárgyárában egyorsós forgácsoló automatán kormányalsókúp gyártásakor készült (3. ábra). A diagrammból látható, hogy milyen érzékenyen jelzik a mintaelemek már előre a selejt bekövetkezését (1), ugyanakkor szépen megfigyelhetők az ellenőrzőhatároknak a valószínűségi szint százaléka következtében indokolt átlépései (2) olyan esetekben, mikor a gyártás selejtmentes. Megmutatkozik az egymáshoz közeleső elemek viselkedése közötti szoros kapcsolat is (3).

Ilyen előkészítő munkálatok után kezdtük meg a nagyság szerint rendezett elemű minták alapján történő gyártásközi minőségellenőrzés gyakorlati bevezetését. Elsőízben a Rákosi Mátyás Művek Kerékpárgyárában egy négyorsós forgácsoló automatagépen kerékpár-fékkónusz gyártásánál alkalmazták ezen ellenőrzési módszert. Az ellenőrzés céljaira rendelkezésre bocsátottuk a 4. ábra szerinti ellenőrzőkártyát, amelyre már az induláskor berajzoltuk azt a négy ellenőrzőhatárt, amelyet figyeltetni akartunk. Az ellenőr által felvett adatok a kártyán láthatók. — Az ellenőrzés eredményességét úgy kívántuk kontrollálni, hogy az ellenőrzés első két napja alatt elkészült és az ellenőr által jónak minősített teljes gyártmánymennyiséget utólag darabonként lemértük. Ugyanakkor — összehasonlítás céljából — a statisztikai minőségellenőrzés bevezetése előtti időszakból származó raktárkészletből — mely több nap gyártmányát tartalmazta — szintén méréseket végeztünk. Méréseink azt mutatják, hogy az ellenőrzőkártyával ellenőrzött gyártmányok 847 darabjából 20 darab volt tűréshatáron kívül, tehát 2,36%. Ugyanakkor a raktárkészletből megmért — találmorra vett — 282 darabból 52 darab esett tűréshatáron kívül, tehát 18,44% volt selejt. Habár ezen ellenőrző mérések csak rövid időszakra vonatkoznak, mégis látható belőlük, hogy az itt ismertetett statisztikai ellenőrzési módszernek jelentős selejtesökkentő hatása van. A kontrollmérések alkalmával felvett méretek gyakorisági eloszlását az 5a., ill. 5b. ábra mutatja.

A gyakorlati alkalmazáskor mind az üzemi minőségellenőrzési szakemberek, mind maguk a minőségellenőrök igen szívesen fogadják ezt a módszert. Véleményük szerint sokkal előnyösebb, mint az eddig használt statisztikai ellenőrző eljárások. Legnagyobb gyakorlati előnye, hogy az ellenőrzés egyszerűbben és gyorsabban végezhető: hiszen nincsen szükség külön adatfelvételi lap vezetésére, sem pedig bármilyen számolási műveletre, hanem a vett minta elemeit lemérve, azokat a mérés sorrendjében azonnal fel lehet vezetni az ellenőrző diagramra, ahol »önmaguktól rendeződnek« nagyság szerint. Annak megállapítása, hogy a vett minta alapján a gyártás megfelelőnek, vagy pedig selejtesnek minősítendő-e, szintén igen egyszerű: hiszen csak azt kell figyelemmel kísérni, hogy a bejelölt ellenőrzőhatárokon kívül,

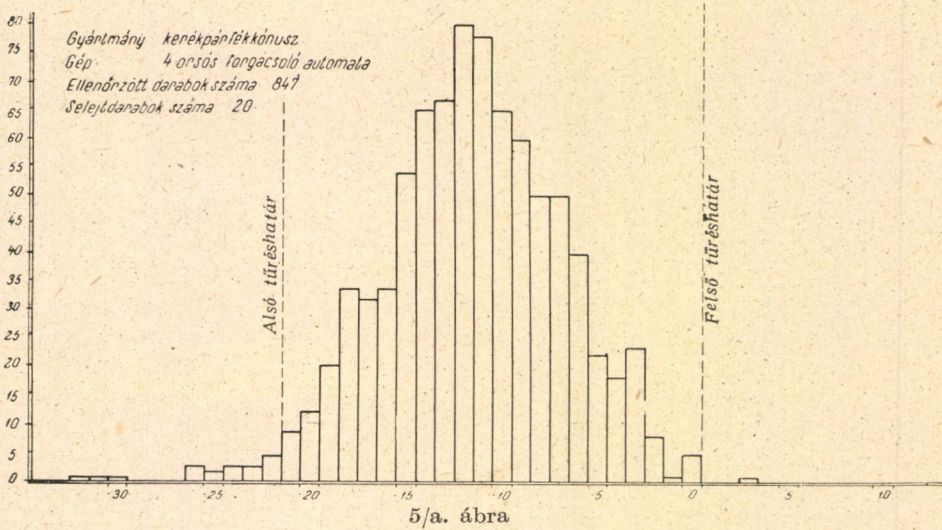
ELLENŐRZŐKÁRTYA										Méreletellenőrzésre / Bejegyzett értékek: a mintában mért értékek nagyság szerint /										Műhely: II.		Kiadás helye: 1953. VIII. 7.		Lapzám: I.	
Gyártmány: <i>Fekkonusz</i>		Rajzszám: <i>185.256</i>		Mérelet: <i>2</i>		Mért méret: <i>627,7</i>		Tűnéshatárak: felső: <i>0</i> alsó: <i>-21</i>		Anyag:		Fordulatszám: <i>350</i>		1 ^o alatt készült: <i>100db</i>		Gép neve: <i>4. oszt. automata</i>		Ip. nyilv. tant. sz. <i>1-1019-32</i>							
Ellenőrzési útasítás: az 1. /felső/ határon felül egy pont sem eshet; a 2. határon felül 3 pont eshet; a 3. határon alul 3 pont eshet; a 4. /alsó/ határon alul egy pont sem eshet; A két szélső pont között 12 kockánál több nem lehet.										Ellenőrzés időköze: <i>1 óra</i>		Mérőeszköz: <i>mikrométer</i>													

Beállító	Korlat	Korlat	Korlat	Korlat																										
Ellenőrző	Megjegyzés	Megjegyzés	Megjegyzés	Megjegyzés																										
Datum	VIII. 7.	VIII. 8.	VIII. 10.	VIII. 11.																										
Sorszám	1	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100									
Névtelen mérettől való eltérés 0,01 mm-ben	+5																													
	+4																													
	+3																													
	+2																													
	+1																													
	0																													
	-1																													
	-2																													
	-3																													
	-4																													
	-5																													
	-6																													
	-7																													
	-8																													
	-9																													
	-10																													
	-11																													
	-12																													
	-13																													
	-14																													
	-15																													
	-16																													
	-17																													
	-18																													
	-19																													
	-20																													
	-21																													
	-22																													
	-23																													
	-24																													
Egyéb előírások	1	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100									
R	8	7	8	7	10	12	7	10	11	10	9	9	11	7	9	9	10	9	12	11	8									
Minta vételi ideje	7:00	8:00	8:50	9:50	10:50	11:50	12:50	13:45	14:45	15:45	16:45	17:45	18:45	19:45	20:45	21:45	22:45	23:45	24:45	25:45	26:45									
Vált. jel																														
Jelmagyarázat	Cs Szerszámcseré					K Szerszámköszörülés					A Új anyag betárolása					Ah Anyaghiba					A' Al a gép					U Utan-állítás				
Megjegyzések																														

illetve két-két azonos oldali ellenőrzőhatár között nem helyezkedik-e el az engedélyezettnél nagyobb számú mintaelem.

