A HENGERFÜGGVÉNYEK ADDICIÓS TÉTELÉNEK NÉHÁNY KÖVETKEZMÉNYÉRŐL

FENYŐ ISTVÁN

Összefoglalás

A dolgozat általánosítja *C. Agostinelli* egy integrálformuláját, mely bizonyos függvények Fourier-együtthatójára vonatkozik. A levezetett képletek a Bessel-függvényekre vonatkozó számos integráltételnek uj bizonyítására, továbbá néhány újnak látszó, a Bessel-függvényekre vonatkozó összefüggésre vezetnek. Az egyik ilyen képlet a konfluens hypergeometrikus függvényeknek egy újnak látszó integrálelőállítását adja a Bessel-függvények segítségével.

Az Agostinelli-féle tétel egy további általánosítását tartalmazza a dolgozat, amikor az Agostinelli által vizsgált függvénynek nem a közönséges értelemben vett Fourier-együtthatóját, hanem a Gegenbauer-féle függvények szerint vett Fourier-együtthatójára állapít meg egy formulát. Ennek speciális esetei számos, a Bessel-függvényekre vonatkozó összefüggés levezetésére alkalmasak, így többek között a másodfajú Bessel-függvények egy integrálelőállítását adja a Gegenbauer-féle függvények segítségével.

A matematikai fizika számos problémája, különösen az analitikus mechanika és a folyadékáramlástan gyakran a következő alakú végtelen határú integrálok kiszámítására vezet :

$$\int_0^\infty J_m(a\xi)\, J_n(b\xi)\, f(\xi)\, d\xi ,$$

ahol J_n jelenti az elsőfajú Bessel-féle függvényeket. Így például nagyméretű, igen vékony rugalmas lemez kényszerített rezgését a következő differenciálegyenlet írja le :

$$b^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Phi(r, t).$$

Ha a deformáció változását olyan, a normális irányában ható nyomóerő hatása alatt vizsgáljuk, mely csupán egy ideig egy kör kerületén egyenletesen hat és $\Phi(r, t) = F(r)\, G(t)$ alakú, akkor a szóbanforgó differenciálegyenlet megoldását a

$$W(r,t) = \int_0^\infty J_0(r\xi) J_1(a\xi) \frac{1-\cos bt\xi^2}{\xi^4} d\xi$$

integrál szolgáltatja. — Vagy pedig: egy radiálisan szimmetrikus nyomás hatása alatt álló viszkózus folyadék szabad felszínalakjának egyenletét elég hosszú idő után közelítőleg a következő integrállal lehet kiszámítani

$$\zeta(r) = \int_0^\infty J_1(\xi a) J_0(\xi r) d\xi. \qquad (0 < r < a)$$

Ugyancsak az említett típusba tartozó integrálok lépnek fel akkor, ha pl. vastag lemezek deformációit vizsgáljuk bizonyos erők hatása alatt. Ekkor

$$\int_0^\infty e^{-\xi z} \xi^p J_m(\xi r) J_1(\xi a) d\xi$$

alakú integrálok kiszámítása válik szükségessé.

Az előbbiekkel rokon (bár azoktól alakilag eltérnek) integrálok a következők:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(R) \cos n\,\Theta\, d\Theta,$$

ahol $R = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\Theta}$. Ezek is számos rugalmasságtani feladat megoldása kapcsán lépnek fel. Így például bizonyos rugalmas héjak deformációinak kiszámításánál az

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_k(\xi R) \cos\Theta\, d\Theta \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos\Theta}{(R^2 + z^2)^{1/2}} d\Theta$$

alakú integrálok értékeinek meghatározása szükséges (l. pl. *R. A. Sack:* Prac. Phys. Soc. *58*. 1946. 729. o.).

Az említett típusba tartozó integrálok kiszámításával már a múlt században számosan foglalkoztak, mint például *Hankel, Sonine, Weber, Bierens de Haan* és még sokan mások.

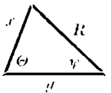
Nemrégen *C. Agostinelli* egy figyelemreméltó formulát talált, melynek lényege az, hogy a Bessel-függvények szorzatát tartalmazó végtelen határú integrálokat az imént definiált R-től függő kifejezés Fourier-együtthatóinak kiszámítására vezeti vissza. E formula jelentősége kettős: egyrészt lehetővé teszi *Hankel, Sonine* stb. már ismert képleteinek igen egyszerű igazolását és ezenkívül lehetővé teszi a matematikai fizika differenciálegyenleteinek megoldása kapcsán fellépő Bessel-függvényeket tartalmazó végtelen határú integrálok explicit kiszámítását, másrészt számos bonyolult, az említett típusba tartozó improprius integrál kiszámítását Fourier-együtthatók kiszámítására vezeti vissza, ami által ezek a bonyolult integrálok numerikusan (pl. harmonikus analizátorokkal is) kezelhetőkké válnak.

