NOMOGRAMMOK AZ ÁLTALÁNOS HÁROMSZÖG MEGOLDÁSÁHOZ

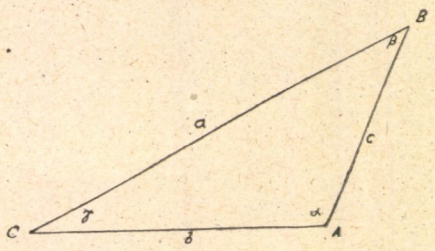
ACZÉL JÁNOS, BÉDA GYULA, GÁTI JÓZSEF és TÖRÖK SÁNDOR

Összefoglalás

Az ábrákon látható használati utasítású összetett, illetve pontmezős, mozgó alkatrészes nomogrammok az általános háromszög ismeretlen adatainak meghatározására szolgálnak, ha adva van egy oldal és két szög vagy két oldal és egy szög. (A II. és egyszerűbben a III. nomogrammról ezen adatoknál is, továbbá a három oldal megadása esetén is valamennyi többi alkotórész nagysága egyidejűleg leolvasható.)

Bevezetés

Az Alkalmazott Matematikai Intézet Numerikus és grafikus módszerek osztályának debreceni csoportja egy megbízással kapcsolatban olyan nomogrammokat készített, amelyek néhol máshol is hasznosak lehetnek az álta-



1. ábra

lános háromszög teljes megoldására azokban az esetekben — és ezek a gyakorlatban legsűrűbben előforduló esetek, — amikor a háromszögből két oldal és egy szög, vagy egy oldal és két szög van megadva.

Az 1. ábrán feltüntetett jelölésű háromszöget tekintjük. A

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma} \tag{1}$$

és az

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \tag{2}$$

összefüggések nomogrammjait készítettük el.

E két összefüggésre összesen húsz nomogrammot terveztünk meg, mivel azonban ezek közül voltak teljesen szokványosak, illetve olyanok is,

melyek egymástól csak lényegtelen módosításokban különböztek, itt csak azt a nyolc nomogrammfajtát ismertetjük, amelyek bizonyos elvi érdekességet is mutatnak. Ezen összefüggésekre az irodalomban is több nomogrammfajta található (pl. [1]. [2], [3]), ezek közül azonban több csak elég szűk határok közt alkalmazható, mások pedig bonyolultabb rajzolási munkát igényelnek, míg mi tág határok közt tűrhető részletességgel használható, továbbá sokszorosításra és helyi előállításra is alkalmas egyszerű rajzú nomogrammokra törekedtünk. Nomogrammjaink pontossága szűkebb határok esetén vetítéssel természetesen lényegesen fokozható.

Az (1) kapcsolat ábrázolásánál rendszerint két esetet kell megkülönböztetni a szerint, hogy α hegyesszög-e vagy tompa. Ezekre külön nomogrammot célszerű készíteni. — Előfordul, hogy a háromszög teljes megoldása egy nomogrammal elvégezhető. Így pl. ha a, c és α vannak adva, akkor ebből a (2) összefüggés alapján γ kiszámítható, $\beta = 180° - \alpha - \gamma$ kiszámítása után pedig ugyanazon nomogramm az α, a változó skáláját megtartva, de

a c változó helyére a b változót,

a γ « « « $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$

változót véve nomogrammot kapunk b kiszámítására is. — Hasonlóan, ha az (1) összefüggésben α hegyesszög és pl. c, b, α vannak adva, akkor a nomogrammból γ meghatározható, $\beta = 180° - \alpha - \gamma$ kiszámítható, majd ugyanebből a nomogrammból a b skálát megtartva, de α-t γ-val és γ-t α-val c-t pedig a-val helyettesítve a értékét is megkapjuk.

Nomogrammjaink többnyire úgy készültek, hogy

α értéke 1°-tól 90°-ig, illetve 90°-tól 180°-ig terjedhet 1°—1,5°-onkénti kótával,

