# MEGJEGYZÉS A HANKEL-TRANSZFORMÁCIÓ ELMÉLETÉHEZ

FENYŐ ISTVÁN

*Összefoglalás*

A cikk összefüggést állapít meg valamely függvény többszörös Fourier-transzformáltja és a Hankel-transzformáltja között. Ez az összefüggés lehetővé teszi a Hankel-féle megfordítási tétel egy új bizonyítását.

A tétel alkalmazásaként a dolgozat megállapítja a többszörös Fourier-transzformáció sajátértékeit.

Legyen $f(r)$ valamilyen $r \geq 0$-ra értelmezett és $(0, \infty)$-ben abszolút integrálható függvény. Akkor nyilván létezik az $f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2})$ függvény $n$-dimenziós Fourier-transzformáltja :

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2})\, e^{-i(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)} dx_1 \ldots dx_n.$$

Egyszerűség kedvéért jelöljük az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektort $\bar{x}$-szel és az $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektor $\bar{y}$-nal, $|\bar{x}|$ legyen röviden $x$, $|\bar{y}| = y$, $\bar{x}$ és $\bar{y}$ belső szorzatát jelöljük $\bar{x} \cdot \bar{y}$-nal. Akkor az előbbi $n$-dimenziós Fourier-transzformált így írható :

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \overset{(n)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty}} f(x)\, e^{i\bar{x}\bar{y}} dv_x,$$

ahol $d v_x = dx_1 . dx_2 . \ldots, . d x_n$.

Könnyen belátható, hogy az $F$ transzformált függvény is csupán $y$-tól függ.

Legyen

$$\mathrm{A} = (\alpha_{ik})_1^n$$

egy olyan ortogonális matrix, melynek első sora

$$\alpha_{1i} = \frac{y_i}{y} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

továbbá

$$\overline{\xi} = A\overline{x}.$$

Ekkor nyilván

$$x = \xi \quad \text{és} \quad dv_x = dv_\xi,$$

ahol $|\overline{\xi}| = \xi$ és $dv_\xi = d_{\xi_1} d_{\xi_2} \ldots, d_{\xi_n}$.

$F$ kifejezésében szereplő skaláris szorzat pedig

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} x_i = y \xi_1.$$

Ennélfogva

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{(n)}{\cdots} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\overline{x}\,\overline{y}}\, dv_x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{(n)}{\cdots} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{iy\xi_1}\, dv_\xi.$$

Ebből látható, hogy $F$ kizárólag $y$-tól függ.

Bebizonyítjuk, hogy ha $f(x)$ $n$-szeres Fourier-transzformáltja létezik, akkor $x^{\frac{n-2}{2}} f(x)$ Hankel-transzformáltja is létezik, és hogy

$$y^{\frac{n-1}{2}} F(y) = \int_0^{\infty} \xi \left[\xi^{\frac{n-2}{2}} f(\xi)\right] J_{\frac{n-2}{2}}(y\xi)\, d\xi,$$

ahol $F(y)$ az $f(x)$ $n$-szeres Fourier-transzformáltja.

Ennek érdekében számítsuk ki most ezt a Fourier-transzformáltat:

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{(n)}{\cdots} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{iy\xi_1}\, dv_\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{(n)}{\cdots} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{\xi_1^2 + \varrho^2}\right) e^{iy\xi_1}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{\xi_1^2 + \varrho^2}\right) e^{iy\xi_1} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{(n-1)}{\cdots} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_3 d\xi_3 \ldots d\xi_n,$$

ahol $\varrho^2 = \xi_2^2 + \xi_3^2 + \ldots + \xi_n^2$. A $(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)$-k $n-1$ dimenziós terében vezessünk be polárkoordinátákat a szokásos módon. A polárszögeket jelöljük $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-3}$-al, a megfelelő Jacobi-féle determinánst meg $D$-vel. Ekkor