A következőkben Agostinelli tételének többirányú általánosítását adjuk. Ezáltal lehetővé válik egyrészt számos klasszikus eredmény egyszerű igazolása, másrészt újabb, az említett típusba tartozó integrálok explicit kiszámítása. Megemlítjük, hogy Agostinelli tételének általánosítása lehetővé teszi a hipergeometrikus függvény egy újabb integrálelőállítását, ami által lehetségessé válik a matematikai fizikában oly nagy szerepet játszó hipergeometrikus differenciálegyenlethez rokon differenciálegyenletek megoldását zárt alakban felírni.

Legyen $f(r)$ egy tetszőleges olyan függvény, melyre a Hankel-féle integráltétel alkalmazható és $R = \sqrt{x^2 + y^2 - 2\,xy \cos \Theta}$, ahol $x, y, 0 \leq \Theta \leq \leq 2\pi$ akármilyen valós számok. *C. Agostinelli* [1] bebizonyította a következő formulát:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R)\cos n\Theta\, d\Theta = \int_0^\infty sJ_n(sx)\,J_n(sy)\,ds\int_0^\infty \sigma J_0(s\sigma)\,f(\sigma)\,d\sigma.$$

J_n jelenti az n indexű elsőfajú Bessel-féle függvényt. *Agostinelli* ennek a tételnek számos alkalmazását adta, éppen ezért talán nem érdektelen *Agostinelli* tételének néhány általánosítását adni. Mivel (1. ábrát)



$$\sin\psi = \frac{x}{R}\sin\Theta \quad \text{és} \quad \cos\psi = \frac{y - x\cos\Theta}{R},$$

a Bessel-függvény elméletéből közismert Graf-féle formulából [2] következik, hogy

$$J_k(R)\cos k\psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{k+m}(x)\,J_m(y)\cos m\Theta \tag{1}$$

és

$$J_k(R)\sin k\psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{k+m}(x)\,J_m(y)\sin m\Theta. \tag{2}$$

k itt akármilyen számot jelenthet.

(1)-ből nyilván

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} J_k(R)\cos k\psi\cos m\Theta d\Theta = J_{k+m}(x)\,J_m(y) + J_{k-m}(x)\,J_{-m}(y).$$

(Ez a formula elveszti értelmét, ha $x \cdot y = 0$. még akkor is, ha $k = m$ egész.)

Vegyük figyelembe ezt a jól ismert formulát, hogy

$$J_{-m} = (-1)^m J_m,$$

akkor kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} J_k(R)\cos k\psi \cos n\Theta d\Theta =$$

$$= J_{k+m}(x)J_m(y) + (-1)^m J_{k-m}(x)J_m(y) = [J_{k+m}(x) + (-1)^m J_{k-m}(x)]\, J_m(y)$$

Ha x és y helyett sx-et, illetve sy-t írunk, világos dolog, hogy ψ ezáltal nem változik meg, így tehát

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} J_k(sR)\cos k\psi \cos m\Theta d\Theta = [J_{k+m}(sx) + (-1)^m J_{k-m}(sx)]\, J_m(sy).$$

Szorozzuk végig ezt az egyenletet $s \int\limits_0^\infty \sigma J_K(s\sigma)\, f(\sigma)\, d\sigma$-val és integráljuk s szerint, akkor figyelembevéve a Hankel-féle integráltételt, a következő formulára jutunk:

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(R)\cos k\psi \cos m\Theta d\Theta =$$

$$= \int_0^\infty s\,[J_{k+m}(sx) + (-1)^m J_{k-m}(sx)]\, J_m(sy)\, ds \int_0^\infty \sigma J_k(s\sigma)\, f(\sigma)\, d\sigma.$$

Ez a képlet az Agostinelli-féle képlet közvetlen általánosítása, mert ha $k = 0$, akkor megkapjuk az idézett tételt.

