

PÉLDÁK SZIMMETRIKUS FÜGGVÉNYKAPCSOLATOKNAK PONTMEZŐS NOMOGRAMMOKKAL VALÓ ÁBRÁZOLÁSÁRA

PÁL SÁNDOR és TÓTH KÁROLY

Összefoglalás

A cikk általános részében a z_1 és z_2 változóiban szimmetrikus

$$\begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{340} & G_{340} & H_{340} \end{vmatrix} = 0$$

alakú ötváltozós függvénykapcsolatok nomografikus ábrázolásával foglalkozik, ahol a determináns 3-ik sorának elemei a z_1 és z_2 -től függő f_{34} , g_{34} , h_{34} függvények lineáris kombinációi, z_0 -tól függő együtthatókkal. Speciális esetként adódik ebből a Clark-féléhez hasonló szerkezetű

$$F_{340} f_{10} f_{20} + G_{340} (f_{10} + f_{20}) + H_{340} = 0$$

alakú általánosabb függvénykapcsolat, amely olyan nomogrammal ábrázolható, melyben a z_1 és z_2 változók közös skálatartója a (z_1, z_0) illetve a (z_2, z_0) pontmezőt definiáló egyik görbesereg, a z_3 és z_4 változókat egy (z_3, z_4) pontmező ábrázolja.

Foglalkozik továbbá

$$\begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{30} & G_{30} & H_{30} \end{vmatrix} = 0$$

alakú négyváltozós, z_1 és z_2 változóiban szimmetrikus függvénykapcsolatokkal, ahol F_{30} , G_{30} , H_{30} a z_3 változó f_3 és g_3 függvényeinek lineáris kombinációja, z_0 -tól függő együtthatókkal.

Ez utóbbi kapcsolat esetén a nomogramun igen általános, nem projektív, illetőleg csak az egyes $z_0 =$ állandó görbékre nézve projektív transzformációt is megenged.

A transzformáció alkalmazására a cikk két — az Intézet gyakorlatából vett — példát mutat be.

Gyakori eset függvénykapcsolatok nomografikus ábrázolásánál, hogy a kapcsolat két változóban mutatkozó szimmetriája az ábrázolás szempontjából előnyt jelent. Legismertebb példa erre a Clark-féle nomogramm, ahol ez a szimmetria lehetővé teszi két változónak közös skálatartón való ábrázolását, vagyis végeredményben két különböző skála egybeesését. De találhatók a közös skálatartó alkalmazásának más példái is [1]. M. V. Pentkovszkij nomográfiai tankönyvében (magyarázó szöveg nélkül) közöl [2] egy meglehetősen bonyolult szimmetrikus függvénykapcsolat ábrázolására szolgáló nomogram-

mot, melynél a közös skálatartó a nomogramrhoz tartozó pontmezőt definiáló egyik görbesereg. Ebben a cikkben két példa kapcsán megmutatjuk, hogy a közös skálatartó alkalmazása szimmetrikus kapcsolatok esetén különösen gyümölcsöző akkor, ha az ábrázolandó függvénykapcsolatnál két változó skálája az idézett nomogramrhoz hasonlóan egy pontmező egyik görbeseregén ejthető egybe. Ezáltal nemcsak az egy skála megtakarításának kis előnye jelentkezik, hanem ezenfelül lehetővé válik újabb, nagyon általános függvénykapcsolatok ábrázolása és gyakran — mint pl. a jelen cikk két példájánál is — a nomogramm átalakításában sokkal nagyobb szabadságunk van, mint a szokásos nem szimmetrikus kapcsolatok esetén.

1. §. Ötváltozós szimmetrikus kapcsolatok

Tekintsük a következő hatodrendű függvénykapcsolatot :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ F_{34} & G_{34} & H_{34} \end{vmatrix} = 0,$$

ahol f_1, g_1, h_1 a z_1 változó, f_2, g_2, h_2 a z_2 változó, F_{34}, G_{34} és H_{34} pedig a z_3 és z_4 változók tetszőleges függvényei.

Az (1) kapcsolat olyan nomogrammal ábrázolható, melynek két görbe tartójú skálája (z_1 és z_2) és egy pontmezőben egyesített z_3 és z_4 skálája van.

(1) kapcsolat z_1 és z_2 változóiban szimmetrikus, ha

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv f(z_1), & g_1 &\equiv g(z_1), & h_1 &\equiv h(z_1), \\ f_2 &\equiv f(z_2), & g_2 &\equiv g(z_2), & h_2 &\equiv h(z_2). \end{aligned}$$

Ekkor a z_1 és z_2 görbe tartójú skálák egybeesnek.

Tegyük fel, hogy az (1)-ben szereplő függvények a z_1, z_2, z_3, z_4 változókon kívül még egy z_0 paramétertől is függenek, azaz foglalkozunk az

$$(2) \quad \begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{340} & G_{340} & H_{340} \end{vmatrix} = 0$$

alakú kapcsolatokkal, ahol

$$\begin{aligned} f_{10} &\equiv f(z_1, z_0), & f_{20} &\equiv f(z_2, z_0), \\ g_{10} &\equiv g(z_1, z_0), & g_{20} &\equiv g(z_2, z_0), \\ h_{10} &\equiv h(z_1, z_0), & h_{20} &\equiv h(z_2, z_0), \end{aligned}$$

továbbá legyen

$$\begin{aligned} F_{340} &= \varphi_0^{(1)} f_{34} + \psi_0^{(1)} g_{34} + \chi_0^{(1)} h_{34}, \\ G_{340} &= \varphi_0^{(2)} f_{34} + \psi_0^{(2)} g_{34} + \chi_0^{(2)} h_{34}, \\ H_{340} &= \varphi_0^{(3)} f_{34} + \psi_0^{(3)} g_{34} + \chi_0^{(3)} h_{34}. \end{aligned} \quad (3)$$