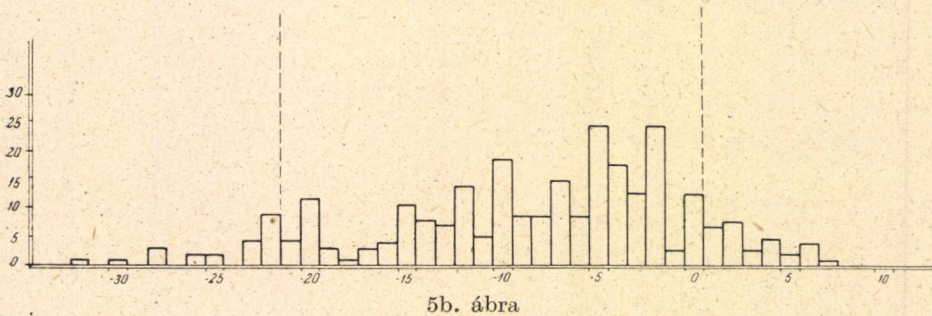
Az ellenőrző diagramm világosan jelzi, ha akár az eloszlás átlagában, akár szórásában rendellenesség lép fel anélkül, hogy ehhez két különböző

Statistikailag ellenőrzött gyártmányokon végzett ellenőrző mérések adatai



Statistikailag nem ellenőrzött, raklárkészlelekből vett gyártmányokon végzett ellenőrző mérések adatai

Gyártmány : Kerékpárfekkönysz.
Gép : 4 orsós forgácsoló automata
Ellenőrzött darabok száma : 282
Selejt darabok száma : 52



jellemző kiszámítására és vezetésére lenne szükség, mint ahogy az a többi, eddig ismert módszernél történik (pl. az átlag-és terjedelem-kártyán). Egy esetben nem jelzi módszerünk a szórás megnövekedését, amikor ugyanis a tűréshatárok egymástól való távolsága lényegesen nagyobb 6σ -nál és ezért engedélyezzük az átlag bizonyos sávon belüli eltolódását, vagyis az ellenőrző-

határokat széttoljuk. Ezt a hiányosságot oly módon tudjuk kiküszöbölni, hogy kiegészítésképpen figyelemmel kísérjük a terjedelem viselkedését is. Ennél a megoldásnál változatlanul megmarad módszerünk azon előnye, hogy nincs szükség a mintavétel során sem számolásra, sem pedig a terjedelem külön vezetésére, csupán azt kell megállapítani az ellenőrnek, hogy a két szélső elem távolsága (a közöttük lévő kockák száma) nem nagyobb-e az engedélyezettnél.

Mivel módszerünk gyakorlati alkalmazása csak a közelmúltban kezdődött meg, természetesen még nem áll elegendő tapasztalat rendelkezésünkre ahhoz, hogy véglegesen meg tudjuk állapítani valamennyi előnyét, illetve hátrányát. Jövőbeli feladatunk lesz, hogy egyrészt tovább szorgalmazzuk ezen módszer kiterjedtebb alkalmazását, másrészt a gyakorlat tapasztalatait leszűrve az esetleges szükséges módosításokat, finomításokat végrehajtsuk.

Függelék

1. A rendezett minta elemeinek korrelációja

Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy a folytonos eloszlásból vett rendezett minta bármely két eleme egymással pozitív korrelációban van.

Ehhez először bebizonyítjuk a következő segédteit:

Ha az eredeti eloszlást jobbról csonkítjuk, a k -adik rendezett mintaelem várható értéke csökken.

Legyen az eredeti eloszlás eloszlásfüggvénye $F(x)$, a csonkítási pont c . Legyen η , ill. ζ olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlása az eredeti eloszlás c -től balra eső, ill. jobbra eső csonkított eloszlása. Definiáljuk a λ valószínűségi változót a következőképpen:

$$\lambda = \begin{cases} \eta & F(c) \text{ valószínűséggel} \\ \zeta & 1 - F(c) \text{ valószínűséggel} \end{cases}$$

Így λ eloszlása nyilván megegyezik az eredeti eloszlással.

Végezzünk mind az η , mind a ζ változóra vonatkozóan külön-külön n darab független megfigyelést, s legyenek ezek eredményei $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, ill. $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$.

$$\text{Legyen } \lambda_i = \begin{cases} \eta_i & F(c) \text{ valószínűséggel} \\ \zeta_i & 1 - F(c) \text{ valószínűséggel} \end{cases} \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

Így $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ egymástól függetlenek, egyforma eloszlásúak, és pedig mindegyiknek az eloszlása az eredeti eloszlás.

Legyen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ között a nagyságrendben k -adik η_k^* ; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ között nagyságrendben a k -adik λ_k^* ($k = 1, 2, \dots, n$). Nyilvánvaló, hogy

$$\lambda_k^* \geq \eta_k^*$$

és hogy pozitív a valószínűsége annak, hogy

$$\lambda_k^* > \eta_k^*.$$

Így a várható értékekre áttérve

$$M(\lambda_k^*) > M(\eta_k^*)$$

és ezzel segédtevéletünket bebizonyítottuk.

Ha a segédtevélet olyan eloszlásra alkalmazzuk, amely maga is csonkítása egy másik eloszlásnak, akkor a segédtevélet a következő fogalmazásban kapjuk:

A csonkított eloszlás k -adik elemének várható értéke a csonkítási határpont szigorú monoton növekvő függvénye. (A triviális kivételtől eltekintve, mikor a csonkítási határpont olyan szakaszon változik, ahol az eloszlásfüggvény állandó.)

Most rátérünk eredeti állításunk bizonyítására.

A következőkben $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ jelentsék egy folytonos eloszlásból vett minta elemeit és legyen ismét ezek közül a nagyságrendben k -adik ξ_k^* ($k = 1, 2, \dots, n$).

Vizsgáljuk ξ_j^* eloszlását azzal a feltétellel, hogy $\xi_k^* = x$ ($1 \leq j < k \leq n$). A feltétel azt jelenti, hogy az eredeti minta többi elemeiből $n - k$ darab $> x$ és $k - 1$ darab $< x$ (0 valószínűségű kivételtől eltekintve). Az olyan mintaelemeknek, amelyeknek értéke $< x$, eloszlása az x ponttól balra eső csonkítása az eredeti eloszlásnak; a ξ_j^* tehát — a feltétel fennállása esetén — egy ebből a csonkított eloszlásból vett $k - 1$ elemű minta j -edik eleme. Segédtevéletünk értelmében tehát

$$M(\xi_j^* | \xi_k^* = x)$$

x -nek szigorúan monoton növekvő függvénye. Ebből pedig már következik, hogy ξ_j^* és ξ_k^* egymással pozitív korrelációban állanak.