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{\xi_1^2 + \varrho^2})\, e^{iy\xi_1} d\xi_1 \int \overset{(n-1)}{\cdots} \int D\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-3}\, d\varrho =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{\xi_1^2 + \varrho^2})\, e^{iy\xi_1} d\xi_1 \int_0^{\infty} \Lambda(\varrho)\, d\varrho\,.$$

$\Lambda(\varrho)$ jelenti azt a függvényt, amit kapunk, ha a $D = D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-3} \varrho)$ Jacobi-determinánst a $\varphi_i$-k szerint integráljuk. Ennek a függvénynek a meghatározása történhet direkt úton is, a $D$ közvetlen felírása és a kijelölt integrálok kiszámítása révén, de egyszerűbbnek látszik az alábbi módszer. Tekintettel arra, hogy $D$ univerzális függvény, ezért polárkoordináták bevezetése révén

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overset{(n-1)}{\cdots} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varrho^2} d\xi_2\, d\xi_3 \ldots d\xi_n = \int_0^{\infty} e^{-\varrho^2} \Lambda(\varrho)\, d\varrho.$$

De egyrészt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overset{(n-1)}{\cdots} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varrho^2} d\xi_2 \ldots d\xi_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{(n-1)}{\cdots} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2)}\, d\xi_2 \ldots d\xi_n =$$

$$= \prod_{i=1}^{n=1} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi_i^2} d\xi_i \right) = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right)^{n-1} = \sqrt{\pi}^{n-1}.$$

Másrészt viszont $D$ képzési módjából nyilvánvaló, hogy

$$\Lambda(\varrho) = a\varrho^{n-2}$$

alakú függvény, ahol $a$ kizárólag az $n$-től függő szám. Így tehát

$$\sqrt{\pi}^{n-1} = a \int_0^{\infty} e^{-\varrho^2} \varrho^{n-1} d\varrho = \frac{a}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

Ebből

$$a = \frac{2\sqrt{\pi}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Visszatérve az $F(y)$ függvényhez, ezt nyertük tehát, hogy

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n}} \frac{2\sqrt{2}^{\,n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} f(\sqrt{\xi_1^2+\varrho^2})\, e^{iy\xi_1} \varrho^{n-2} d\xi_1 d\varrho =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^{\,n-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{\infty} f(\sqrt{\xi_1^2+\varrho^2})\, e^{iy\xi_1} \varrho^{n-2} d\xi_1 d\varrho .$$

Ez utóbbi kettősintegrál kiszámítása érdekében legyen

$$\xi_1 = \xi \cos\alpha\,;\ \varrho = \xi \sin\alpha\,,$$

ekkor

$$d\xi_1\, d\varrho = \xi\, d\xi\, d\alpha\,.$$

Ezért tehát

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2}^{\,n-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\infty} f(\xi)\, \xi^{n-1} \sin^{n-2}\alpha\, e^{iy\xi\cos\alpha} d\xi d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^{\,n-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{0}^{\infty} f(\xi)\, \xi^{n-1}\, d\xi \int_{0}^{\pi} e^{iy\xi\cos\alpha} \sin^{n-2}\alpha\, d\alpha$$

Az $\int_0^\pi e^{iy\xi\cos\alpha} \sin^{n-2} \alpha\, d\alpha$ kiszámítása érdekében induljunk ki a

$$\int_0^\pi \cos(z\cos x)\ \sin^{2p} x dx = \sqrt{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-p} \Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) J_p(z)$$

ismert képletből ($J_p$ a $p$ indexű elsőfajú Bessel-függvény, $p > 0$). Mivel a $0 \leq x \leq \pi$ intervallumban $\sin x \geq 0$ és szimmetrikus az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenesre, továbbá $\sin(z\cos x) = -\sin(z\cos(\pi - x))$, ezért

$$\int_0^\pi \sin(z\cos x) \sin^{2p} x\, dx = 0.$$

Ennek az integrálnak az $i$-szeresét ($i = \sqrt{-1}$) adjuk az előbbi integrálhoz, azt kapjuk, hogy

$$\int_0^\pi \sin^{2p} x\, e^{iz\cos x} dx = \sqrt{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-p} \Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) I_p(z)\,.$$