A (2) kapcsolat nomogrammal való ábrázolása szempontjából mértékadó a

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0^{(1)} & \psi_0^{(1)} & \chi_0^{(1)} \\ \varphi_0^{(2)} & \psi_0^{(2)} & \chi_0^{(2)} \\ \varphi_0^{(3)} & \psi_0^{(3)} & \chi_0^{(3)} \end{vmatrix}$$

determináns.

a) *eset.* Ha F_{340} , G_{340} , H_{340} lineárisan függetlenek, azaz $\Delta \neq 0$, akkor a (2) egyenlet az oszlopok alkalmasan választott kombinációjával

$$(4) \quad \begin{vmatrix} f_{10}^* & g_{10}^* & h_{10}^* \\ f_{20}^* & g_{20}^* & h_{20}^* \\ f_{34} & g_{34} & h_{34} \end{vmatrix} = 0$$

alakra hozható. Itt tehát a harmadik sor a z_0 változót nem tartalmazza. A nomogramm skálái a következő formulákkal adhatók meg:

A z_1 és z_0 változókat reprezentáló pontmező egyenletrendszere

$$x = \frac{f_{10}^*}{h_{10}^*}, \quad y = \frac{g_{10}^*}{h_{10}^*}.$$

Az 1. és 2. változók szimmetriájából következik, hogy a (z_1, z_0) és (z_2, z_0) pontmező egybeesik.

A z_3 és z_4 változókhoz tartozó pontmező egyenletrendszere:

$$x = \frac{f_{34}}{h_{34}}, \quad y = \frac{g_{34}}{h_{34}}.$$

(v. ö. 1. ábra.)

A (2) egyenletben szereplő függvények speciális választásával a Clark-féléhez hasonló szerkezetű, annál általánosabb függvénykapcsolatok ábrázolására jutunk. Ugyanis a Clark-féle kapcsolatok ábrázolásánál alkalmazott eljárásához hasonlóan az

$$(5) \quad F_{340} f_{10} f_{20} + G_{340} (f_{10} + f_{20}) + H_{340} = 0$$

kapcsolat, ahol az egyenletben szereplő függvény-szimbolumok jelentése ugyanaz, mint (2)-ben, $f_{10} - f_{20}$ -al való szorzással

$$\begin{vmatrix} 1 & -f_{10} & f_{10}^2 \\ 1 & -f_{20} & f_{20}^2 \\ F_{340} & G_{340} & H_{340} \end{vmatrix} = 0$$

alakra hozható, amely (2) speciális esete.

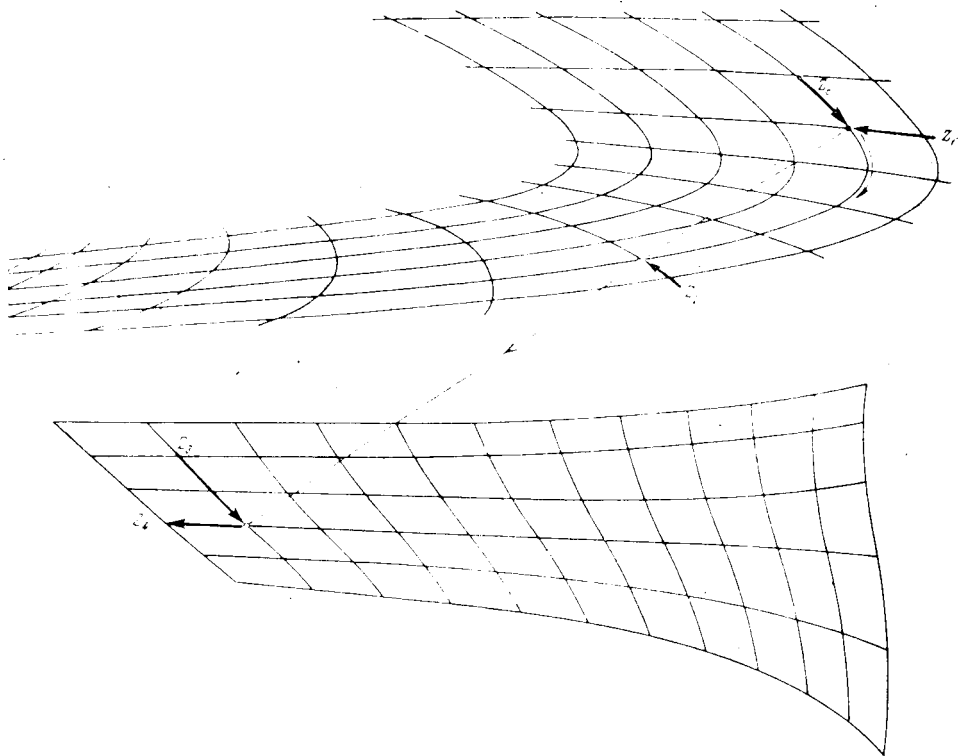
b) eset. Ha az F_{340} , G_{340} , H_{340} formák lineárisan összefüggnek, tehát ha $\Delta \equiv 0$, azok a következő alakban írhatók fel:

$$F_{340} = \varphi_0^{(1)} f_{34} + \psi_0^{(1)} g_{34},$$

$$G_{340} = \varphi_0^{(2)} f_{34} + \psi_0^{(2)} g_{34},$$

$$H_{340} = \varphi_0^{(3)} f_{34} + \psi_0^{(3)} g_{34},$$

vagyis a (2) kapcsolat homogén lineáris az f_{34} és g_{34} függvényekben. Következésképpen a (z_3, z_4) pontmező pontsorra degenerálódik. Az ilyen kapcsolat ábrázolása nem oldható meg nomogrammkapcsolás nélkül.