2. A rendezett minta elemei együttes valószínűség-eloszlásának kiszámítása

A következőkben azzal foglalkozunk, hogy ha egyszerre több rendezett mintaelemet figyelünk, hogyan számíthatjuk ki annak a valószínűségét, hogy egyik sem lépi át ellenőrző határát.

A következő jelöléseket fogjuk használni:

A fenti meghatározandó valószínűséget jelöljük P -vel,

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ jelentsék a minta elemeit,

$\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*$ jelentsék ugyanezeket a mintaelemeket nagyság szerint rendezve. Legyen továbbá

$$\text{és} \quad \left. \begin{aligned} F(\xi_k) &= \eta_k \\ F(\xi_k^*) &= \eta_k^* \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Jelöljük továbbá a k -adik elem alsó ellenőrzőhatárát (ha van ilyen) a_k -val, felső ellenőrzőhatárát (ismét, ha van) b_k -val és legyen $F(a_k) = A_k$, $F(b_k) = B_k$. Ez utóbbi értékek az általános esetben csak k bizonyos értékeire vannak definiálva a szerint, hogy a rendezett minta mely elemeire állapítunk meg ellenőrzőhatárokat. Természetesen feltehetjük, hogy az a_k , ill. b_k értékek indexeik monoton növekvő függvényei.

A rendezett minta elemei közül tetszőleges számú változó együttes eloszlása explicit alakban meghatározható [5]. Számításaink egyszerűsítése céljából azonban mégis célszerűbb lesz az általános esetet visszavezetni arra az esetre, mikor valamennyi elemet figyeljük. Ezt könnyen megtehetjük úgy, hogy A_k , ill. B_k értelmezését definíciószerűen kiterjesztjük úgy, hogy azok értéke a következő legyen mindazokra az indexekre, amelyekre a_k , ill. b_k nincs értelmezve:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ B_n &= 1 \\ A_k &= A_{k-1} \quad (k = 2, \dots, n) \\ B_k &= B_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

A fenti definíció esetén mindenestre fennáll, hogy

$$\begin{aligned} A_1 &\leq A_2 \leq \dots \leq A_n \\ B_1 &\leq B_2 \leq \dots \leq B_n. \end{aligned}$$

továbbá az az esemény, hogy a megfigyelt elemek valamennyien ellenőrzőhatáraikon belül maradnak, megegyezik azzal az eseménnyel, hogy az

$$A_i \leq \eta_i^* \leq F_i$$

egyenlőtlenségek az $i = 1, 2, \dots, n$ értékekre egyidejűleg fennállnak. Így tehát írhatjuk:

$$P = \mathbf{P} (A_1 \leq \eta_1^* \leq B_1, A_2 \leq \eta_2^* \leq B_2, \dots, A_n \leq \eta_n^* \leq B_n).$$

amit a következőkben így fogunk írni röviden:

$$P = \mathbf{P} \left(\prod_{i=1}^n [A_i \leq \eta_i^* \leq B_i] \right).$$

A $\prod$ jel azt jelenti, hogy az utána zárójelben álló esemény a futóindex minden értékére egyidejűleg fennáll. P kiszámításához előbb ismernünk kell $\eta_1^*, \eta_2^*, \dots, \eta_n^*$ együttes sűrűségfüggvényét.

Annak a valószínűsége, hogy

$$x_i < \eta_i^* < x_i + dx_i$$

egyidejűleg az $i = 1, 2, \dots, n$ értékekre, ha $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, nyilván éppen $n!$ -szor akkora, mint hogy az eredeti minta elemei egy bizonyos sorrendben, pl. indexeik szerint rendezett sorrendben a megfelelő x_i környezetébe essenek. Ha az x_i -k között egyenlők fordulnak elő, akkor ez nem igaz, de mivel a minta elemei között csak 0 valószínűséggel fordulhatnak elő egyenlők, ezzel nem kell törődnünk. Így az $\eta_1^*, \eta_2^*, \dots, \eta_n^*$ változók együttes sűrűségfüggvénye $n!$ az n dimenziós mintatér azon pontjaiban, amelyek koordinátái monoton növekvő sorozatot alkotnak és mindenütt máshol 0.

Tehát

$$P = \int n! dx_1 dx_2, \dots dx_n,$$

ahol az integrálást a következő egyenlőtlenségek által meghatározott térrészre kell kiterjeszteni:

$$A_i \leq x_i \leq B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

azaz tulajdonképpen ki kell számítani az egyenlőtlenségek által jellemzett n dimenziós poliéder köbtartalmát és azt megszorozni $n!$ -sal.

Ha ezt a köbtartalmat ki akarjuk számítani, akkor lényegében ugyanazt az utat kell követni, amint az alábbi levezetésben látható, amelyben visszatérünk a valószínűségszámítási terminológiára.

A fentebbi megjegyzéseink alapján nyilván írható

$$P = n! \mathbf{P} \left(\prod_{i=1}^n [A_i \leq \eta_i \leq B_i], \eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_n \right),$$

Fenti kifejezést tovább alakítva

$$P = n! \mathbf{P} \left(\prod_{i=1}^n [A_i \leq \eta_i \leq B_i] \right) - n! \mathbf{P} \left(\prod_{i=1}^n [A_i \leq \eta_i \leq B_i], \sum_{i=1}^{n-1} [\eta_i > \eta_{i+1}] \right),$$

ahol a Σ jel azt jelenti, hogy az utána álló esemény a futóindex legalább egy értékére fennáll. Poincaré tételét alkalmazva

$$P = n! \mathbf{P} \left(\prod_{i=1}^n [A_i \leq \eta_i \leq B_i] \right) - \\ - n! \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_l \leq n-1} \mathbf{P} \left(\prod_{j=1}^n [A_j \leq \eta_j \leq B_j], \prod_{j=1}^l [\eta_{r_j} > \eta_{r_j+1}] \right),$$

vagy az első tagot is beolvasztva

$$P = n! \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_l \leq n-1} \mathbf{P} \left(\prod_{j=1}^n [A_j \leq \eta_j \leq B_j], \prod_{j=1}^l [\eta_{r_j+1} < \eta_{r_j}] \right).$$

Legyen az $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_k$ sorozat az $r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_l + 1$ sorozat komplementerje az első n természetes szám halmazában ($k = n - l$). Ha szummációs indexsorozatul az r -sorozatok helyett az i -sorozatokat írjuk:

$$P = n! \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \sum_{1=i_1 < i_2 < \dots < i_k < i_{k+1}=n+1} \mathbf{P} \left(\prod_{j=1}^n [A_j \leq \eta_j \leq B_j], \prod_{j=1}^k [\eta_{i_{j+1}-1} < \dots < \eta_{i_{j+1}} < \eta_{i_j}] \right).$$

Itt az állítások szorzatában egymagában szereplő η_i jelek természetesen figyelmen kívül hagyandók (semmitmondó állítás bizonyosan teljesül).