γ értéke 1°-tól 90°-ig 2°—3°-onkénti kótával,

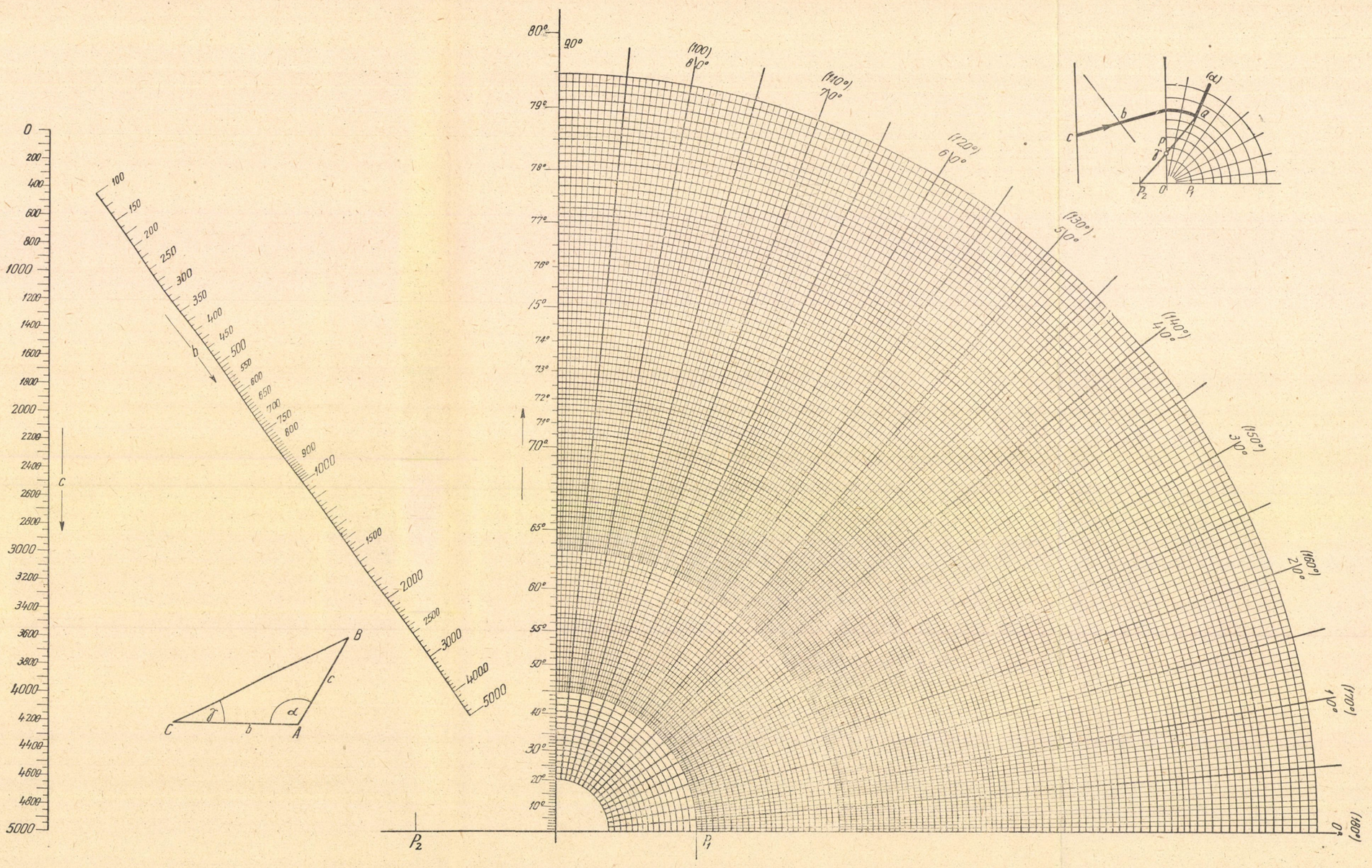
a	értéke	100	m-től	5000	m-ig	100 m—250	m-kénti	(ritkuló)	kótákkal,		
b	«	100	«	4000	«	50 m—200	«	«	«		
c	«	20	«	1000	«	20 m— 50	«	«	«		

Az (1) összefüggésre egy pontsoros, egy egyenessereges, három polárkoordináta-hálós és egy pontmezős nomogrammfajtát mutatunk be, a (2) összefüggésre pedig egy logaritmikus egyenessereges és egy mozgóskálás nomogrammot. Bemutatunk továbbá hasonló egyenessereges és mozgóskálás nomogrammokat, melyek (1) helyett a