1. ábra

2. §. Négyváltozós szimmetrikus kapcsolatok

Foglalkozzunk ezután olyan (2)-höz hasonló alakú kapcsolatokkal, amelyekben a determináns harmadik sorának elemei z_0 -n kívül csak egy z_3 változó függvényei. Legyen tehát az ábrázolandó kapcsolat

$$(6) \quad \begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{30} & G_{30} & H_{30} \end{vmatrix} = 0,$$

ahol $f_{10}, g_{10}, h_{10}; f_{20}, g_{20}, h_{20}$ értelmezése az 1. §. szerinti, és

$$(7) \quad \begin{cases} F_{30} = \varphi_0^{(1)} f_3 + \psi_0^{(1)} g_3, \\ G_{30} = \varphi_0^{(2)} f_3 + \psi_0^{(2)} g_3, \\ H_{30} = \varphi_0^{(3)} f_3 + \psi_0^{(3)} g_3. \end{cases}$$

Feltehetjük, hogy itt F_{30}, G_{30}, H_{30} között van két lineárisan független forma. Ellenkező esetben ugyanis a kapcsolat háromváltozósra redukálnánk. (6)-nak speciális esete az (5) mintájára nyerhető

$$(8) \quad F_{30} f_{10} f_{20} + G_{30} (f_{10} + f_{20}) + H_{30} = 0$$

Clark-szerű kapcsolat.

Az oszlopok alkalmasan választott lineáris kombinációjával a (6) egyenlet (végtelen sokféléképp)

$$(9) \quad \begin{vmatrix} f_{10}^* & g_{10}^* & h_{10}^* \\ f_{20}^* & g_{20}^* & h_{20}^* \\ f_3 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

alakra hozható.

A (9) alakban felírt kapcsolat olyan nomogrammal ábrázolható, melynek skáláit a következő egyenletek adják:

A z_1 és z_0 változókhoz tartozó pontmező egyenletrendszere:

$$(10a) \quad x = \frac{f_{10}^*}{g_{10}^*}, \quad y = \frac{h_{10}^*}{g_{10}^*}.$$

A z_1 és z_2 változókra vonatkozó szimmetriából következik, hogy a (z_1, z_0) és (z_2, z_0) pontmező egybeesik.

A z_3 skála az x -tengelyen helyezkedik el:

$$(10b) \quad x = \frac{f_3}{g_3}, \quad y = 0.$$

Nyilvánvalóan az a kikötés, hogy (9) determináns 3. sora z_0 -tól független legyen, nem határozza meg egyértelműen a (6) determináns oszlopaira alkalmazható lineáris transzformációt. Következésképp lehetséges a nomogramm olyan egész általános transzformációja, amely csak az egyes $z_0 = \text{áll.}$ görbékre nézve projektív. Bontsuk fel ugyanis a (10) egyenletekkel megadott nomogramot olyan résznomogrammokra, melyek mindegyike a (közös) z_3 -skálából és egy-egy z_0 -értékhez tartozó (z_1, z_2) (görbe) skálából áll. Alkalmazzunk a résznomogrammokra olyan — egymástól független — projektív transzformációkat, melyek a z_3 egyenes skálát változtatlanul hagyják, és utána újból egyéssítsük a kapott résznomogrammokat. Nyilvánvaló, hogy ez az átalakítás a nomogrammot nem rontja el.

Ez a (9) kapcsolatnak következő átalakításával egyenértékű:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} f_{10}^* + p_0 h_{10}^* & g_{10}^* + q_0 h_{10}^* & r_0 h_{10}^* \\ f_{20}^* + p_0 h_{20}^* & g_{20}^* + q_0 h_{20}^* & r_0 h_{20}^* \\ f_3 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

p_0, q_0 és r_0 a z_0 változó tetszőszerinti függvényei. A skálák egyenletei a következők lehetnek:

A (z_1, z_0) [együttal (z_2, z_0)] pontmezőé

$$(12a) \quad x' = \frac{f_{10}^* + p_0 h_{10}^*}{g_{10}^* + q_0 h_{10}^*} = \frac{x + p_0 y}{1 + q_0 y}, \quad y' = \frac{r_0 h_{10}^*}{g_{10}^* + q_0 h_{10}^*} = \frac{r_0 y}{1 + q_0 y},$$

a z_3 -skáláé

$$(12b) \quad x' = \frac{f_3}{g_3} = x, \quad y' = 0.$$

A p_0, q_0, r_0 függvények szabad választása miatt ez a transzformáció a nomogramm igen általános átalakítását teszi lehetővé. Így az alábbi 1. példában a (z_1, z_0) pontmező a síkot eredetileg kétrétűen fedi. A transzformációval elérhető a sík egyrétű lefedése.

Transzformációnk a z_3 -skálát változatlanul hagyja. Természetesen a (12) egyenletek alapján eredményül kapott nomogramm a sík projektív transzformációjával is átalakítható, s ezúton a z_3 -skála is változtatható.

Megjegyzés: (9) az

$$\frac{f_{10}^*}{h_{10}^*} = \Phi_{10}, \quad \frac{f_{20}^*}{h_{20}^*} = \Phi_{20},$$

$$\frac{g_{10}^*}{h_{10}^*} = \Psi_{10}, \quad \frac{g_{20}^*}{h_{20}^*} = \Psi_{20},$$

$$\frac{f_3}{g_3} = \chi_3$$

jelölésekkel a

$$(13) \quad \chi_3 = \frac{\Phi_{10} - \Phi_{20}}{\Psi_{10} - \Psi_{20}}$$

alakra hozható, mely a Soreau-féle, ötödrendű függvénykapcsolat egy általánosítása.

Példák

A tárgyalt eljárás alkalmazását két gyakorlati példán mutatjuk be.