Tekintve, hogy az A_i és a B_i számok a feltételezés szerint monoton növekvők, az

$$A_{i_j+s} \leq \eta_{i_j+s} \leq B_{i_j+s}$$

$$\eta_{i_{j+1}-1} < \eta_{i_j+s} < \eta_{i_j}$$

$$(s = 0, 1, \dots, i_{j+1} - i_j - 1),$$

egyenlőtlenségrendszerben a felső egyenlőtlenségek helyett az

$$A_{i_{j+1}-1} \leq \eta_{i_j+s} \leq B_{i_j}$$

egyenlőtlenségeket írva, ekvivalens egyenlőtlenségrendszerhez jutunk. Ha még tekintetbe vesszük, hogy $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ egymástól függetlenek, írhatjuk:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\prod_{j=1}^n [A_j < \eta_j < B_j], \prod_{j=1}^k [\eta_{i_{j+1}-1} < \dots < \eta_{i_{j+1}} < \eta_{i_j}] \right) = \\ & = \mathbf{P} \left(\prod_{j=1}^k \left\{ \prod_{s=0}^{i_{j+1}-i_j-1} [A_{i_{j+1}-1} < \eta_{i_j+s} < B_{i_j}], \eta_{i_{j+1}-1} < \dots < \right. \right. \\ & \quad \left. \left. < \eta_{i_{j+1}} < \eta_{i_j} \right\} \right) = \\ & = \prod_{j=1}^k \mathbf{P} \left(\prod_{s=0}^{i_{j+1}-i_j-1} [A_{i_{j+1}-1} < \eta_{i_j+s} < B_{i_j}], \eta_{i_{j+1}-1} < \dots < \eta_{i_{j+1}} < \eta_{i_j} \right). \end{aligned}$$

A zárójelben álló események ismét függetlenek egymástól és

$$\mathbf{P}(A_{i_{j+1}-1} < \eta_{i_j+s} < B_{i_j}) = \max(B_{i_j} - A_{i_{j+1}-1}, 0)$$

$$\mathbf{P}(\eta_{i_{j+1}-1} < \dots < \eta_{i_{j+1}} < \eta_{i_j}) = \frac{1}{(i_{j+1} - i_j)!},$$

tehát:

(2)

$$P = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} n! \sum_{1=i_1 < i_2 < \dots < i_k < i_{k+1}=n+1} \prod_{j=1}^k \frac{[\max(B_{i_j} - A_{i_{j+1}-1}, 0)]^{i_{j+1}-i_j}}{(i_{j+1} - i_j)!}.$$

A fenti képlet alapján tehát az együttes valószínűséget ki lehet számítani. A gyakorlatilag fontos esetekben, mikor csak néhány ellenőrzőhatárt figyelünk, a (2) speciális alakja sokkal egyszerűbbé válik.

A legtöbb esetben azonban elegendő pontos értéket kapunk akkor is, ha P értékét közelítéssel számítjuk ki úgy, mint ha a rendezett mintaelemek egymástól függetlenek volnának. Ismeretes, hogy a rendezett minta elemei általában nem függetlenek. Ismeretes azonban, hogy fennáll egy olyan tétel, hogy a k -adik és az $(n + 1 - j)$ -edik mintaelem — ha $n \rightarrow \infty$, ugyanakkor pedig k és j rögzítve vannak — határértékben függetlenek [5]. Ennek alapján várhatjuk azt, hogy mennél nagyobb mintával dolgozunk, és egymástól mennél távolabbeső elemeket figyelünk, annál kisebb hibát követünk el azzal, hogy a számításnál feltételezzük a függetlenséget. A számítás pontosságára egyébként nemcsak az bír befolyással, hogy milyen kismértékű függőség áll fenn az egyes rendezett mintaelemek között, hanem az is, hogy olyan valószínűségi határokkal dolgozunk, amelyek közé az egyes mintaelemek 1-hez közeli valószínűséggel esnek, továbbá az a gyakorlati használatra általában javasolt esetekben fennálló körülmény, hogy nem szerepelnek »egymás felé eső« határok, tehát nem fordul elő, hogy $k < j$ esetén a k -adik elem felső és egyidejűleg a j -edik elem alsó ellenőrzőhatárát figyeljük.

Itt általánosságban csak azt az esetet vizsgáljuk, hogy amennyiben a legkisebb elem alsó és a legnagyobb elem felső ellenőrzőhatárát figyeljük, milyen értéket érhet el legfeljebb a kétféle módszerrel kiszámított érték között a különbség.

Ebben az egyszerű esetben — a feljebb alkalmazott jelöléseket használva — a pontosan számított érték

$$P = (B_n - A_1)^n,$$

míg a közelítéssel

$$P^* = B_n^n (1 - A_1)^n$$

értéket nyerünk. Innen

$$\frac{P - P^*}{P^*} = \left[1 - \frac{A_1(1 - B_n)}{B_n(1 - A_1)} \right]^n - 1,$$

azaz

$$\left| \frac{P - P^*}{P^*} \right| < \frac{n A_1 (1 - B_n)}{B_n (1 - A_1)}.$$

Látható tehát, hogy a relatív eltérés P és P^* között annál kisebb felső határ alatt marad, mennél kisebb A_1 és $1 - B_n$. Azonban esetünkben A_1 és $1 - B_n$ olyan kicsi, hogy még $(1 - A_1)^n$ és B_n^n is 1-hez közeleső szám: minden esetben nagyobbak, mint 0,9, tehát $\frac{A_1}{1 - A_1}$ és $\frac{1 - B_n}{B_n}$ is kisebbek, mint $\frac{1}{9n}$ és így a relatív eltérés bizonyosan kisebb, mint $\frac{1}{81n}$, ami azt jelenti, hogy még

eléggé szűk ellenőrző határok esetén is a közelítő számítás hibája n semilyen értéke mellett sem bír gyakorlati jelentőséggel.

Arra az esetre, mikor kettőnél több elem ellenőrző határait figyeljük, numerikus számításokat végeztünk. Kiszámítottuk P értékeit különböző egyenkénti valószínűségi szintekre arra az esetre, ha egy ötelemű minta első és harmadik elemének alsó, és harmadik és ötödik elemének felső határait figyeljük. A számításokat a gyakorlat által megkövetelt pontossággal végeztük el; a két módszerrel számított érték közötti különbség egy esetben sem haladta meg a számítási hiba határát.