A (2) képletből egy másik, az (I)-hez hasonló formulát is lehet nyerni. (2)-ből ugyanis

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} J_k(R)\sin k\psi \sin m\Theta d\Theta = J_{k+m}(x)\, J_m(y) - J_{k-m}(x)\, J_{-m}(y) =$$

$$= J_{k+m}(x)\, J_m(y) + (-1)^{m+1} J_{k-m}(x)\, J_m(y) =$$

$$= [J_{k+m}(x) + (-1)^{m+1} J_{k-m}(x)]\, J_m(y).$$

Ide ismét helyettesítsünk x és y helyébe sx, illetve sy-t és az így nyert egyenletet $s \int\limits_0^\infty \sigma J_k(s\sigma) f(\sigma)\, d\sigma$-val szorozzuk végig, akkor azt kapjuk, hogy

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(R)\sin k\psi \sin m\Theta d\Theta =$$

$$= \int_0^\infty s[J_{k+m}(sx) + (-1)^{m+1} J_{k-m}(sx)]\, J_m(sy)\, ds \int_0^\infty \sigma J_k(s\sigma)\, f(\sigma)\, d\sigma.$$

Az (I) és (II) képletek összeadásával azt kapjuk, hogy

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R)\cos(k\psi - m\Theta)\,d\Theta =$$

$$= \int_0^\infty sJ_{k+m}(sx)\,J_m(sy)\,ds \int_0^\infty \sigma J_k(s\sigma)\,f(\sigma)\,d\sigma.$$

Ez utóbbi *Agostinelli* képletének egy másik irányú általánosítása.

2. Lássuk a most levezetett formuláknak egy-két következményét. Ismeretes, hogy [3]

$$\int_0^\infty J_k(s\sigma)\,e^{-h\sigma^2}\sigma^{k+1}\,d\sigma = \frac{s^k}{(2h)^{k+1}}\,e^{-\frac{s^2}{4h}} \qquad (k > -1 \quad h > 0).$$

Ha (III)-ban $f(\sigma) = \sigma^k e^{-h\sigma^2}$, akkor

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R^k\,e^{-hR^2}\cos(k\psi - m\Theta)\,d\Theta =$$

$$= \frac{1}{(2h)^{k+1}}\int_0^\infty s^{k+1}e^{-\frac{s^2}{4h}}\,J_{k+m}(sx)\,J_m(sy)\,ds.$$

Ez az érdekesnek látszó képlet *Agostinelli* egy másik képletének általánosítása. Ha $k = 0$, megkapjuk az idézett formulát [4].

Ha kiindulunk a következő, *Hankel*től származó formulából [5]:

$$\int_0^\infty J_k(s\sigma)\,\sigma^q\,d\sigma = \frac{2^q}{s^{q+1}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-q+1}{2}\right)}. \quad -(k+1) < q < \frac{1}{2},$$

és (III)-ban

$$f(R) = R^{q-1}$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R^{q-1}\cos(k\psi - m\Theta)\,d\Theta =$$

$$= 2^q\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-q+1}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{1}{s^q}\,J_{m+k}(sx)\,J_m(sy)\,ds.$$

Különösen érdekes az az eset, amikor $x = y$. Ez esetben $2\psi + \Theta = \pi$ és $R = 2x\cos\psi$. Ekkor

$$(4) \qquad \frac{(-1)^m}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2m+k)\psi}{(2x)^{1-q}\cos^{1-q}x}\,d\psi =$$

$$= 2^q \frac{\Gamma\left(\frac{k+q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-q+1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{1}{s^q} J_{m+k}(sx) J_m(sy)\,ds.$$

Ha itt $q = 0$, akkor

$$\int_0^\infty J_{m+k}(sx) J_m(sx)\,ds = \frac{(-1)^m}{2x\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2m+k)\psi}{\cos\psi}\,d\psi.$$

Legyen $k = 1$, akkor

$$\int_0^\infty J_{m+1}(sx) J_m(sx)\,ds = \frac{(-1)^m}{2\pi x}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2m+1)\psi}{\cos\psi}\,d\psi = \frac{1}{2x}.$$

Ez egy ismert képlet [6]. Ha $m = 0$, akkor

$$\int_0^\infty J_0(sx) J_1(sx)\,ds = \frac{1}{2x}$$

képlethez jutunk, mely *Weber* [7] egy eredménye.

Mint fontos speciális esetet felemlíthetjük azt, amikor $k = 0$, $q = 0$, ekkor

$$\int_0^\infty J_m(sx) J_m(sy)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos m\Theta}{R}\,d\Theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos m\Theta d\Theta}{\sqrt{x^2 + y^2\, 2xy\cos\Theta}}$$

ami ismét *Agostinelli* egyik eredménye [8].