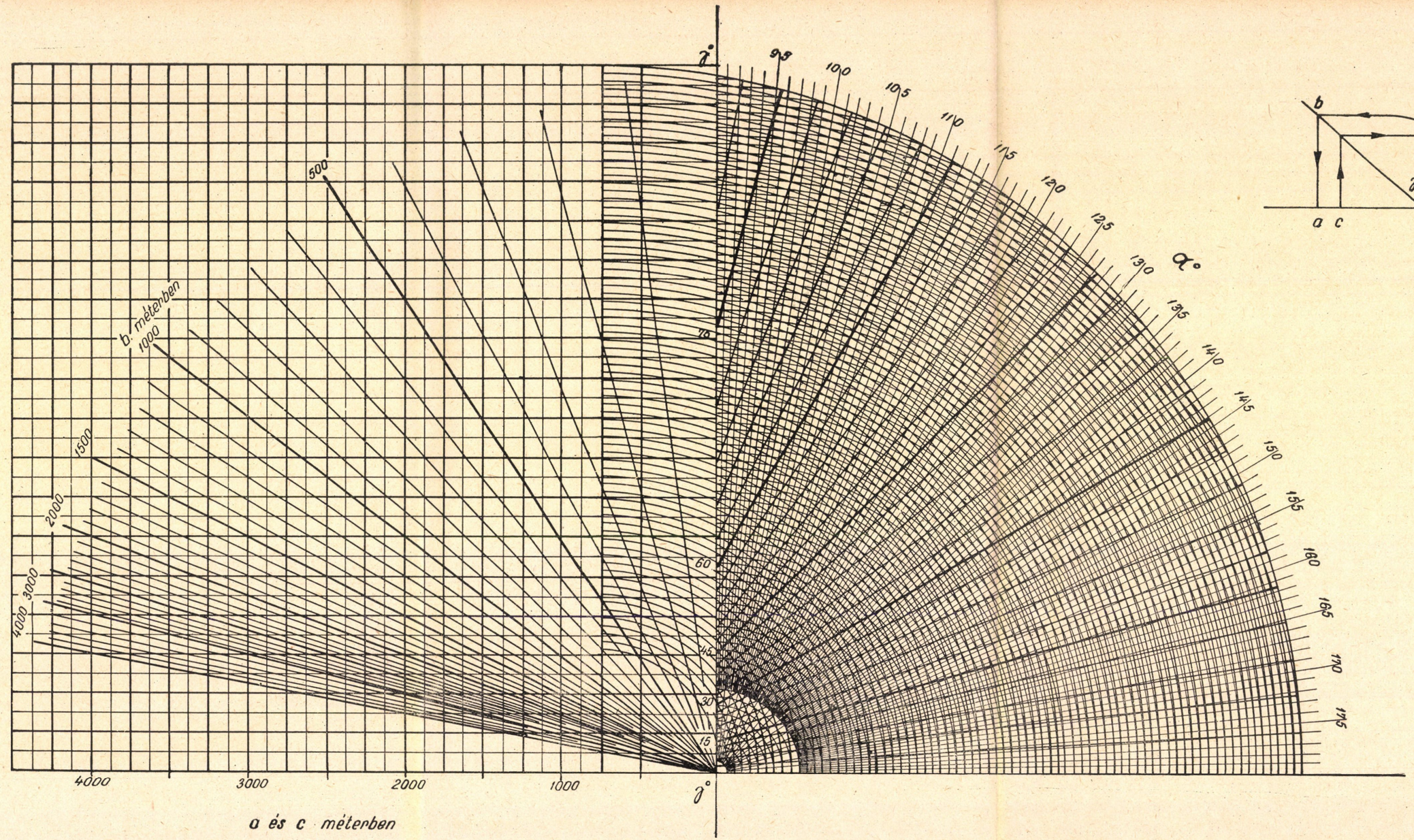
$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

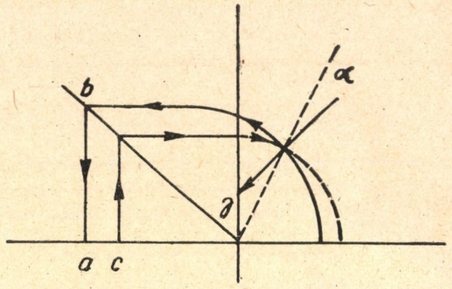
összefüggésen alapszanak.

Nomogrammjaink közül néhány más adathármasok esetén is használható, pl. a III. nomogramm mind a négy lehetséges adathármasnál teljes megoldást ad. Több nomogrammunk (I, II, V, VI), mely külön részeket (osztónomogrammokat) tartalmaz a $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{b}$ stb. osztások elvégzésére, természetesen egyszerűsödik, ha ezen osztásokat előre (pl. logarléccel) elvégzettnek tételezhetjük fel. Mindegyik nomogrammnál utalunk annak alapelvére, szerkesztésére, használatára, előnyeire és hátrányaira.


0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
2600
2800
3000
3200
3400
3600
3800
4000
4200
4400
4600
4800
5000
c
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650
700
750
800
900
1000
1500
2000
2500
3000
4000
5000
b
B
c
C
b
A
80°
90°
79°
78°
77°
76°
75°
74°
73°
72°
71°
70°
65°
60°
55°
50°
40°
30°
20°
10°
0°
(100)
80°
(110°)
70°
(120°)
60°
(130°)
50°
(140°)
40°
(150°)
30°
(160°)
20°
(170°)
10°
(180°)
0°
P2
P1
(α)
a
b
c
P
γ
P2
O
P1