I. táblázat

TÁBLÁZAT A RENDEZETT ELEMŰ MINTÁK ELLENŐRZÖHATÁRAINAK KISZÁMÍTÁSÁHOZ

- (1.) Egyenletes eloszlásra: x_1 és x_2 értékei; tetszőleges eloszlásra: $F(x_1)$ és $F(x_2)$ értékei.
 (2.) Normális eloszlásra x_1 és x_2 értékei, vagyis azon kontrolltényezők, melyek a tényleges szórással megszorozva az ellenőrzőhatároknak az átlagtól való távolságát adják.
 (3.) Normális eloszlásra azon kontrolltényezők, melyek az $\bar{R}$ -val megszorozva adják az ellenőrzőhatárok távolságát az átlagtól.

95%								99%							
Alsó határ ($F_{nk}(x_1) = 0,025$)				Felső határ ($F_{nk}(x_2) = 0,975$)				Alsó határ ($F_{nk}(x_1) = 0,005$)				Felső határ ($F_{nk}(x_2) = 0,995$)			
k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)
$n = 4$								$n = 4$							
1	0,006	-2,49	-1,21	1	0,602	+0,26	+0,13	1	0,001	-3,02	-1,47	1	0,734	+0,63	+0,31
2	0,068	-1,49	-0,72	2	0,806	+0,86	+0,42	2	0,030	-1,88	-0,91	2	0,889	+1,22	+0,60
3	0,194	-0,86	-0,42	3	0,932	+1,49	+0,72	3	0,111	-1,22	-0,59	3	0,970	+1,88	+0,91
4	0,398	-0,26	-0,13	4	0,994	+2,49	+1,21	4	0,266	-0,63	-0,31	4	0,999	+3,02	+1,47
$n = 5$								$n = 5$							
1	0,005	-2,57	-1,11	1	0,522	+0,05	+0,02	1	0,001	-3,09	-1,33	1	0,653	+0,39	+0,17
2	0,052	-1,63	-0,70	2	0,717	+0,57	+0,25	2	0,025	-1,96	-0,84	2	0,815	+0,90	+0,39
3	0,146	-1,05	-0,45	3	0,854	+1,05	+0,45	3	0,083	-1,39	-0,60	3	0,917	+1,39	+0,60
4	0,283	-0,57	-0,25	4	0,948	+1,63	+0,70	4	0,185	-0,90	-0,39	4	0,975	+1,96	+0,84
5	0,478	-0,05	-0,02	5	0,995	+2,57	+1,11	5	0,347	-0,39	-0,17	5	0,999	+3,09	+1,33
$n = 6$								$n = 6$							
1	0,004	-2,63	-1,04	1	0,459	-0,10	-0,04	1	0,001	-3,14	-1,24	1	0,586	+0,22	+0,09
2	0,043	-1,72	-0,68	2	0,641	+0,36	+0,14	2	0,019	-2,08	-0,82	2	0,745	+0,66	+0,26
3	0,118	-1,19	-0,47	3	0,777	+0,76	+0,30	3	0,066	-1,51	-0,60	3	0,855	+1,06	+0,42
4	0,223	-0,76	-0,30	4	0,882	+1,19	+0,47	4	0,145	-1,06	-0,42	4	0,934	+1,51	+0,60
5	0,359	-0,36	-0,14	5	0,957	+1,72	+0,68	5	0,255	-0,66	-0,26	5	0,981	+2,08	+0,82
6	0,541	+0,10	+0,04	6	0,996	+2,63	+1,04	6	0,414	-0,22	-0,09	6	0,999	+3,14	+1,24
$n = 7$								$n = 7$							
1	0,004	-2,69	-1,00	1	0,410	-0,23	-0,09	1	0,001	-3,19	-1,18	1	0,531	+0,08	+0,03
2	0,037	-1,79	-0,66	2	0,581	+0,20	+0,07	2	0,016	-2,14	-0,79	2	0,689	+0,48	+0,18

3	0,099	—1,29	—0,48	3	0,710	+0,55	+0,20	3	0,055	—1,60	—0,59	3	0,979	+0,83	+0,31
4	0,184	—0,90	—0,33	4	0,816	+0,90	+0,33	4	0,118	—1,19	—0,44	4	0,882	+1,19	+0,44
5	0,290	—0,55	—0,20	5	0,901	+1,29	+0,48	5	0,203	—0,83	—0,31	5	0,945	+1,60	+0,59
6	0,419	—0,20	—0,07	6	0,963	+1,79	+0,66	6	0,315	—0,48	—0,18	6	0,984	+2,14	+0,79
7	0,590	+0,23	+0,09	7	0,996	+2,69	+1,00	7	0,469	—0,08	—0,03	7	0,999	+3,49	+1,18

$n = 8$							
1	0,003	—2,73	—0,96	1	0,369	—0,33	—0,12
2	0,032	—1,85	—0,65	2	0,527	+0,07	+0,02
3	0,085	—1,37	—0,48	3	0,651	+0,39	+0,14
4	0,154	—1,02	—0,36	4	0,755	+0,69	+0,24
5	0,254	—0,69	—0,24	5	0,846	+1,02	+0,36
6	0,349	—0,39	—0,14	6	0,915	+1,37	+0,48
7	0,473	—0,07	—0,02	7	0,968	+1,85	+0,65
8	0,631	+0,33	+0,12	8	0,997	+2,73	+0,96

$n = 9$							
1	0,003	—2,77	—0,93	1	0,336	—0,42	—0,14
2	0,028	—1,91	—0,64	2	0,483	—0,04	—0,01
3	0,075	—1,44	—0,49	3	0,600	+0,25	+0,08
4	0,133	—1,11	—0,37	4	0,701	+0,52	+0,18
5	0,212	—0,80	—0,27	5	0,788	+0,80	+0,27
6	0,299	—0,52	—0,18	6	0,867	+1,11	+0,37
7	0,400	—0,25	—0,08	7	0,925	+1,44	+0,49
8	0,517	+0,04	+0,01	8	0,972	+1,91	+0,64
9	0,664	+0,42	+0,14	9	0,997	+2,77	+0,93

$n = 10$							
1	0,003	—2,80	—0,91	1	0,308	—0,50	—0,16
2	0,025	—1,96	—0,64	2	0,445	—0,14	—0,05
3	0,066	—1,51	—0,49	3	0,556	+0,14	+0,05
4	0,121	—1,17	—0,38	4	0,652	+0,39	+0,13
5	0,187	—0,89	—0,29	5	0,738	+0,64	+0,21
6	0,262	—0,64	—0,21	6	0,813	+0,89	+0,29
7	0,348	—0,39	—0,13	7	0,879	+1,17	+0,38
8	0,444	—0,14	—0,05	8	0,934	+1,51	+0,49
9	0,555	+0,14	+0,05	9	0,975	+1,96	+0,64
10	0,692	+0,50	+0,16	10	0,997	+2,80	+0,91

$n = 8$							
1	0,001	—3,23	—1,14	1	0,484	—0,04	—0,01
2	0,014	—1,89	—0,66	2	0,632	+0,34	+0,12
3	0,047	—1,68	—0,59	3	0,742	+0,65	+0,23
4	0,100	—1,28	—0,45	4	0,830	+0,95	+0,34
5	0,170	—0,95	—0,34	5	0,900	+1,28	+0,45
6	0,258	—0,65	—0,23	6	0,953	+1,68	+0,59
7	0,368	—0,34	—0,12	7	0,986	+1,89	+0,66
8	0,516	+0,04	+0,01	8	0,999	+3,23	+1,14