Ebből következik, hogy

$$\int_0^\infty J_1(sx)\, J_1(sy)\, ds =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi x} \displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\cos\Theta d\Theta}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{x}\right)\cos\Theta}} = \dfrac{2}{\pi y}\left[K\left(\frac{y}{x}\right) - E\left(\frac{y}{x}\right)\right] & \text{ha } y < x \\ \dfrac{1}{\pi y} \displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\cos\Theta d\Theta}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right)\cos\Theta}} = \dfrac{2}{\pi x}\left[K\left(\frac{x}{y}\right) - E\left(\frac{x}{y}\right)\right], & \text{ha } x < y \end{cases}$$

Itt figyelembevettük *D. Bierens de Haan* egyik eredményét [9]; $F(t)$ a másodfajú teljes elliptikus integrált, $K(t)$ pedig az elsőfajú teljes elliptikus integrált jelenti. A most levezetett képlet újnak látszik.

Legyen (4)-ben $m = 0$ és $k = 0$, akkor

$$\int_0^\infty \frac{1}{s^q} J_0^2(sx)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2^q \pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(2x)^{1-q}\cos^{1-q} x} = \frac{1}{\pi x^{1-q}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{q-1}\psi d\psi =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)} \frac{2^{q-3}}{\pi x^{1-q}} B\left(\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right) \qquad 0 < q < \frac{1}{2}$$

B az Euler-féle béta-függvényt jelenti. Itt ismét *Bierens de Haan* egy formuláját használtuk fel [10]. Ez a formula is újnak látszik. Legyen (4)-ben $k = -2m$, akkor

$$\int_0^\infty \frac{1}{s^q} J_m(sx)\, J_{-m}(sx)\, dx = \frac{(-1)^m}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1-2m-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-2m+q}{2}\right)} \frac{1}{x^{1-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi^{q-1}\, d\psi =$$

$$= \frac{(-1)^m}{\pi x^{1-q}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-2m-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-2m+q}{2}\right)} 2^{q-3} B\left(\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

Vegyük figyelembe, hogy $J_{-m} = (-1)^m J_m$, akkor a

$$\int_0^\infty \frac{1}{s^q} J_m^2 (sx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi x^{1-q}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-2m-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-2m+q}{2}\right)} 2^{q-3} B\left(\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right) \qquad 0 < q < \frac{1}{2}$$

a képlethez jutunk, mely nem volt eddig ismeretes előttünk.

A (3) alatti képlet lehetővé teszi a Gauss-féle hipergeometrikus függvény egy érdekesnek látszó integrálelőállítását. Ismeretesek ugyanis *Sonine* és *Schafheitlin* klasszikus formulái [11], melyek szerint

$$\int_0^\infty \frac{1}{s^q} J_{m+k}(sx)\, J_m(sy)\, ds =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^{m+k}\Gamma\left(\frac{2m+k-q+1}{2}\right)}{2^q y^{m+k-q+1}\Gamma\left(\frac{-k+q+1}{2}\right)\Gamma(m+k+1)} \times \\ \times\, {}_2F_1\left(\frac{2m+k-q+1}{2}, \frac{k-q+1}{2}, m+k+1, \frac{x^2}{y^2}\right) \\ \text{ha } 0 < x < y - (k+1) < q < \frac{1}{2} \\ \dfrac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{q-1}\Gamma(q)\Gamma\left(\frac{2m+k-q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{-k+q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2m+k+q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+q+1}{2}\right)} \\ \text{ha } \quad x = y > 0 \quad \text{és} \quad 0 < q < \frac{1}{2} \\ \dfrac{y^m\Gamma\left(\frac{2m+k-q+1}{2}\right)}{2^q x^{m-q+1}\Gamma\left(\frac{k+q+1}{2}\right)\Gamma(m+1)} \times \\ \left({}_2F_1\, \frac{2m+k-q+1}{2}, \frac{-k-q+1}{2}, m+1, \frac{y^2}{x^2}\right) \quad \text{ha} \quad 0 < y < x. \end{cases}$$

Ezeket a (3) képlettel összevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} R^{q-1}\cos(k\psi - m\Theta)\,d\Theta =$$

$$= \frac{x^{m+k}}{y^{m+k-q+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{k+q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2m+k-q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-k+q+1}{2}\right)\Gamma(m+k+1)}\times$$

$$\times\ {}_2F_1\left(\frac{2m+k-q+1}{2},\ \frac{k-q+1}{2},\ m+k+1,\ \frac{x^2}{y^2}\right)\ \text{ha}\quad 0<x<y$$

$$= \frac{y^m}{x^{m-q+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{2m+k-q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-q+1}{2}\right)\Gamma(m+1)}\times$$

$$\times\ {}_2F_1\left(\frac{2m+k-q+1}{2},\ \frac{-k-q+1}{2},\ m+1,\ \frac{y^2}{x^2}\right).$$

$$\text{ha}\quad 0<y<x$$

Ha pedig *Sonine* és *Schafheitlin* eredményeit (4)-gyel vetjük egybe, azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2m+k)\,\psi}{\cos^{1-q}\psi}\,d\psi =$$

$$= (-1)^m\,2^{1-q}\,\pi\,\frac{\Gamma(q)\Gamma\left(\frac{2m+k-q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-k+q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2m+k+q+1}{2}\right)}.$$

ha $0<q<\frac{1}{2}$.