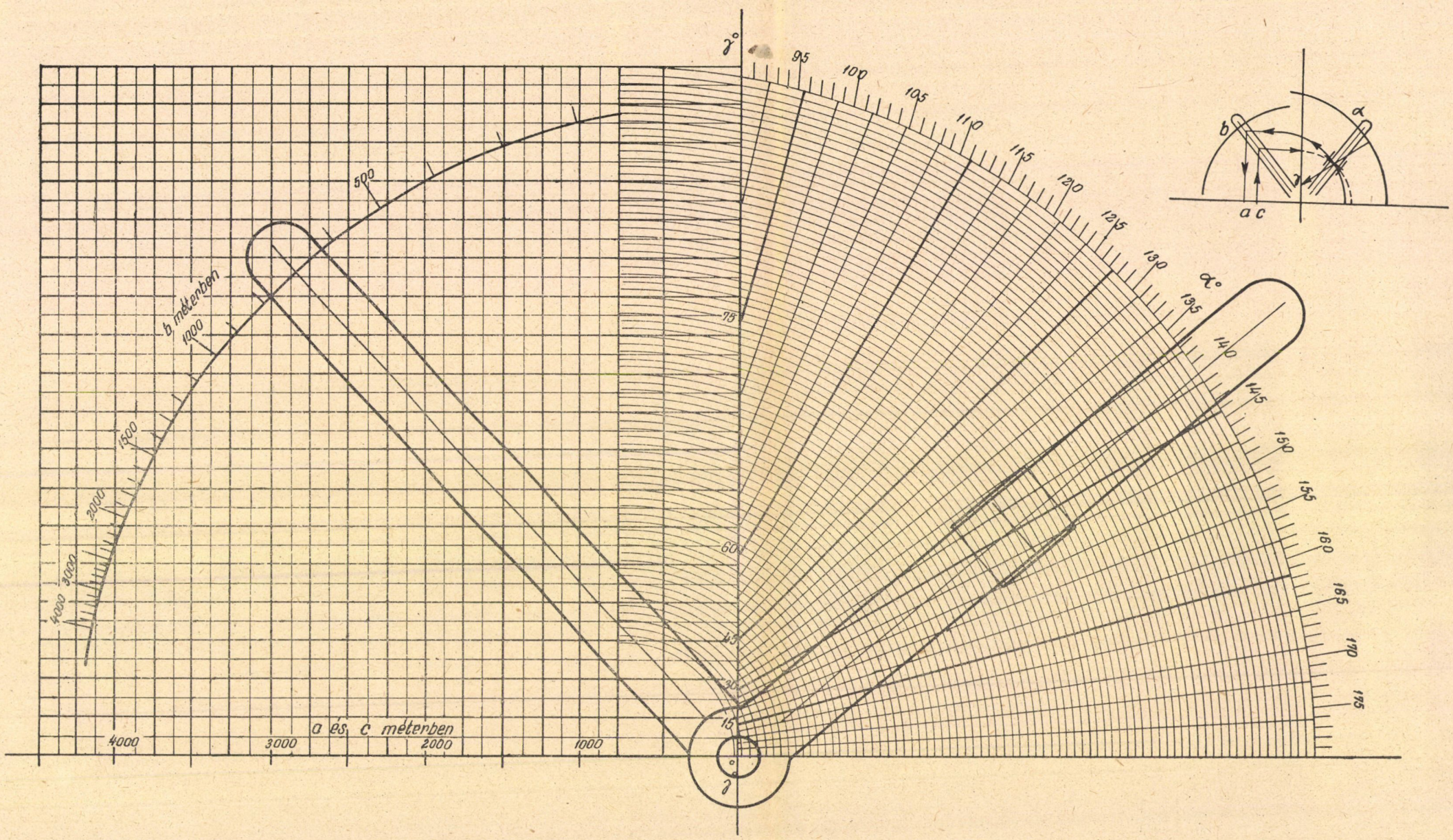
I. nomogramm



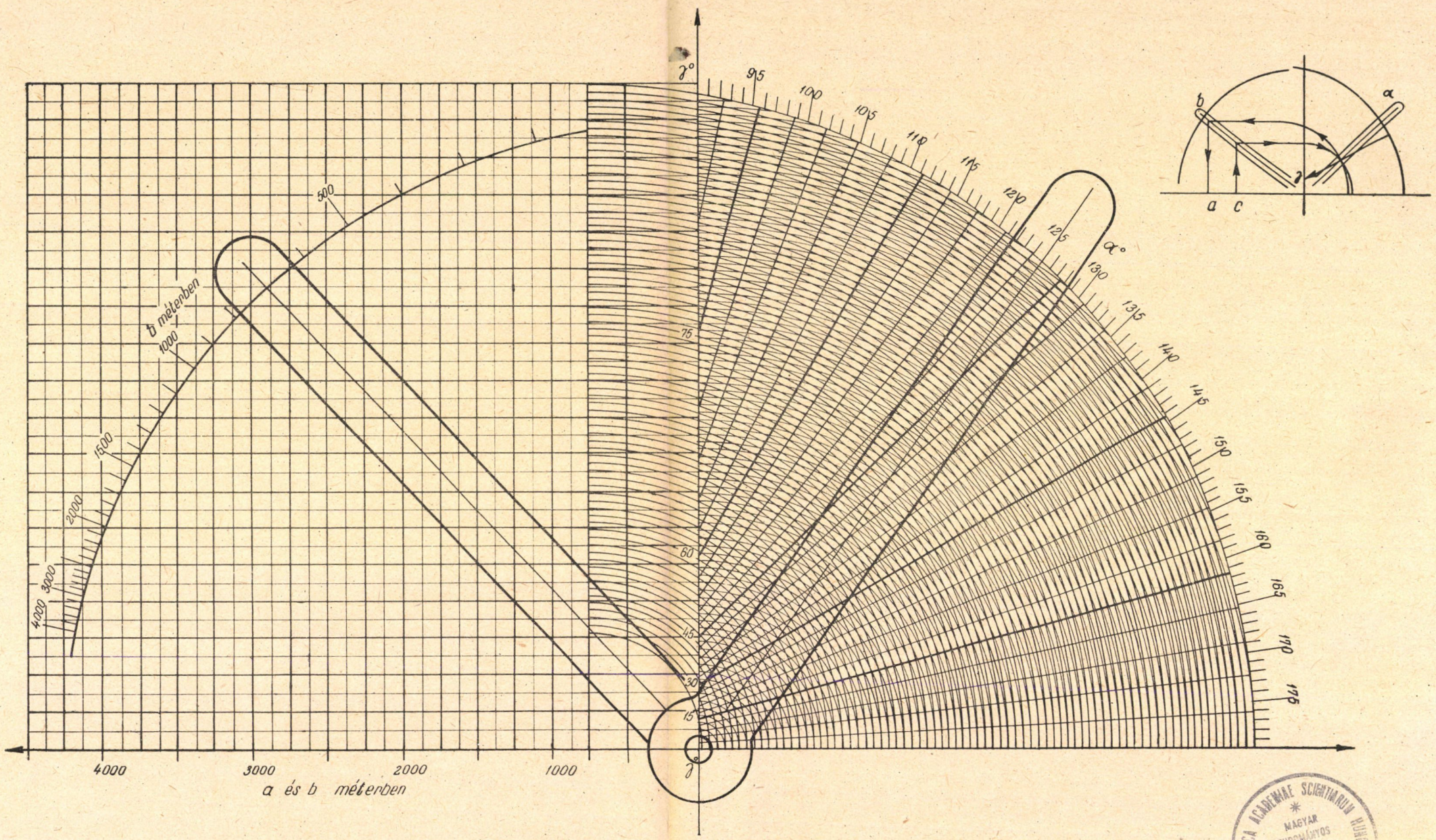


BIBLIOTHECA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

II/a. nomogramm



II/b. nomogramm



II/c. nomogramm

BIBLIOTHECA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA
BUDAPEST

Az 1. § *Aczél János*, a 2. § *Béda Gyula*, a 3. § *Gáti József*, a 4. § *Török Sándor* munkája, azonban ezen belül több kölcsönös megjegyzés, megbeszélés alapján alakult ki a cikk mostani alakja. Az I, II, IV, V, VI. nomogrammokat *Gáti József*, a III, VII, VIII. számúakat *Török Sándor* rajzolta.

1. § Polár-nomogrammok

Ezen cím alatt néhány olyan nomogrammot mutatunk be, melyekben polárkoordináta-hálózat szerepel és egyaránt tekinthetők görbesereges, ill. elfajult pontmezős nomogrammoknak.

A

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma} \tag{1}$$

összefüggést ilyen alakban írjuk fel:

$$\frac{\frac{c}{b}\cos\alpha}{1} + \frac{\frac{c}{b}\sin\alpha}{\operatorname{tg}\gamma} = 1,$$

ami azt mutatja, hogy a $\frac{c}{b}$ sugarú kör és a vízszinteshez α szög alatt hajló sugár metszéspontja egy olyan egyenesen fekszik, mely a tengelyeket a $P_1(1, 0)$ és a $P(0, \operatorname{tg}\gamma)$ pontokban metszi.

Hogy tompa α-szögekre ne kelljen a második körnegyedet is igénybevenni, ezeknél a kapott egyenletet így módosítjuk:

$$\frac{\frac{c}{b}\cos(180° - \alpha)}{-1} + \frac{\frac{c}{b}\sin(180° - \alpha)}{\operatorname{tg}\gamma} = 1$$

tehát itt a $\frac{c}{b}$ sugarú körnek a $(180° - \alpha)$ hajlású sugárral való metszéspontja egy olyan egyenesen fekszik, mely a $P_2(-1,0)$ és a $P(0, \operatorname{tg}\gamma)$ pontokban metszi a tengelyeket.