Ha most ebben $p = n - 2$ és $z = y\xi$, akkor

$$\int_0^\pi e^{iy\xi\cos\alpha}\sin^{n-2}\alpha\, d\alpha = \sqrt{\pi}\,\frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{(y\xi)^{\frac{n-2}{2}}}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2}\right) J_{\frac{n-2}{2}}(y\xi)\,.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$F(y) = \frac{1}{y^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^\infty f(\xi)\,\xi^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(y\xi)\,d\xi\,.$$

Vagyis

$$y^{\frac{n-2}{2}} F(y) = \int_0^\infty \xi\left[\xi^{\frac{n-2}{2}} f(\xi)\right] J_{\frac{n-2}{2}}(y\xi)\,d\xi.$$

Ez tehát azt mutatja, hogy $y^{\frac{n-2}{2}} F(y)$ nem egyéb, mint a $\xi^{\frac{n-2}{2}} f(\xi)$ Hankel-féle transzformáltja. Az előbbiekből az is következik, hogy ha *$f(\xi)$ Fourier-transzformáltja létezik, akkor $\xi^{\frac{n-2}{2}} f(\xi)$-nek a Hankel-transzformáltja is létezik.*

Ha $\dfrac{n-2}{2} = p$, akkor

$$y^p F(y) = \int_0^\infty \xi\,[\xi^p f(\xi)]\,J_p(Y\xi)\,d\xi\,. \tag{1}$$

Ha $f(x)$ az $x$ hely környezetében korlátos variációjú, akkor az*

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{(n)}{\cdots}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{i\bar{x}\bar{y}}\,dv_x$$

egyenletből következik, hogy

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{(n)}{\cdots}\int_{-\infty}^{+\infty} F(y)\,e^{-i\bar{x}\bar{y}}\,\mathbf{x}v_y. \tag{2}$$

Mivel valós $p$ és $z$ értékek mellett

$$\int_0^\infty \sin^{2p}x\; e^{iz\cos x}\,dx$$

* *U. Ruelle:* L'integrale di Fourier par le funzioni di più variabili. Livorno, 1940.

valós (tehát konjugáltja vele egyenlő), azért ha a (2) integrálra az előbb leírt számítást újra elvégezzük, azt kapjuk, hogy

$$x^p f(x) = \int_0^\infty \eta\ [\eta^p F(\eta)]\ J_p(x\eta)\, d\eta.$$

Összevetve ezt (1) egyenlettel, *a Hankel-féle megfordítási tétel* új bizonyítását adjuk.

Megemlítjük, hogy a kimondott tétel *C. G. Essen* egy igen mélyenfekvő tételéből is bizonyítható.[2] Essen tételének felhasználásával nyert bizonyítás nem rövidebb, mint az előbb közölt bizonyítás.

Egy másik alkalmazása az előbbi tételnek az, hogy lehetővé válik az

$$f(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \overset{(n)}{\cdots} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{x}\bar{y}} f(y)\, dy_1 \ldots dy_n \tag{3}$$

sajátérték probléma megoldása. Itt $x$ és $y$ ismét az $n$ dimenziós $\bar{x}$, ill. $\bar{y}$ vektorok abszolút értékét jelentik.