$n = 9$							
1	0,002	—3,26	—1,10	1	0,445	—0,14	—0,05
2	0,012	—2,27	—0,76	2	0,585	+0,21	+0,07
3	0,041	—1,74	—0,59	3	0,693	+0,50	+0,17
4	0,096	—1,37	—0,46	4	0,781	+0,78	+0,26
5	0,146	—1,05	—0,35	5	0,854	+1,05	+0,35
6	0,219	—0,78	—0,26	6	0,914	+1,37	+0,46
7	0,307	—0,50	—0,17	7	0,959	+1,74	+0,59
8	0,415	—0,21	—0,07	8	0,988	+2,27	+0,76
9	0,555	+0,14	+0,05	9	0,998	+3,26	+1,10

$n = 10$							
1	0,001	—3,29	—1,07	1	0,411	—0,23	—0,07
2	0,011	—2,30	—0,75	2	0,544	+0,11	+0,04
3	0,036	—1,80	—0,58	3	0,648	+0,38	+0,12
4	0,076	—1,43	—0,46	4	0,735	+0,63	+0,20
5	0,128	—1,14	—0,37	5	0,809	+0,87	+0,28
6	0,191	—0,87	—0,28	6	0,872	+1,14	+0,37
7	0,265	—0,63	—0,20	7	0,924	+1,43	+0,46
8	0,352	—0,38	—0,12	8	0,964	+1,80	+0,58
9	0,456	—0,11	—0,04	9	0,989	+2,30	+0,75
10	0,589	+0,23	+0,07	10	0,999	+3,29	+1,07

95%								99%							
Alsó határ ($F_{nk}(x_1) = 0,025$)				Felső határ ($F_{nk}(x_2) = 0,975$)				Alsó határ ($F_{nk}(x_1) = 0,005$)				Felső határ ($F_{nk}(x_2) = 0,995$)			
k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)
$n = 11$								$n = 11$							
1	0,002	-2,83	-0,89	1	0,285	-0,57	-0,18	1	0,000	-3,32	-1,05	1	0,382	-0,30	-0,09
2	0,023	-2,00	-0,63	2	0,413	-0,22	-0,07	2	0,001	-2,34	-0,74	2	0,509	+0,02	+0,01
3	0,060	-1,55	-0,49	3	0,518	+0,05	+0,02	3	0,033	-1,84	-0,58	3	0,609	+0,28	+0,09
4	0,109	-1,23	-0,39	4	0,610	+0,28	+0,09	4	0,069	-1,48	-0,47	4	0,693	+0,50	+0,16
5	0,167	-0,97	-0,31	5	0,692	+0,50	+0,16	5	0,114	-1,21	-0,38	5	0,767	+0,73	+0,23
6	0,234	-0,73	-0,23	6	0,766	+0,73	+0,23	6	0,169	-0,98	-0,31	6	0,831	+0,98	+0,31
7	0,308	-0,50	-0,16	7	0,833	+0,97	+0,31	7	0,223	-0,73	-0,23	7	0,886	+1,21	+0,38
8	0,390	-0,28	-0,09	8	0,891	+1,23	+0,39	8	0,307	-0,50	-0,16	8	0,931	+1,48	+0,47
9	0,482	-0,05	-0,02	9	0,940	+1,55	+0,49	9	0,391	-0,28	-0,09	9	0,967	+1,84	+0,58
10	0,587	+0,22	+0,07	10	0,977	+2,00	+0,63	10	0,491	-0,02	-0,01	10	0,990	+2,34	+0,74
11	0,715	+0,57	+0,18	11	0,998	+2,83	+0,89	11	0,618	+0,30	+0,09	11	1,000	+3,32	+1,05
$n = 12$								$n = 12$							
1	0,002	-2,86	-0,88	1	0,263	-0,63	-0,19	1	0,000	-3,34	-1,03	1	0,357	-0,37	-0,11
2	0,021	-2,04	-0,63	2	0,385	-0,29	-0,09	2	0,008	-2,40	-0,74	2	0,477	-0,06	-0,02
3	0,054	-1,61	-0,49	3	0,484	-0,04	-0,01	3	0,030	-1,88	-0,58	3	0,573	+0,18	+0,06
4	0,099	-1,28	-0,39	4	0,572	+0,18	+0,06	4	0,062	-1,54	-0,47	4	0,655	+0,40	+0,12
5	0,152	-1,03	-0,32	5	0,651	+0,39	+0,12	5	0,103	-1,26	-0,39	5	0,728	+0,61	+0,19
6	0,211	-0,80	-0,25	6	0,724	+0,60	+0,18	6	0,152	-1,03	-0,32	6	0,792	+0,81	+0,25
7	0,276	-0,60	-0,18	7	0,789	+0,80	+0,25	7	0,208	-0,81	-0,25	7	0,848	+1,03	+0,32
8	0,349	-0,39	-0,12	8	0,848	+1,03	+0,32	8	0,272	-0,61	-0,19	8	0,897	+1,26	+0,39
9	0,428	-0,18	-0,06	9	0,901	+1,28	+0,39	9	0,345	-0,40	-0,12	9	0,938	+1,54	+0,47
10	0,516	+0,04	+0,01	10	0,946	+1,61	+0,49	10	0,427	-0,18	-0,06	10	0,970	+1,88	+0,58
11	0,615	+0,29	+0,09	11	0,979	+2,04	+0,63	11	0,523	+0,06	+0,02	11	0,992	+2,40	+0,74
12	0,737	+0,63	+0,19	12	0,998	+2,86	+0,88	12	0,643	+0,37	+0,11	12	1,000	+3,34	+1,03
$n = 13$								$n = 13$							
1	0,002	-2,89	-0,87	1	0,247	-0,68	-0,20	1	0,000	-3,36	-1,01	1	0,335	-0,43	-0,13
2	0,019	-2,08	-0,62	2	0,360	-0,36	-0,11	2	0,007	-2,46	-0,74	2	0,449	-0,13	-0,04