További érdekes következményeket nyerhetünk, ha

$$-f(\sigma) = \sigma^{k-1}e^{-h\sigma}\quad k>-\frac{1}{2},\quad h>0$$

helyettesítést hajtjuk végre. Ekkor ugyanis

$$(4)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R^{k-1}\, e^{-hR}\cos(k\psi - m\Theta)\, d\Theta =$$

$$= \frac{2^k\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{s^{k+1}}{(s^2+h^2)^{k+\frac{1}{2}}}\, J_{m+k}(sx)\, J_m(sy)\, ds,$$

figyelembevéve *Sonine* egyéb ismert eredményét [12]. Ha $k = 0$, visszakapjuk *Agostinelli* [13] egyik figyelemreméltó eredményét. Ha pedig $m = 0$ és $k = \frac{1}{2}$, akkor

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-hR}}{\sqrt{R}}\cos\frac{\psi}{2}\, d\Theta = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{s^{\frac{3}{2}}}{s^2+h^2}\,\frac{\sin sx}{\sqrt{sx}}\, J_0(sy)\, ds =$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{x}}\int_0^\infty J_0(sy)\,\frac{s}{s^2+h^2}\sin sx\, ds.$$

Legyen most $|y| < x$ $(x > 0)$, akkor mint ismeretes [14]

$$\int_0^\infty J_0(sy)\,\frac{1}{s^2+h^2}\cos sx\, ds = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-xh}}{h}\, I_0(hy);$$

differenciáljuk mindkét oldalt x szerint, akkor

$$\int_0^\infty J_0(sy)\,\frac{s}{s^2+h^2}\sin sx\, ds = \frac{\pi}{2}\, e^{-xh}\, I_0(hy).$$

Így tehát

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{-hR}}{\sqrt{R}}\cos\frac{\psi}{2}\, d\Theta = \frac{2\pi}{\sqrt{x}}\, e^{-xh}\, I_0(hy) \qquad (|y| < x,\quad h > 0).$$

3. Az eddigieket nagymértékben általánosíthatjuk, ha a kiindulási Graf-formula valamely általánosításából indulunk ki.

Így például ismeretes [15], hogy

$$\frac{J_n(R)}{R^n} = 2^n\Gamma(n)\sum_{m=0}^\infty (n+m)\,\frac{J_{n+m}(y)}{x^n}\, C_m^{(n)}(\cos\Theta)\,\frac{J_{n+m}(y)}{y^n},$$

ahol $C_m^{(n)}$ jelenti a magasabbrendű gömbfüggvényeket (Gegenbauer-féle függvényeket*) ($n \pm 0, -1, -2, \ldots$). Felhasználva a magasabb gömbfüggvények ortogonalitását írhatjuk, hogy

$$x^n y^n \int_0^\pi \frac{J_n(R)}{R^n} C_m^{(n)}(\cos\Theta)\sin^{2n}\Theta d\Theta = \frac{\pi\Gamma(2n+m)}{2^{n-1}m!\Gamma(n)} J_{n+m}(x) J_{n+m}(y).$$

Helyettesítsünk x és y helyébe sx, ill. sy-t, kapjuk, hogy

$$x^n y^n \int_0^\pi s^n \frac{J_n(sR)}{R^n} C_m^{(n)}(\cos\Theta)\sin^{2n}\Theta d\Theta = \frac{\pi\Gamma(2n+m)}{2^{n-1}m!\Gamma(n)} J_{n+m}(sx) J_{n+m}(sy).$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt ismét $s^{-n+1}\int\limits_0^\infty \sigma J_n(s\sigma) J f(\sigma)\, d\sigma$ integrállal és integráljunk s szerint 0-tól ∞-ig, akkor azt kapjuk, hogy

$$x^n y^n \int_0^\pi \frac{f(R)}{R^n} C_m^{(n)}(\cos\Theta)\sin^{2n}\Theta d\Theta =$$

$$\text{(IV)} \quad = \frac{\pi\Gamma(2n+m)}{2^{n-1}m!\,\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{1}{s^{n-1}} J_{n+m}(sx) J_{n+m}(sy)\, ds \int_0^\infty \sigma J_n(s\sigma) f(\sigma)\, d\sigma.$$