I. A Villamosipari Központi Kutató Laboratórium (VKKL) a higanygőz-egyenirányítók kapcsolatos kísérleti munkája során felmerült következő probléma megoldására kérte fel Intézetünket:

Rácsvezérlésű egyenirányítóról táplált áramkörben folyó áram pillanatértéke az anódfeszültségtől, az áramkörben lévő ellenelektromotoros erőttől (pl. e. á. motor), az áramkör impedanciájától, a fázisok számától és az egyenirányító gyújtási szögétől függ. Az áram pillanatértékét pulzáló áram esetén

$$t = \frac{1}{\omega} \xi \text{ időben } (0 \leq \xi \leq 2\pi)$$

$$(14) \quad i(\xi, \xi_f, \varphi, a) =$$

$$= \frac{\sqrt{2} E}{R} \left\{ \cos \varphi \sin(\xi - \varphi) - a + [a - \cos \varphi \sin(\xi_f - \varphi)] e^{-\frac{\xi - \xi_f}{\tau \varphi}} \right\}$$

egyenlet szolgáltatja [3], ahol

ω a körfrekvencia,

E az anódfeszültség eff. értéke,

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} \text{ a fázisszög } \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

$\omega L, R$ az áramkör induktív, ill. ohmos ellenállása,

ξ_f a gyújtási szög ($0 \leq \xi_f \leq \xi$),

$$a = \frac{E_g + E_0}{\sqrt{2} E} \quad (0 \leq a \leq 1), \text{ ahol}$$

E_g az egyenáramú körbe kapcsolt ellenelektromotoros erő,

E_0 az ívfeszültség.

Nomogramm készítendő a ξ_s kialvási szög leolvasására.

Ha $\xi = \xi_s$, akkor az áramerősség pillanatértéke 0, tehát ξ_s meghatározására az

$$(15) \quad i(\xi_f, \xi_s, \varphi, a) = 0$$

egyenletet nyerjük.

A (15) egyenlet megoldására *Puchlowsky* [4] görbesereges nomogrammot közöl. Mivel azonban a (15) kapcsolat négyváltozós, következésképp a sereg egyes görbéinek jellemzéséhez két paraméter (φ és a) szükséges, az összefüggésnek a (kétdimenziós) síkon való ilyen ábrázolása nehézkes és áttekinthetetlen nomogrammot ad.

A kapcsolat szimmetriájának kihasználásával sikerült nekünk a (15) kapcsolatnak jól áttekinthető és kényelmesen használható pontmezős nomogrammal való ábrázolása.

Egyenletünket $\frac{\sqrt{2} E}{R}$ -rel való egyszerűsítés után $e^{\xi_s \cotg \varphi}$ -vel végigszorozva ugyanis az

$$(16) \quad a = \frac{\cos \varphi \sin(\xi_f - \varphi) e^{\xi_f \cotg \varphi} - \cos \varphi \sin(\xi_s - \varphi) e^{\xi_s \cotg \varphi}}{e^{\xi_f \cotg \varphi} - e^{\xi_s \cotg \varphi}}$$

kapcsolathoz jutunk. Ez (13) alakú kapcsolat.

A jelölések összevetéséből

$$z_1 = \xi_f, z_2 = \xi_s, z_3 = a, z_0 = \varphi,$$

és $h_{10}^* = h_{20}^* = g_3 = 1$ -et véve:

$$\Phi_{10} = f_{10}^* = \cos \varphi \sin (\xi_f - \varphi) e^{\xi_f \cotg \varphi},$$

$$\Psi_{10} = g_{10}^* = e^{\xi_f \cotg \varphi},$$

$$\Phi_{20} = f_{20}^* = \cos \varphi \sin (\xi_s - \varphi) e^{\xi_s \cotg \varphi},$$

$$\Psi_{20} = g_{20}^* = e^{\xi_s \cotg \varphi}.$$

A (9) determináns matrixának ezen felvételével nyerhető nomogrammalak skálaegyenletei (10) szerint a következők:

A ξ_f (illetőleg ξ_s) és φ változók skáláit tartalmazó pontmező:

$$(17) \quad \begin{aligned} x &= \cos \varphi \sin (\xi - \varphi), \\ y &= e^{-\xi \cotg \varphi}, \end{aligned}$$

a skála:

$$x = a, y = 0.$$

(V. ö. 2. ábra.)

Sajnos azonban a (17) egyenletek alapján ξ és φ az x, y számpárnak nem egyértékű függvénye, tehát a sík (x, y) pontjához általában nem egy (ξ, φ) értékpár tartozik. A (ξ, φ) pontmező tehát nem egyrétűen borítja az (x, y) síkot. Így pl. $\xi = 0$ esetében