3	0,050	-1,65	-0,49	3	0,455	-0,11	-0,03	3	0,027	-1,93	-0,58	3	0,541	+0,10	+0,03
4	0,091	-1,33	-0,40	4	0,538	+0,09	+0,03	4	0,057	-1,58	-0,47	4	0,621	+0,31	+0,09
5	0,138	-1,09	-0,33	5	0,614	+0,29	+0,09	5	0,094	-1,32	-0,40	5	0,691	+0,50	+0,15
6	0,192	-0,87	-0,26	6	0,684	+0,48	+0,14	6	0,138	-1,09	-0,33	6	0,755	+0,69	+0,21
7	0,251	-0,67	-0,20	7	0,749	+0,67	+0,20	7	0,189	-0,88	-0,26	7	0,811	+0,88	+0,26
8	0,316	-0,48	-0,14	8	0,808	+0,87	+0,26	8	0,245	-0,69	-0,21	8	0,862	+1,09	+0,33
9	0,386	-0,29	-0,09	9	0,862	+1,09	+0,33	9	0,309	-0,50	-0,15	9	0,906	+1,32	+0,40
10	0,462	-0,09	-0,03	10	0,909	+1,33	+0,40	10	0,379	-0,31	-0,09	10	0,943	+1,58	+0,47
11	0,545	+0,11	+0,03	11	0,950	+1,65	+0,49	11	0,459	-0,10	-0,03	11	0,973	+1,93	+0,58
12	0,640	+0,36	+0,11	12	0,981	+2,08	+0,62	12	0,551	+0,13	+0,04	12	0,993	+2,46	+0,74
13	0,753	+0,68	+0,20	13	0,998	+2,89	+0,87	13	0,665	+0,43	+0,13	13	1,000	+3,36	+1,01

$n = 14$

1	0,002	-2,91	-0,85	1	0,232	-0,73	-0,21
2	0,007	-2,12	-0,62	2	0,339	-0,42	-0,12
3	0,046	-1,69	-0,50	3	0,428	-0,18	-0,05
4	0,084	-1,38	-0,41	4	0,508	+0,02	+0,01
5	0,127	-1,14	-0,33	5	0,581	+0,20	+0,06
6	0,176	-0,93	-0,27	6	0,649	+0,38	+0,11
7	0,230	-0,74	-0,22	7	0,711	+0,56	+0,16
8	0,289	-0,56	-0,16	8	0,770	+0,74	+0,22
9	0,351	-0,38	-0,11	9	0,824	+0,93	+0,27
10	0,419	-0,20	-0,06	10	0,873	+1,14	+0,33
11	0,492	-0,02	-0,01	11	0,916	+1,38	+0,41
12	0,572	+0,18	+0,05	12	0,954	+1,69	+0,50
13	0,661	+0,42	+0,12	13	0,983	+2,12	+0,62
14	0,768	+0,73	+0,21	14	0,998	+2,91	+0,85

$n = 15$

1	0,002	-2,93	-0,84	1	0,218	-0,78	-0,22
2	0,016	-2,14	-0,61	2	0,320	-0,47	-0,14
3	0,043	-1,72	-0,50	3	0,405	-0,24	-0,07
4	0,078	-1,42	-0,41	4	0,481	-0,05	-0,01
5	0,118	-1,18	-0,34	5	0,551	+0,13	+0,04
6	0,163	-0,98	-0,28	6	0,616	+0,29	+0,08
7	0,212	-0,80	-0,23	7	0,677	+0,46	+0,13
8	0,266	-0,62	-0,18	8	0,734	+0,62	+0,18
9	0,323	-0,46	-0,13	9	0,788	+0,80	+0,23
10	0,384	-0,29	-0,08	10	0,837	+0,98	+0,28

$n = 14$

1	0,000	-3,38	-0,99	1	0,315	-0,48	-0,14
2	0,006	-2,51	-0,74	2	0,424	-0,19	-0,06
3	0,025	-1,96	-0,58	3	0,512	+0,03	+0,01
4	0,052	-1,63	-0,48	4	0,589	+0,22	+0,06
5	0,086	-1,37	-0,40	5	0,658	+0,41	+0,12
6	0,126	-1,15	-0,34	6	0,720	+0,58	+0,17
7	0,172	-0,95	-0,28	7	0,777	+0,76	+0,22
8	0,223	-0,76	-0,22	8	0,828	+0,95	+0,28
9	0,280	-0,58	-0,17	9	0,874	+1,15	+0,34
10	0,342	-0,41	-0,12	10	0,914	+1,37	+0,40
11	0,411	-0,22	-0,06	11	0,948	+1,63	+0,48
12	0,488	-0,03	-0,01	12	0,975	+1,96	+0,58
13	0,576	+0,19	+0,06	13	0,994	+2,51	+0,74
14	0,685	+0,48	+0,14	14	1,000	+3,38	+0,99

$n = 15$

1	0,000	-3,41	-0,98	1	0,298	-0,53	-0,15
2	0,005	-2,56	-0,74	2	0,402	-0,25	-0,07
3	0,023	-2,00	-0,58	3	0,487	-0,03	-0,01
4	0,025	-1,66	-0,48	4	0,561	+0,15	+0,04
5	0,080	-1,41	-0,41	5	0,628	+0,33	+0,10
6	0,117	-1,19	-0,34	6	0,688	+0,49	+0,14
7	0,159	-1,00	-0,29	7	0,744	+0,66	+0,19
8	0,205	-0,82	-0,24	8	0,795	+0,82	+0,24
9	0,256	-0,66	-0,19	9	0,841	+1,00	+0,29
10	0,312	-0,49	-0,14	10	0,883	+1,19	+0,34