Ez ismét *Agostinelli* tételének egy másirányú általánosítása. Ha itt $n = 1$, akkor, figyelembevéve, hogy $C_m^{(1)}(\cos\Theta) = \dfrac{\sin(n+1)\Theta}{\sin\Theta}$, azt kapjuk, hogy

$$xy \int_0^\pi \frac{f(R)}{R} \sin\Theta \sin(m+1)\Theta d\Theta =$$

$$= (m+1)\pi \int_0^\infty J_{m+1}(sx) J_{m+1}(sy)\, ds \int_0^\infty \sigma J_1(s\sigma) f(\sigma)\, d\sigma.$$

Megjegyezzük, hogy ezt a formulát más módon, közvetlenül II-ből is megkaphatjuk. Legyen $k > 0$ egész szám. Akkor ismert képletek szerint

$$J_{k-m}(x) = (-1)^{k-m} J_{m-k}(x).$$

Ezért

$$J_{m+k}(x) + (-1)^{m+1} J_{k-m}(x) = J_{m+k}(x) - (-1)^k J_{m-k}(x)$$

* Szokásos ezeket még $V_m^{(i)}$-vel is jelölni, a C és V jelölés közötti összefüggés $V_k^{(2n)} = C_k^{(n)}$

és

$$J_{m-k}(x) = \frac{1}{x^{m-k}} \left(\frac{d}{xdx}\right)^k [x^m J_m(x)]$$

$$J_{m+k}(x) = (-1)^k x^{m+k} \left(\frac{d}{xdx}\right)^k [x^{-m} J_m(x)].$$

Így tehát

$$(-1)^k J_{m-k}(sx) - J_{m+k}(sx) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{x^k} \left[\frac{1}{s} \left(\frac{d}{ds}\right)^k [s^m J_m(sx)] - s^m \left(\frac{d}{ds}\right)^k s^{-m} J_m(sx)\right].$$

Egész k értékekre II így is írható

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R) \sin k\psi \sin m\Theta d\Theta =$$

$$= \frac{(-1)^n}{x^k} \int_0^\infty \left[\frac{-1}{s^{m-1}} \left(\frac{d}{ds}\right)^k [s^m J_m(sx)] +\right.$$

$$\left. + s^{m+1} \left(\frac{d}{ds}\right)^k [s^{-m} J_m(sx)]\right] J_m(sy)\, ds \cdot \int_0^\infty \sigma J_K(s\sigma) f(\sigma)\, d\sigma.$$

Legyen most $k = 1$, akkor

$$\frac{d}{ds}(s^m J_m(sx)) = ms^{m-1} J_m(sx) + s^m x J'_m(sx).$$

$$\frac{d}{ds}(s^{-m} J_m(sx)) = -ms^{-m-1} J_m(sx) + s^{-m} x J'_m(sx).$$

Szorozzuk az első egyenletet s^{1-m}, a másodikat $-s^{1+m}$-el és adjuk össze az így kapott egyenleteket:

$$\frac{1}{s^{m-1}} \frac{d}{ds} [s^m J_m(sx)] - s^{m+1} \frac{d}{dx} [s^{-m} J_m(sx)] = 2m J_m(sx).$$

Ezért

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R) \sin \psi \sin m\Theta d\Theta = \frac{2m}{x} \int_0^\infty J_m(sx) J_m(sy) \int_0^\infty \sigma J_1(s\sigma) f(\sigma)\, d\sigma.$$

Másrészt viszont $\sin \psi = \frac{x}{R} \sin \theta$, így

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R)}{R} \sin \Theta \sin m\Theta d\Theta = \frac{2m}{x^2} \int_0^\infty J_m(sx) J_m(sy) \int_0^\infty J_1(s\sigma) f(\sigma)\, d\sigma.$$

Figyelembevéve $\sin\Theta \sin m\Theta$ függvény páros voltát és hogy mindkét oldalon szereplő integrál x és y-ban szimmetrikus, megkapjuk az előbbi képletet.

Legyen most megint $f(\sigma) = \sigma e^{-h\sigma^2}$ $(h > 0)$, akkor már idézett tétel alapján

$$\frac{xy}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-hR^2}\sin\Theta\sin m\Theta d\Theta = \frac{m}{4h^2}\int_0^{\infty} s J_m(\Delta x) J_m(sy) e^{-\frac{s^2}{4h}} ds.$$

Másrészt tudjuk, hogy [16]

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4a}} J_m(sx) J_m(sy) s ds = 2he^{-(x^2+y^2)h} J_m(2hxy),$$

ezért

$$\frac{xy}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-h(x^2+y^2-2xy\cos\Theta)}\sin\Theta\sin m\Theta d\Theta = \frac{m}{2h} e^{-h(x^2+y^2)} J_m(2hxy).$$