Ennek megfelelően az összefüggés olyan nomogrammal ábrázolható, amely az első negyedben koncentrikus, $\frac{c}{b}$ sugarú körökből és a középpontból kiinduló α, ill. $180° - \alpha$ szög alatt hajló sugarakból áll. A függőleges tengelyen a γ szög tangensskálája van, a vízszintesen pedig meg van jelölve a $P_1(1,0)$ és a $P_2(-1,0)$ pont. A $\frac{c}{b}$ sugarú körön az α egyeneshez tartozó pontnak a P_1, illetve P_2 pólusokkal való összekötése (a szerint, hogy α hegyes, ill. tompaszög) kimetszi a függőleges tengelyből a keresett γ szöget. Ez tekinthető olyan nomogrammnak, mely egy ú. n. pontmezőt, egy skálát és egy ponttá elfajult (P_1, ill. P_2) skálát tartalmaz.

Ha ehhez egy pontsoros Z osztó nomogrammot csatolunk a $\frac{c}{b}$ osztás elvégzésére, akkor kapjuk az I. nomogrammot.

Ennek előnye viszonylag egyszerű szerkezete és igen széles alkalmazási határai.

Hátránya a két egyenes-átfektetés okozta nehézségen kívül, hogy az adatok bizonyos értékeinél $\left(\text{ahol } \frac{c}{b} \text{ kicsiny}\right)$ a nomogramm összezsúfolódik, továbbá, hogy ennek igen kicsiny értékeinél, a középpont közelében az $\alpha =$ konstans sugarak már be sem rajzolhatók.

Amennyiben α-nak csak egy szögnegyede, például csak tompaszögű értékei szerepelnek (a következőkben csak ezzel fogunk foglalkozni), úgy az utóbbi hibán úgy lehet segíteni, hogy az $\alpha =$ konstans egyeneseket nem rajzoljuk be, hanem egyenesátfektetéssel helyettesítjük, helyettük a $\gamma =$ konstans egyeneseket rajzoljuk be, melyeknek P_2 középpontja és így sűrűsödése is kívül fekszik a berajzolt első környegyeden.

Megtehetjük azt is, hogy mindkét egyenessereget az ábrán hagyjuk, akkor — ha még a $\frac{c}{b}$ osztónomogrammot is egyenessereggel oldjuk meg — kapcsolt görbesereges nomogrammot kapunk. Ennek leolvasása egyszerűbb, viszont rajza lényegesen bonyolultabb, zsúfoltabb, ami tévesztési lehetőségeket ad.

Mielőtt tovább próbálnánk tökéletesíteni nomogrammunkat, egy új értelmezését adjuk, mely egy kis kiegészítéssel mindjárt arra is alkalmassá teszi, hogy γ-n kívül α-t is meghatározzuk vele, vagyis egy nomogramm-használattal a teljes háromszögmeghatározás lehetővé válik.

Ha megfigyeljük nomogrammunk leolvasását, látjuk, hogy az abban szereplő $O\,Q\,P_2$ háromszög éppen az eredeti $A\,B\,C$ háromszög $1 : b$ arányban kicsinyített képe, hiszen $P_2O = 1$, $P_2\,O\,Q \sphericalangle = \alpha$ és $\operatorname{tg} QP_2O \sphericalangle = \frac{PO}{P_2O} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{1}$, tehát $Q\,P_2\,O \sphericalangle = \gamma$. Így a $\gamma =$ konstans egyenesek hajlása a vízszinteshez is épen a γ szög valódi nagyságával egyenlő, ami a γ-skála megszerkesztését és γ leolvasását megkönnyíti. Jelentősebb azonban, hogy ezen az alapon az α oldal maga is meghatározható, ha a $P_2\,Q$ oldalt b-szeresére nagyítva valahol leolvassuk. Ezt úgy érhetjük el, hogy egy újabb P_2 középpontú körsort rajzolunk, amivel P_2Q függőlegessé állítható, majd a b-vel való szorzást ugyanazzal az egyenessereges nomogrammal végezzük el, amit az elején c-nek b-vel való osztásához szerkesztettünk. Így a lineáris α-skála a c-skálával egybeesik.

Az így kapott rajz a II/a. nomogrammot adja. Láthatjuk, hogy hátránya az, hogy rajza igen bonyolult, helyenként négy vonalsereg fekszik egymáson. Azonkívül a $b =$ konstans egyenesre a leolvasás elején is, végén is szükség van, így azt »meg kell jegyezni«.

Mindkét bajon segít, ha az $\alpha =$ konstans és a $b =$ konstans sugársort egy-egy 0-ból kiinduló mutatóval helyettesíthetjük. Ezt mutatja a II/b. nomogramm. Ha a két mutató tengelyét nem akarjuk egymásra helyezni, akkor az ábrát a függőleges tengely mentén vízszintes irányban kicsit »szét is húzhatjuk«, pl. P_2-ig.