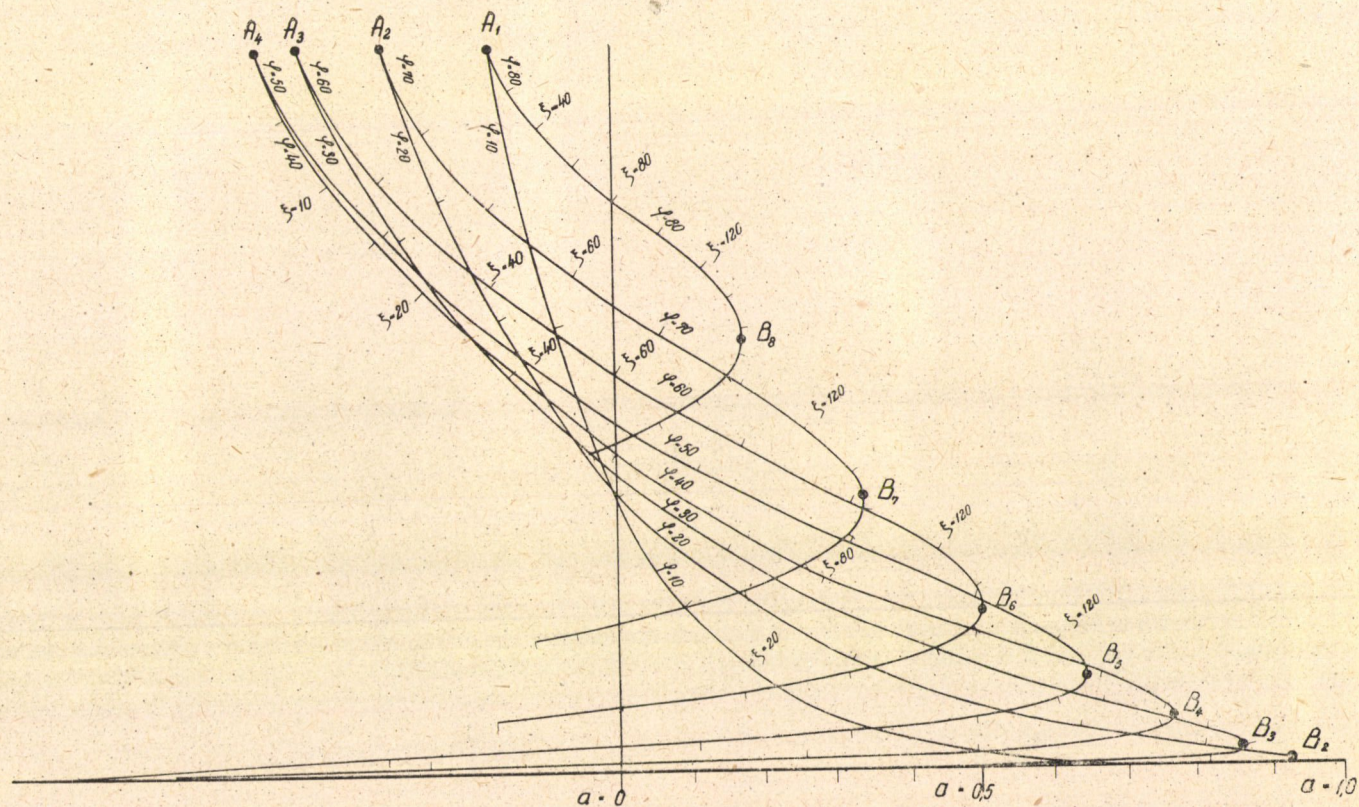
$$x = -\frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad y = 1.$$

Ennélfogva az $y = 1$ egyenes minden $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ pontjához két (ξ, φ) értékpár tartozik. A $\xi =$ állandó görbék metszése teljesen áttekinthetatlenné tenné a nomogrammot. Ennek elkerülésére vessük alá a nomogrammmunkat olyan transzformációnak, amely az egyes $\xi =$ állandó görbékre projektív, de az egész síkra nézve nem. Alkalmazzunk tehát a nomogrammról valamilyen a (12a) és (12b) egyenletek szerinti transzformációt. Az együtthatók meghatározására három feltételt írhatunk elő. A (ξ, φ) pontmező egyrétűségének és a nomogramm kedvező alakjának biztosítására a következő kikötéseket tettük (l. 2. ábra):

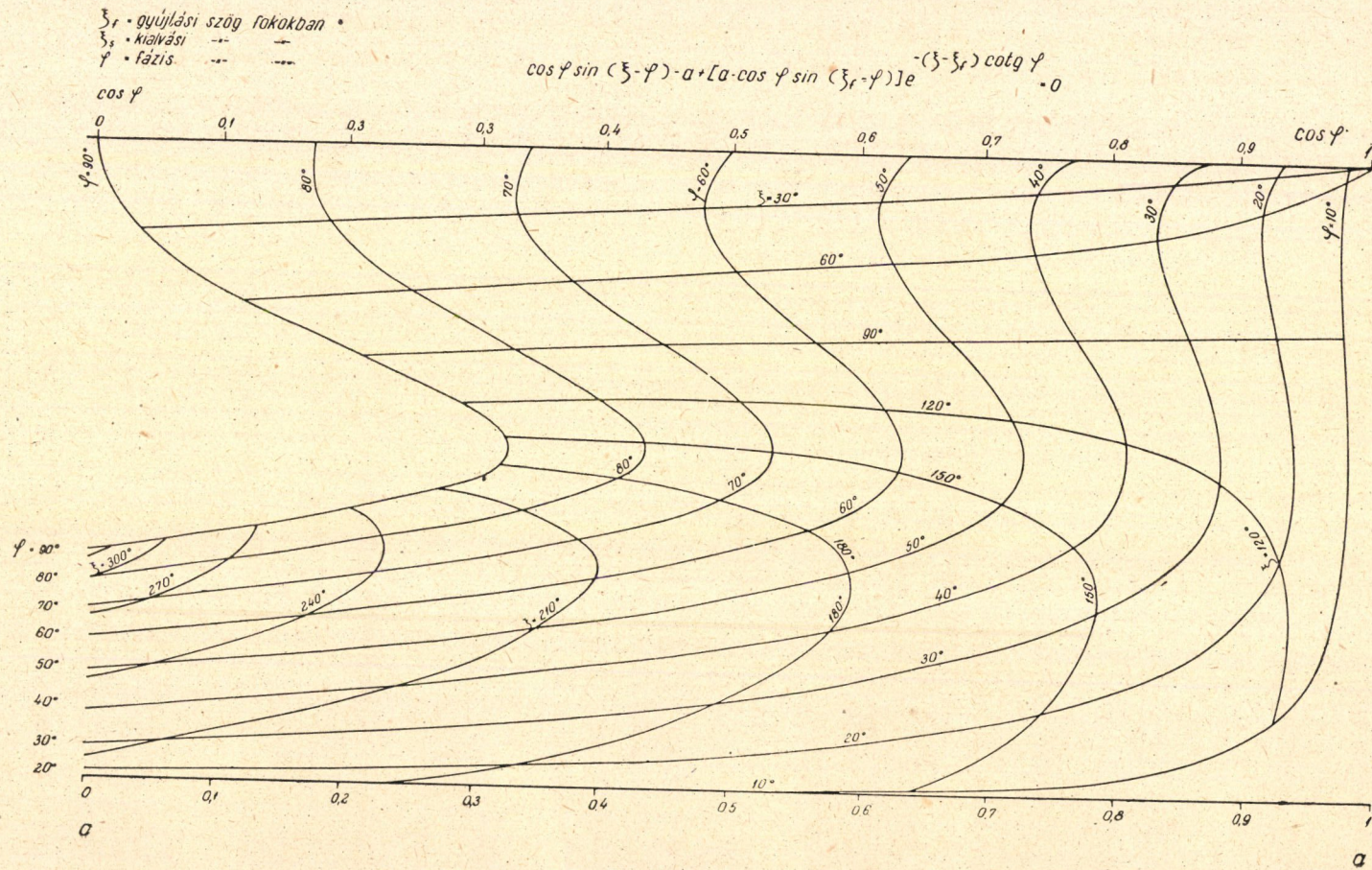
1. A $\varphi =$ áll. görbék $A_1, A_2, A_3, \dots$ végpontjainak koordinátái a transzformáció után legyenek