Legyen (IV)-ben $f(\sigma) = \sigma^k e^{-h\sigma^2}$, akkor

$$x^n y^n \int_0^{\pi} e^{-hR^2} C_m^{(n)}(\cos\Theta)\sin^{2n}\Theta d\Theta =$$

$$= \frac{\pi\Gamma(2n+m)}{2^{2n}h^{n-1}m!\,\Gamma(n)}\int_0^{\infty} sJ_{m+n}(sx) J_{m+n}(sy) e^{-\frac{s^2}{4h}} ds.$$

Figyelembevéve az imént felhasznált tételt, a következő eredményt kapjuk

$$x^n y^n \int_0^{\pi} e^{-h(x^2+y^2-2xy\cos\Theta)} C_m^{(n)}(\cos\Theta)\sin^{2n}\Theta d\Theta =$$

$$= \frac{\pi\Gamma(2n+m)}{2^{2n-1}h^n m!\,\Gamma(n)} e^{-h(x^2+y^2)} J_{m+n}(2hxy).$$

Ha viszont $f(\sigma) = \sigma^{q-1}$ $\left(-(n+1) < q < \frac{1}{2}\right)$, akkor felhasználva *Hankel*-nak már idézett tételét, IV. azt adja, hogy

$$x^n y^n \int_0^{\pi} \frac{1}{R^{n-q+1}} C_m^{(n)}(\cos\Theta)\sin^{2n}\Theta d\Theta =$$

$$= \frac{\pi\Gamma(2n+m)}{2^{n-1}m!\,\Gamma(n)} 2^q \frac{\Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{s^{n+q}} J_{m+n}(sx) J_{m+n}(sy) ds.$$

Erre megint alkalmazzuk *Sonine* és *Schafheitlin* tételeit, ezt kapjuk, hogy

$$x^n y^n \int_0^\pi \frac{C_m^{(n)}(\cos\Theta)\sin^{2n}\Theta d\Theta}{(x^2+y^2-2xy\cos\Theta)^{\frac{n-q-1}{2}}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi\Gamma(2n+m)\, x^{n+m}\Gamma\left(\frac{n+2m-q+1}{2}\right)}{2^{2n-1}m!\,\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right) y^{m-q+1}\Gamma(m+n+1)} \cdot \\ \cdot {}_2F_1\left(\frac{2m+n-q+1}{2}, \frac{-n-q+1}{2}, m+n+1, \frac{x^2}{y^2}\right), \text{ ha } 0 < x < y \\ \dfrac{\pi\Gamma(2n+m)}{2^{2n-1}m!\,\Gamma(n)} \dfrac{x^{n+q-1}\Gamma(n+q)\Gamma\left(\frac{n+2m-q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3n+2m+q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)} \\ \text{ha } x = y > 0 \\ \dfrac{\pi\Gamma(2n+m)}{2^{2n-1}m!\,\Gamma(n)} \dfrac{y^{n+m}\Gamma\left(\frac{n+2m-q+1}{2}\right)}{x^{m-q+1}\Gamma(n+m+1)\Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)} \cdot \\ \cdot {}_2F_1\left(\frac{n+2m-q+1}{2}, \frac{-n-q+1}{2}, n+m+1, \frac{y^2}{x^2}\right) \\ \text{ha } 0 < y < x \end{cases}$$

Különösen figyelemreméltó formulát kapunk, ha $q = 0$ és $n = 1$, ekkor

$$xy \int_0^\pi \frac{C_m^{(1)}(\cos\Theta)\sin^2\Theta\, d\Theta}{x^2+y^2-2xy\cos\Theta} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi\Gamma(m+2)}{m!} \dfrac{1}{2(m+1)} \left(\dfrac{y}{x}\right)^{m+1} & \text{ha } 0 < y < x \\ \dfrac{\pi\Gamma(m+2)}{m!} \dfrac{1}{2(m+1)} \left(\dfrac{x}{y}\right)^{m+1} & \text{ha } 0 < x < y, \end{cases}$$

De

$$C_m^{(1)}(\cos\Theta) = \frac{\sin(m+1)\Theta}{\sin\Theta}, \text{ ezért}$$

$$\frac{xy}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(m+1)\Theta\sin\Theta d\Theta}{x^2+y^2-2xy\cos\Theta} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{m+1} & \text{ha } 0 \leq y \leq x \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{m+1} & \text{ha } 0 \leq x < y \\ & m > 0 \end{cases}$$

Érdemes még kitérni az $m = 0$ esetre. Ekkot t. i.