Az eddig említett nomogrammok vetítésre (projektív leképezésre) is alkalmasak az egyes részek részletesebbé, pontosabbá tétele, a lapos metszések kiküszöbölése stb. érdekében, — hiszen e leképezés sugársort sugársorba visz át, tehát vetítés után is dolgozhatunk mutatókkal.

Ha e vetítési lehetőségről lemondunk, akkor nomogrammunkat továbbegyszerűsíthetjük : az 0 középpontú köröket helyettesíthetjük az α-mutatón alkalmazott ablakkal. Ez »megjegyzi« a mutató kívánt pontját, amely a mutató forgatásánál 0 középpontú körívet ír le, így kapjuk a II/c. nomogrammot.

A II. nomogrammok leolvasása az előzőkből és a rajtuk levő leolvasási vázlatból világos. Példaképpen II/c. használatát ismertetem : Az α mutató alapállása függőleges. A b-mutatót beállítjuk a kívánt b-értékre, majd a vízszintes $a—c$ tengelyen c értékét felvéve a milliméterpapíron függőlegesen a b mutatóig haladunk, onnan vízszintesen az $0 — \gamma$ tengelyig. Az azon kapott pontra az α-mutató ablakát beállítjuk, majd e mutatót az adott α értékhez visszük. Az ablak által így megadott ponton átmenő berajzolt γ-egyenes γ értékét adja meg. Az ugyanezen ponton átmenő berajzolt körön a P_2-n átmenő függőlegesig, majd tovább a milliméterpapíron vízszintesen a még az elején beállított b-mutatóig, végül onnan függőlegesen lefelé haladva az $a—c$ tengelyig, azon megkapjuk a értékét is.

Nomogrammunk előnyei mindkét keresett adat egyidejű meghatározásának lehetőségével és az egyszerűbb kezeléssel lényegesen megnőnek. Megemlíthető, hogy e II. nomogrammtípussal bármelyik adathármas megadása esetén megoldható a háromszög. Hátránya, hogy vagy bonyolult, sok egymásra rajzolt görbesereget tartalmaz a rajz, vagy mechanikai segédeszközöket igényel. Hátrány marad, hogy egyes értékeknél még mindig nehézkes és így hosszadalmas és pontatlan meghatározást ad.

A II. nomogrammoknál mondottak azt a gondolatot sugallják, nem lehetne-e nomogramm segítségével az eredeti háromszöghöz nemcsak hasonló, de vele egybevágó (illetve csak a megfelelő állandó mértékszámmal kicsinyített) háromszöget is előállítani egy nomogramm révén.

Ez a következő mozgólapos nomogrammal oldható meg (III. nomogramm).

Rajzolunk két polárkoordinátás hálót egy-egy átlátszó lapon (pauszpapiron, vagy celluloid-lapon) : az egyiket a c, α, a másikat, mely fordított helyzetű, a b, γ, a mennyiségek részére.

Használata : pl. γ és a meghatározására az elsőn megkeressük a (c, α) pontot, a másik lapot úgy helyezzük rá, hogy a megegyező alapegyenes b jelű pontja épp az első lap 0_1 középpontját fedje ; a (c, α) pont feletti (a, γ) pont egyenesének kótája γ-t, a hozzátartozó köré pedig a-t adja.

Látható, hogy az O_1PO_2 háromszög egybevágó az eredeti ABC háromszöggel. Nomogrammunk a háromszög megadásának mindnégy adathármasa esetén teljes megoldást ad. — A két lap kezelése egy sín segítségével mechanizálható.

Ha csak a-ra van szükségünk, akkor használhatjuk az első (III/a). lapot egymagában is lineáris skálával ellátott leolvasó transzparenssel. Használatát a III/a.-nál feltüntetett vázlat mutatja.

E nomogrammok előnye az előzőkkel szemben egyszerűségük és a kezelés könnyedsége. Hátrányuk, hogy nem vetíthetők és kis c, illetve a értékek esetén itt sem férnek el a rajzon az α, illetve γ sugarak.

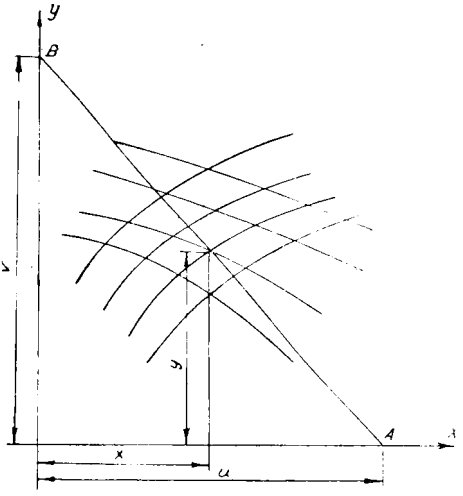
2. § *Pontmezős nomogramm*

A következőkben egy u. n. pontmezős nomogrammot mutatunk be, ahol a leolvasóegyenes két görbesereg megfelelő görbéinek metszéspontján és a másik két változó skáláinak megfelelő pontjain megy át (lásd a IV. nomogrammot). Ehhez az (1) összefüggést a

$$\frac{-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\frac{b}{-\cos\alpha}}{-c}=1 \tag{3}$$

alakban írjuk fel.