$$x' = \cos \varphi, y' = 1.$$

2. Az eredeti $\varphi =$ állandó görbék $B_1, B_2, B_3, \dots$ pontjai, melyekhez tartozó x -érték az egyes görbékre nézve maximális, transzformáltassanak az



2. ábra



3. ábra

$y' = \frac{1}{2}$ egyenes pontjaiba. (Itt tehát a képpontoknak csak az ordinátáit írjuk elő.) Az így kapott egyenletrendszerből rövid számolással adódnak a következő együtthatók:

$$\begin{aligned}p_0 &= \cos \varphi (e^\alpha - 1 + \sin \varphi), \\q_0 &= e^\alpha - 2, \\r_0 &= e^\alpha - 1,\end{aligned}$$

ahol

$$\alpha = \frac{\frac{\pi}{2} + \varphi}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Ezen együtthatók által meghatározott transzformációval sikerült elérni, hogy a nomogramm az egységnyi oldalú négyzet belsejébe essék és azt jól kitöltse, továbbá, hogy a $\varphi =$ állandó görbék ne messék egymást.

Az így kapott nomogramm affin transzformációval megfelelő méretre hozható. (l. 3. ábra.)

II. A Beloianniszy-gyár átviteltechnikai osztálya kristálysűrűk számításánál az egyik alkalmazott kapacitás méretezésére a következő összefüggést nyerte:

$$\begin{aligned}C_1 &= \\&= C_N \frac{1 + \beta^{-2} \left[\beta \left(\sqrt{\frac{\Omega_1^2 \beta^2 - 1}{\Omega_1^2 - \beta^2}} + \sqrt{\frac{\Omega_2^2 \beta^2 - 1}{\Omega_2^2 - \beta^2}} \right) + \sqrt{\frac{\Omega_1^2 \beta^2 - 1}{\Omega_1^2 - \beta^2}} \sqrt{\frac{\Omega_2^2 \beta^2 - 1}{\Omega_2^2 - \beta^2}} \right]}{1 + \beta^{-2} \left[\beta^3 \left(\sqrt{\frac{\Omega_1^2 \beta^2 - 1}{\Omega_1^2 - \beta^2}} + \sqrt{\frac{\Omega_2^2 \beta^2 - 1}{\Omega_2^2 - \beta^2}} \right) + \sqrt{\frac{\Omega_1^2 \beta^2 - 1}{\Omega_1^2 - \beta^2}} \sqrt{\frac{\Omega_2^2 \beta^2 - 1}{\Omega_2^2 - \beta^2}} \right]},\end{aligned}$$

ahol C_1 a méretezendő kapacitás,

$$C_N = \frac{10^9}{L_N \omega_0^2}, \quad \text{itt}$$

L_N a szűrőhöz tartozó tekercs önindukciója mHy-ban,

ω_0 a sávközép körfrekvenciája, $10^3 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ -ban;

β^2 a sávszűrő felső és alsó frekvenciahatárának viszonya,

Ω_1 és Ω_2 pólusfrekvenciák.

Tekintsük $\frac{C_I}{C_N}$ -et változónak és redukáljuk 0-ra a függvénykapcsolatot:

$$(18) \quad \Gamma_1 \Gamma_2 \left(\frac{C_I}{C_N} - 1 \right) \beta^3 + (\Gamma_1 + \Gamma_2) \left(\frac{C_I}{C_N} - \beta^4 \right) + \left(\frac{C_I}{C_N} - 1 \right) \beta^5 = 0,$$

ahol

$$\Gamma_1 = \Gamma_1(\Omega_1, \beta) = \sqrt{\frac{\Omega_1^2 \beta^2 - 1}{\Omega_1^2 - \beta^2}}, \quad \Gamma_2 = \Gamma_2(\Omega_2, \beta) = \sqrt{\frac{\Omega_2^2 \beta^2 - 1}{\Omega_2^2 - \beta^2}}.$$

(18) egyenletünk

$$(19) \quad \begin{vmatrix} 1 & -\Gamma_1 & \Gamma_1^2 \\ 1 & -\Gamma_2 & \Gamma_2^2 \\ \left(\frac{C_I}{C_N} - 1\right) \beta^3 & \frac{C_I}{C_N} - \beta^4 & \left(\frac{C_I}{C_N} - 1\right) \beta^5 \end{vmatrix} = 0$$

alakra hozható.