$C_0^n(\cos\Theta) \equiv 1$, így

$$\frac{x^n y^n}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\Theta}{R^{n-q+1}}\,d\Theta = \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}\,2^q\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)}\cdot$$

$$\cdot\begin{cases} \dfrac{x^n\Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)}{2^{n+q}y^{-q+1}\Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right)\Gamma(n+1)}\cdot {}_2F_1\left(\dfrac{n-q+1}{2}, \dfrac{-n-q+1}{2}, n+1, \dfrac{x^2}{y^2}\right) & \text{ha } x < y \\[2ex] \dfrac{x^{n+q-1}\Gamma(n+q)\Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)}{2^{n+q}\Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3n+q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right)} & \text{ha } y < x. \end{cases}$$

IRODALOM

[1] *C. Agostinelli:* Sopra alcuni integrali delle funzioni cilindriche. Boll. della unione Matematica Italiana II. ser. IV. 1942. 25. o.

[2] *K. Graf:* Math. Ann. XLIII. 1893. 142. o. 1. pl. *G. N. Watson:* A treatise on the Theory of Bessel-functions. 1952. 361. o.

[3] *N. Sonine:* Recherches sur les fonct. cylindriques... Math. Ann.: XVI. 1880. 35. o.

[4] *C. Agostinelli:* l. cit. 26. o. (2) képlet.

[5] *H. Hankel:* Bestimmte Integrale mit Cylinderfunctionen. Math. Ann. VIII. 1875. 468. (16) képlet.

[6] *L. Watson:* l. cit. 406. o.

[7] l. *Watson* l. cit. 406. o.

[8] *C. Agostinelli:* l. cit. 27. o.

[9] *D. Bierens de Haan:* Nouvelles tables d'integrales définies. Amsterdam, 1867. 67.

[10] *D. Bierens de Haan:* l. cit. 41. o.

[11] l. pl. *Magnus—Oberbettinger:* Formeln und Sätze für die speziellen Functionen der Mathematischen Physik. 1948. 49 o.

[12] *N. Sonine:* l. cit. 45. o.

[13] *C. Agostinelli:* l. cit. 27. o.

[14] *Magnus—Oberhettinger:* l. cit. 46. o.

[15] *Watson:* l. i. m. 363. o.

[16] И. М. Рыжик. — И. С. Градштейн: Таблицы 1951. 257. 4. 436

О НЕКОТОРЫХ СЛЕДСТВИЯХ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

И. Феньe[1]

Резюме

В работе даётся обобщение интегральной формулы Агостинелли, относящейся к коэффициентам Фурье некоторых функций.

Выведенные формулы приводят к новому доказательству ряда интегральных теорем, относящихся к Бесселевым функциям. Одна из таких формул дает интегральное представление гипергеометрических функций при помощи Бесселевых функций. Работа содержит дальнейшее обобщение теоремы Августинелли, состоящее в выведении формулы не для обыкновенных коэффициентов Фурье исследуемой Агостинелли функции, а для коэффициентов Фурье, взятых по функциям Гегенбауера.

Специальные случаи этой формулы пригодны для вывода многих соотношений, относящихся к Бесселевым функциям, между прочим для получения интегрального представления Бесселевых функций второго рода с помощью функций Гегенбауера.

EINIGE FOLGERUNGEN AUS DEM ADDITIONSATZ FÜR ZYLINDERFUNKTIONEN

ST. FENYŐ

Zusammenfassung

Die Abhandlung verallgemeinert eine Integralformel von C. Agostinelli, die sich auf die Fourier-Koeffizienten gewisser Funktionen bezieht. Die abgeleiteten Formeln verhelfen zu einer neuen Beweisführung zahlreicher, sich auf die Bessel'schen Funktionen beziehender Integralsätze und führen zu einigen anscheinend neuen Zusammenhängen dieser Funktionen. Mit Hilfe der Bessel'schen Funktionen ergibt eine dieser Formeln eine anscheinend neueIntegraldarstellung der konfluenten hypergeometrischen Funktionen.

Die Arbeit enthält eine weitere Verallgemeinerung des Agostinellischen Satzes, indem eine Formel nicht für die gewöhnlichen Fourierkoeffizienten, sondern für die Koeffizienten der nach den Gegenbauer'schen Funktionen fortschreitenden Fourierreihe der von Augustinelli betrachteten Funktion abgeleitet wird. Die Spezialfälle dieser Formel eignen sich zur Ableitung zahlreicher Sätze über Bessel'sche Funktionen. So ergibt sich z. B. eine Integraldarstellung der Bessel'schen Funktionen zweiter Gattung durch Gegenbauer'sche Funktionen.