Mindenekelőtt átírjuk az $f(t)$ függvény Hankel-transzformáltját más alakba. E végből vezessük be a

$$\int_0^\infty t f(t)\, J_\nu(xt)\, dt$$

Hankel-transzformációban az $u = \frac{t^2}{4}$ új integrációs változót. Ekkor

$$\int_0^\infty t f(t)\ J_\nu(xt)\ dt = 2 \int_0^\infty f(2\sqrt{u})\ J_\nu(2x\sqrt{u})\, du.$$

Ezek előrebocsátása után az (1) alatti képlet felhasználásával a (3) alatti probléma ilyenképpen írható át:

$$f(x) = \lambda \sqrt{2\pi}^n\, x^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty t \left[ t^{\frac{n-2}{2}} f(t) \right] J_{\frac{n-2}{2}}(xt)\, dt =$$

$$= 2\lambda \sqrt{2\pi}^n x^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty (2\sqrt{\pi})^{\frac{n-2}{2}} f(2\sqrt{u})\ J_{\frac{n-2}{2}}(2x\sqrt{u})\, du\,.$$

Legyen $x = 2\sqrt{s}$, akkor

$$(2\sqrt{s})^{\frac{n-2}{2}} f(2\sqrt{s}) = 2\lambda (\sqrt{2\pi})^n \int_0^\infty (2\sqrt{\pi})^{\frac{n-2}{2}} f(2\sqrt{u}) J_{\frac{n-2}{2}}(4\sqrt{su})\, du$$

vagypedig, ha $\frac{n-2}{2} = p$ és $(2\sqrt{s})^p \, f(2\sqrt{s}) = \varphi(s)$,
akkor

$$(3') \qquad \varphi(s) = 2^{p+2}\lambda\pi^{p+1}\int_0^\infty \varphi(u)\, J_p\,(4\sqrt{su})\, du.$$

Ennek az egyenletnek a megoldásához felhasználjuk *Tricomi* egy tételét, [3] mely szerint

$$v^{p+1} L_v\left\{s^{\frac{p}{2}} H_s^p\,(\varphi)\right\} = L_{\frac{1}{v}}\left\{s^{\frac{p}{2}}\,\varphi\,(s)\right\},$$

ahol

$$L_v\left\{g\,(s)\right\} = \int_0^\infty e^{-vs}\, g(s)\, ds \quad \text{és} \quad H_s^p\,(g) = \int_0^\infty J_p\,(2\sqrt{vs})\, g(s)\, ds.$$

Fel kell tételezni, hogy $s^{\frac{p}{2}}\varphi\,(s)$ Laplace-transzformáltja létezik és konvergencia-abszcisszája négynél kisebb.

A (3') egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg $s^{\frac{p}{2}}$-el és képezzük mindkét oldal Laplace-transzformáltját :

$$L_v\left\{s^{\frac{p}{2}}\,\varphi\,(s)\right\} = 2^{p+2}\,\lambda\pi^{p+1}\, L_v\,\left\{s^{\frac{p}{2}} H_{4s}\,(\varphi)\right\}.$$

Legyen $4\,s = t$, akkor az

$$L_v\left\{s^{\frac{p}{2}}\,\varphi\,(s)\right\} = \lambda\pi^{p+1}\, L_{\frac{v}{4}}\left\{t^{\frac{p}{2}}\, H_t\,(\varphi)\right\}$$

Alkalmazzuk *Tricomi* előbb idézett tételét, e szerint

$$\frac{v^{p+1}}{4^{p+1}}\, L_{\frac{v}{4}}\left\{s^{\frac{p}{2}}\, H_s^p\,(\varphi)\right\} = L_{\frac{4}{v}}\left\{s^{\frac{p}{2}}\,\varphi\,(s)\right\},$$

így tehát

$$L_v\left\{s^{\frac{p}{2}}\,\varphi(s)\right\} = (4\pi)^{p+1}\,\lambda v^{-p-1} L_{\frac{4}{v}}\left\{s^{\frac{p}{2}}\,\varphi\right\}$$

A mondott feltételek mellett szabad $v$ helyébe $\frac{4}{v}$-t helyettesíteni. Ha a $v$ olyan, hogy vele együtt $\frac{4}{v}$ is az $s^{\frac{n}{2}}\varphi(s)$ függvény konvergencia félsíkjába esik, akkor igaz az, hogy

$$\frac{1}{v^{p+1}} L_{\frac{4}{v}} \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\} = \lambda \pi^{p+1} L_{v} \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\}.$$