95%								99%							
Alsó határ ($F_{nk}(x_1) = 0,025$)				Felső határ ($F_{nk}(x_2) = 0,975$)				Alsó határ ($F_{nk}(x_1) = 0,005$)				Felső határ ($F_{nk}(x_2) = 0,995$)			
k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)
$n = 15$								$n = 15$							
11	0,449	-0,13	-0,04	11	0,882	+1,18	+0,34	11	0,372	-0,33	-0,10	11	0,920	+1,41	+0,41
12	0,519	+0,05	+0,01	12	0,922	+1,42	+0,41	12	0,439	-0,15	-0,04	12	0,952	+1,66	+0,48
13	0,595	+0,24	+0,07	13	0,957	+1,72	+0,50	13	0,513	+0,03	+0,01	13	0,977	+2,00	+0,58
14	0,680	+0,47	+0,14	14	0,984	+2,14	+0,61	14	0,598	+0,25	+0,07	14	0,995	+2,56	+0,74
15	0,782	+0,78	+0,22	15	0,998	+2,93	+0,84	15	0,702	+0,53	+0,15	15	1,000	+3,41	+0,98
$n = 17$								$n = 17$							
1	0,002	-2,97	-0,83	1	0,195	-0,86	-0,24	1	0,000	-3,44	-0,96	1	0,268	-0,65	-0,18
5	0,103	-1,26	-0,35	5	0,499	0,00	0,00	5	0,070	-1,48	-0,41	5	0,574	+0,19	+0,05
9	0,278	-0,59	-0,16	9	0,722	+0,59	+0,10	9	0,219	-0,78	-0,22	9	0,781	+0,78	+0,22
13	0,501	0,00	0,00	13	0,897	+1,26	+0,35	13	0,427	-0,19	-0,05	13	0,930	+1,48	+0,41
17	0,805	+0,86	+0,24	17	0,999	+2,97	+0,83	17	0,732	+0,65	+0,18	17	1,000	+3,44	+0,96
$n = 21$								$n = 21$							
1	0,001	-3,03	-0,80	1	0,161	-0,99	-0,26	1	0,000	-3,49	-0,92	1	0,223	-0,76	-0,20
6	0,113	-1,21	-0,32	6	0,472	-0,07	-0,02	6	0,080	-1,41	-0,37	6	0,539	+0,10	+0,03
11	0,298	-0,53	-0,14	11	0,702	+0,53	+0,14	11	0,242	-0,70	-0,19	11	0,758	+0,70	+0,19
16	0,528	+0,07	+0,02	16	0,887	+1,21	+0,32	16	0,461	-0,10	-0,03	16	0,920	+1,41	+0,37
21	0,839	+0,99	+0,26	21	0,999	+3,03	+0,80	21	0,777	+0,76	+0,20	21	1,000	+3,49	+0,92
$n = 25$								$n = 25$							
1	0,001	-3,09	-0,79	1	0,137	-1,09	-0,28	1	0,000	-3,54	-0,90	1	0,191	-0,87	-0,22
7	0,121	-1,17	-0,30	7	0,451	-0,12	-0,03	7	0,089	-1,35	-0,34	7	0,514	+0,04	+0,01
13	0,313	-0,49	-0,13	13	0,687	+0,49	+0,13	13	0,261	-0,64	-0,16	13	0,739	+0,64	+0,16
19	0,549	+0,12	+0,03	19	0,879	+1,17	+0,30	19	0,486	-0,04	-0,01	19	0,911	+1,35	+0,34
25	0,863	+1,09	+0,28	25	0,999	+3,09	+0,79	25	0,809	+0,87	+0,22	25	1,000	+3,54	+0,90
$n = 29$								$n = 29$							
1	0,001	-3,13	-0,77	1	0,119	-1,18	-0,29	1	0,000	-3,58	-0,88	1	0,167	-0,97	-0,24
8	0,127	-1,14	-0,28	8	0,436	-0,16	-0,04	8	0,096	-1,30	-0,32	8	0,494	-0,02	-0,01
15	0,325	-0,45	-0,11	15	0,675	+0,45	+0,11	15	0,275	-0,60	-0,16	15	0,725	+0,60	+0,16
22	0,564	+0,16	+0,04	22	0,873	+1,14	+0,28	22	0,506	+0,02	+0,01	22	0,904	+1,30	+0,32
29	0,881	+1,18	+0,29	29	0,999	+3,13	+0,77	29	0,833	+0,97	+0,24	29	1,000	+3,58	+0,88

II. táblázat

Maximum-minimumkártyák kontrolltényezői

n	95%		99%	
	K_m	B_m	K_m	B_m
4	0,71	0,63	0,97	0,81
5	0,61	0,52	0,83	0,67
6	0,54	0,46	0,74	0,59
7	0,50	0,42	0,68	0,53
8	0,46	0,38	0,64	0,49
9	0,43	0,36	0,60	0,45
10	0,41	0,34	0,57	0,43
11	0,39	0,32	0,55	0,41
12	0,38	0,31	0,53	0,39
13	0,37	0,30	0,51	0,37
14	0,35	0,29	0,49	0,36
15	0,34	0,28	0,48	0,35
17	0,33	0,26	0,46	0,32
21	0,30	0,24	0,42	0,30
25	0,29	0,22	0,40	0,28
29	0,27	0,21	0,38	0,26

K_m = kontrolltényező a külső ellenőrzőhatárok megállapításához

B_m = kontrolltényező a belső ellenőrzőhatárok megállapításához

IRODALOM

- [1] Л. И. Брагинский: Оперативный статистический контроль качества в машиностроении. Москва, 1951.
- [2] I. pl. Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó V.
- [3] J. Uchytíl: Regulace Jakosti Vyrobnku Pri Kontrole Merenim I. Prága, 1950.
- [4] »A statisztikai minőségellenőrzés és a gyártási eljárások szabályozási irányelvei.« Cseh Nehézipari Kutatóintézet Munkaközössége. Prága, 1953.
- [5] Rényi Alfréd: A rendezett minták elmélete. M. T. A. III. oszt. Közleményei III. kötet, 647. o.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВАРИАЦИОННЫХ РЯДОВ ПРИ СТАТИСТИЧЕСКОМ КОНТРОЛЕ КАЧЕСТВА

А. Фонтаньи, К. Шаркади и Е. Ваш

Резюме

Статья занимается статистическим методом контроля качества, основанным на теории вариационных рядов.

При статистическом контроле качеств в ходе производства с помощью контрольных диаграмм, встречаются трудности в связи с работой по вычислению статистических характеристик (напр. среднее значение, размах и т. д.), ведущихся на контрольных диаграммах. Ввиду этого появилась необходимость в такой системе, которая не требует подсчетов от контролера, но все же имеет точное математическое обоснование. Подходящей оказалась идея Брагинского: проведение контроля с помощью элементов вариационного ряда где значения полученные из выборки заносятся непосредственно на контроль-

ные диаграммы, где они «сами собой упорядочиваются» по величине. Относительно каждого k -ого элемента могут быть заданы контрольные линии, между которыми элемент должен находиться с вероятностью близкой к 1, в случае, если в производстве нет аномалий. Контролеру нужно только наблюдать, находятся ли элементы между этими контрольными линиями. Статья обсуждает теоретические основы и дает практические инструкции, с приложением вспомогательных расчетных таблиц.

ANWENDUNG DER THEORIE DER GEORDNETEN STICHPROBEN IN DER STATISTISCHEN QUALITÄTSKONTROLLE

A. FONTÁNYI—K. SARKADI—É. VAS

Zusammenfassung

Die Abhandlung bespricht die auf der Theorie der geordneten Stichproben beruhende, neue statistische Methode der Qualitätskontrolle während des industriellen Fertigungsvorganges.

Die wesentlichsten Hilfsmittel der statistischen Güter—Kontrollen sind die sogenannten Kontrollkarten, doch verursacht die mit der Berechnung der zu verzeichnenden Merkmale (Durchschnitt, Umfang, u. s. w.) verbundene Arbeitszunahme sehr oft Schwierigkeiten. Es entstand daher das Bedürfnis nach einer Methode, die vom Prüfer kein Rechnen beansprucht, dennoch auf sicheren mathematischen Grundlagen beruht. Als solche erbietet sich der Gedanke von Braginski: die Kontrolle mittels geordneter Stichproben; die in der Stichprobe gemessenen Werte werden unmittelbar auf das Kontrolldiagramm aufgetragen, wo sie sich «von selbst» der Grösse nach ordnen.

Für jedes der der Grösse nach k -ten Elemente können die sogenannten Kontrollgrenzen angegeben werden. Wenn in der Fabrikation keine Unregelmässigkeit vorhanden ist, müssen sich die Elemente der Stichprobe mit einer zu Eins nahe liegenden Wahrscheinlichkeit innerhalb dieser Grenzen befinden. Nur hier hat der Prüfer zu beobachten, ob die Elemente der Stichprobe zwischen den vorgeschriebenen Grenzen sind.

Die Arbeit behandelt die theoretischen Grundlagen der Methode und gibt die praktischen Anweisungen mit den nötigen Hilfstabellen an; die Tabellen wurden in unserem Institut ausgearbeitet.