A determináns oszlopait jelöljük rendre az I, II, III szimbolumokkal és $-\beta$ -nak a determináns harmadik sorából való kiküszöbölése céljából — hajtsuk végre a determináns matrixán az

$$\begin{aligned} I^* &= \beta I - II, \\ II^* &= \beta^{-3} I - II; \\ III^* &= -\beta^2 I + III \end{aligned}$$

szimbolikus egyenletekkel meghatározott transzformációt. A 3. sornak $(\beta^4 - 1)$ -gyel való elosztása után ($\beta \neq 1$) a (19) egyenlet a következőképpen írható:

$$(20) \quad \begin{vmatrix} \Gamma_1 + \beta & \Gamma_1 + \beta^{-3} & \Gamma_1^2 - \beta^2 \\ \Gamma_2 + \beta & \Gamma_2 + \beta^{-3} & \Gamma_2^2 - \beta^2 \\ \frac{C_I}{C_N} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

A nomogrammskálákat megadó egyenletek a (20) egyenletben szereplő determináns matrixából leolvashatók.

1. A (β, Ω_i) pontmezőt jellemző egyenletek:

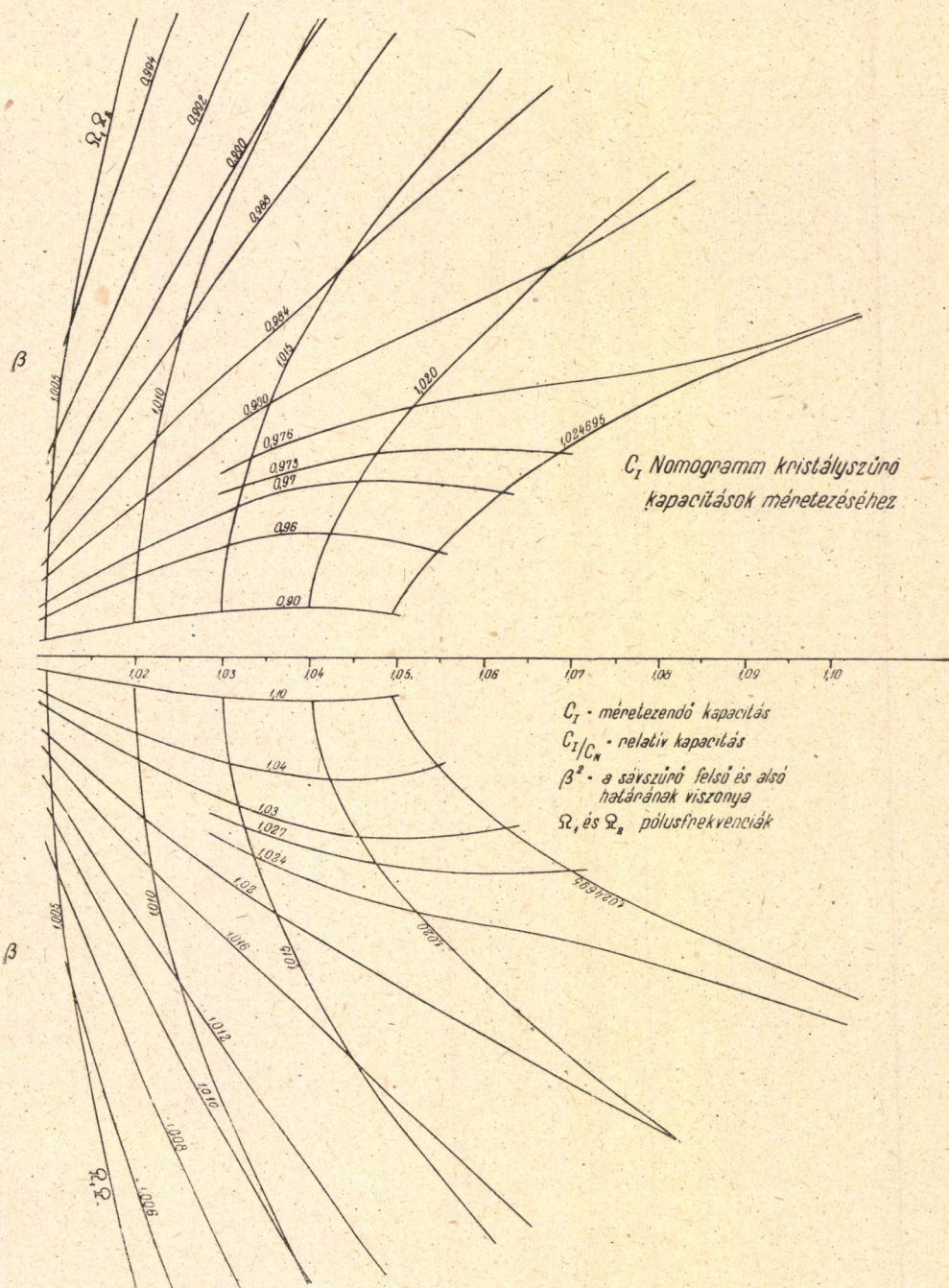
$$x = \frac{\Gamma_i + \beta}{\Gamma_i + \beta^{-3}}, \quad y = \frac{\Gamma_i^2 - \beta^2}{\Gamma_i + \beta^{-3}}, \quad (i = 1, 2).$$

2. A $\frac{C_I}{C_N}$ skála:

$$x = \frac{C_I}{C_N}, \quad y = 0.$$

Alkalmazzuk a (12) transzformációt. Az egyenletekkel meghatározott nomogramm további átalakítására a megelőző példában alkalmazott módszerhez hasonlóan jól használható és tetszetős nomogrammváltozat elérésére megfelelő kikötéseket tettünk. Ezek kielégítésére a (12a) transzformációs formulák együttthatóit a következőképp választottuk:

$$\rho_0 = \frac{1}{2\beta}, \quad q_0 = \frac{1}{2\beta^5}, \quad r_0 = \beta^2.$$



4. ábra

Еzzel elértük, hogy

1. a nomogramm jól kitölt egy téglalapalakú tartományt, és
2. a $\beta = \text{állandó}$ görbeívek végpontjai szimmetrikus helyzetűek a $\frac{C_1}{C_n}$ -skálára.