$L_{\frac{4}{v}} \left\{ s^{\frac{v}{2}} \varphi(s) \right\}$-nek ebből adódó értékét az előbbi egyenletbe helyettesítve az adódik, hogy

$$L_{v} \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\} = \lambda^{2} 4^{p+1} \pi^{2p+2} L_{v} \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\}.$$

Ha $\varphi(s) \not\equiv 0$, akkor $L_{v} \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\} \not\equiv 0$, tehát

Ebből

$$\lambda^{2} 2^{2p+2} \pi^{2p+2} = 1.$$

$$\lambda = \begin{cases} (2\pi)^{-p-1} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \\ (-2\pi)^{-p-1} = (-2\pi)^{-\frac{n}{2}}. \end{cases}$$

Ezek adják meg a (3) alatti sajátérték-probléma sajátértékeit.

Érdemes megemlíteni, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(y)\, dy$$

egyszeres Fourier-transzformációnak sajátértékei 1, $-1$, $i$ és $-i$ [4]. Ha $n = 1$, akkor a mi problémánk csupán a $+1$ és $-1$ sajátértékeket szolgáltatja, aminek oka, hogy módszerünk a szóbanforgó sajátérték-problémának csupán *páros* megoldásait szolgáltatja. Ha a keresett sajátfüggvény páros, akkor tényleg csak $+1$ és $-1$ sajátérték lehetséges.*

* A felvetett kérdés általános megoldását l. *Fenyő István:* A többszörös Fourier-transzformáció elméletéhez. M. Tud. Akad. III. oszt. Osztályközleményei. s. a.

Megemlítjük, hogy az (1) alatti képlet akkor is igaz, ha $n = 1$. Ekkor ugyanis a Fourier-transzformált

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos yx dx =$$

$$= \sqrt{y} \int_{0}^{\infty} x \left[x^{-\frac{1}{2}} f(x)\right] \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos yx}{\sqrt{yx}} d x = \int_{0}^{\infty} \left[x^{-\frac{1}{2}} f(x)\right] J_{-\frac{1}{2}}(yx)\, dx.$$

Ez pedig nem más, mint az (1) képlet, ha $n = 1$.

## IRODALOM


[1] И. М. Рыжик И. С. Градштейн: Таблицы интегралов суми, рядов и произведени. 1951. Москва 184 o. 3. 483. 4. képlet.

[2] Carl—Gustav Essen : Fourier Analysis of distribution functions. Acta Math. 77—83. o.

[3] Tricomi : Atti Lincei 1935. XXII. 562. o.

[4] F. Riesz—B. Sz. Nagy : Leçons d'Analyse Fonctionelle 1952. 292. o.


## ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГАНКЕЛЯ

И. Фенье


### Резюме

В статье обнаруживается связь между преобразованиями Ганкеля и Фурье. Это представляет возможность дать новое доказательство теоремы обращения Ганкеля.

В качестве применения теоремы в работе выводятся собственные значения многократного преобразования Фурье.

Если многократное преобразование Фурье переходит в однократное, то получим известную теорему, относящуюся к собственным значениям однократного преобразования Фурье.


## EINE BEMERKUNG ZUR THEORIE DER HANKEL'SCHEN TRANSFORMATION

ST. FENYŐ


### *Zusammenfassung*

In der Abhandlung wird ein Zusammenhang zwischen den mehrfachen Fourier-Transformierten und Hankelschen Transformierten einer Funktion bewiesen. Aus diesem Zusammenhang kann ein neuer Beweis für den Hankelschen Umkehrsatz abgeleitet werden.

Als Anwendung des Satzes werden die Eigenwerte der mehrfachen Fourier-Transformation bestimmt. Im Falle der einfachen Fourier-Transformation ergibt sich der bekannte Satz für die Eigenwerte der einfachen Fourier-Transformation.