Ez a szimmetria azért előnyös, mert — mérlegelve a gyakorlatból adódó (β, Ω) értékpárok megoszlását — a (β, Ω) pontmezőnek az eredményskála két oldalán szereplő részei egyenlő gyakorlati súllyal bírnak, másrészt az egyes $\beta = \text{állandó}$ görbéknek az eredményskála vonatkozó szimmetriája a leolvasásnál az éles metszések számát csökkenti.

A nomogrammnak a (10) és (12) egyenletek szerinti transzformációval adódó változata látható a 4. ábrán.

IRODALOM

- [1] R. Soreau: Nomographie ou traité des abaques. Paris 1921. II. köt. 121. nomogramm.
- [2] М. В. Пентковский: Номография, Гостехиздат, 1949. (M. V. Pentkovszkij: Nomográfia) Moszkva, Leningrád, 1949. 2. ábra.
- [3] »Elektrotechnika«, 1952. 7. sz. Rácsvezérlésű egyenirányítókkal táplált egyenáramú motor üzemi viszonyai. (7) összefüggés.
- [4] K. P. Puchlowski: Voltage and Current Relations... (Transactions of the AIEE Vol. 64. 225—260 o.)

ПРИМЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ НОМОГРАММ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК С БИНАРНЫМИ ПОЛЯМИ

Пал Ш. и Тот К.

Резюме

В общей части работы описывается номографическое представление функциональных зависимостей типа

$$\begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{340} & G_{340} & H_{340} \end{vmatrix} = 0.$$

Эта зависимость имеет 5 переменных, и она симметрична b z_1 и z_2 . Элементы 3-ог строка определителя — линейные комбинации функций f_{34} , g_{34} , h_{34} , зависящих от z_3 и z_4 . Коэффициенты этих комбинаций зависят от z_0 . В качестве отдельного случая упомянутой зависимости получается более общая зависимость типа $F_{340} f_{10} f_{20} + G_{340} (f_{10} + f_{20}) + H_{340} = 0$.

Она построена аналогично функциональной зависимости Кларка и может быть представлена номограммой, в которой общим держателем шкал переменных z_1 и z_2 является совокупность кривых, определяющих точечные поля (z_1, z_0) и (z_2, z_0) . Переменные z_3 и z_4 представляются точечным полем (z_3, z_4) .

Дальше в работе исследуются симметричные b z_1 и z_2 , функциональные зависимости типа

$$\begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{30} & G_{30} & H_{30} \end{vmatrix} = 0.$$

Она имеет 4 переменных. F_{30}, G_{30}, H_{30} — линейная комбинация функций f_3 и g_3 переменной z_3 ; коэффициенты комбинации зависят от z_0 .

В случае последней зависимости номограмма допускает некоторое очень общее преобразование, которое не является проективным (т. е. оно проективно только для отдельных кривых $z_0 = \text{const}$).

В качестве применения преобразования работа представит два примера из практики Института.

BEISPIELE FÜR DIE NOMOGRAPHISCHE DARSTELLUNG SYMMETRISCHER FUNKTIONELLER ZUSAMMENHÄNGE MITTELS BINÄREN LEITERTAFELN

S. PÁL UND K. TÓTH

Zusammenfassung

Im allgemeinen Teil des Aufsatzes wird die nomographische Behandlung der in den Veränderlichen z_1 und z_2 symmetrischen funktionellen Zusammenhänge mit fünf Veränderlichen von der Gestalt

$$\begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{340} & G_{340} & H_{340} \end{vmatrix} = 0$$

gegeben. Die Elemente der dritten Zeile der Determinante sind Linearkombinationen der von z_3 und z_4 abhängigen Funktionen f_{34}, g_{34}, h_{34} . Die Koeffizienten der Linearkombinationen hängen von z_0 ab. Als Spezialfall ergibt sich hieraus ein dem Clark'schen ähnlicher allgemeinerer Zusammenhang:

$$F_{340} f_{10} f_{20} + G_{340} (f_{10} + f_{20}) + H_{340} = 0.$$

Dieser lässt sich durch ein Nomogramm darstellen, in welchem der gemeinsame Skalenträger der Veränderlichen z_1 und z_2 die eine der, das Binärfeld (z_1, z_0) , bzw. (z_1, z_2) definierenden, beiden Kurvenscharen ist. Die Veränderlichen z_3 und z_4 werden durch das Binärfeld (z_3, z_4) dargestellt.

Weiter werden symmetrische funktionelle Zusammenhänge mit vier Veränderlichen von der Gestalt

$$\begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{30} & G_{30} & H_{30} \end{vmatrix} = 0$$

behandelt, die in den Veränderlichen z_1 und z_2 symmetrisch sind. Die Funktionen F_{30}, G_{30}, H_{30} sind lineare Kombinationen der Funktionen f_3 und g_3 von z_3 , deren Koeffizienten von z_0 abhängen.

Im letzteren Falle gestattet das Nomogramm sehr allgemeine nicht-projektive (bzw. nur für die einzelnen Kurven $z_0 = \text{Konst.}$ projektive) Transformationen.

Für die Anwendung der Transformation werden zwei Beispiele aus der Praxis des Instituts angeführt.