A nomogramm megszerkesztéséhez a két görbesereget és a két egyenestartó skálafüggvényeit kell meghatározni. Azt akarjuk, hogy az összetartozó



2. ábra

értékek egy egyenesen legyenek (lásd a 2. ábrát). Ha az egyenes tengelymetszetes

$$\frac{x}{u}+\frac{y}{v}=1$$

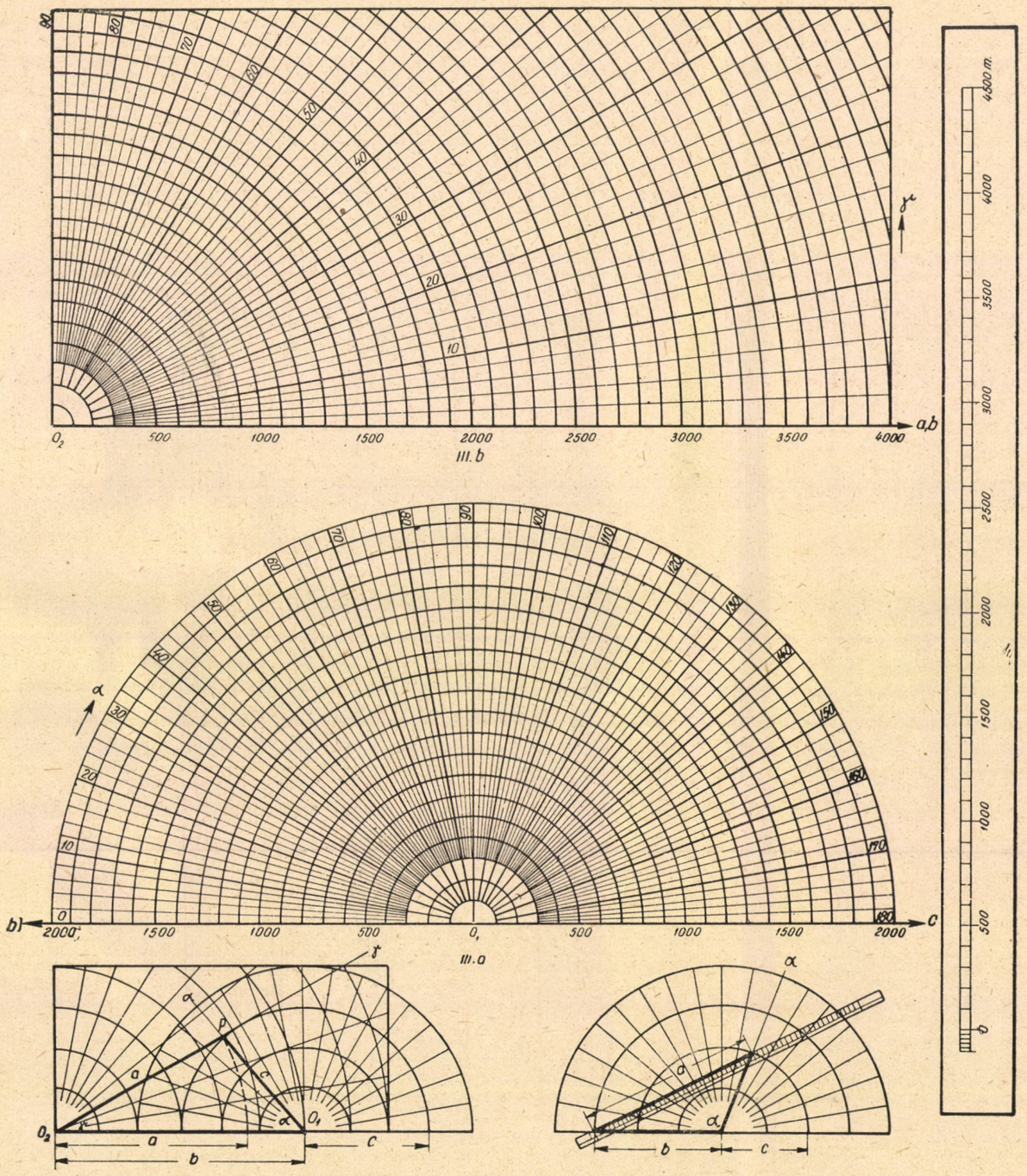
alakját összevetjük a (3) egyenlettel, akkor azt kapjuk, hogy

$$x=-\operatorname{tg}\alpha\,,\qquad y=-\frac{b}{\cos\alpha}, \tag{4}$$

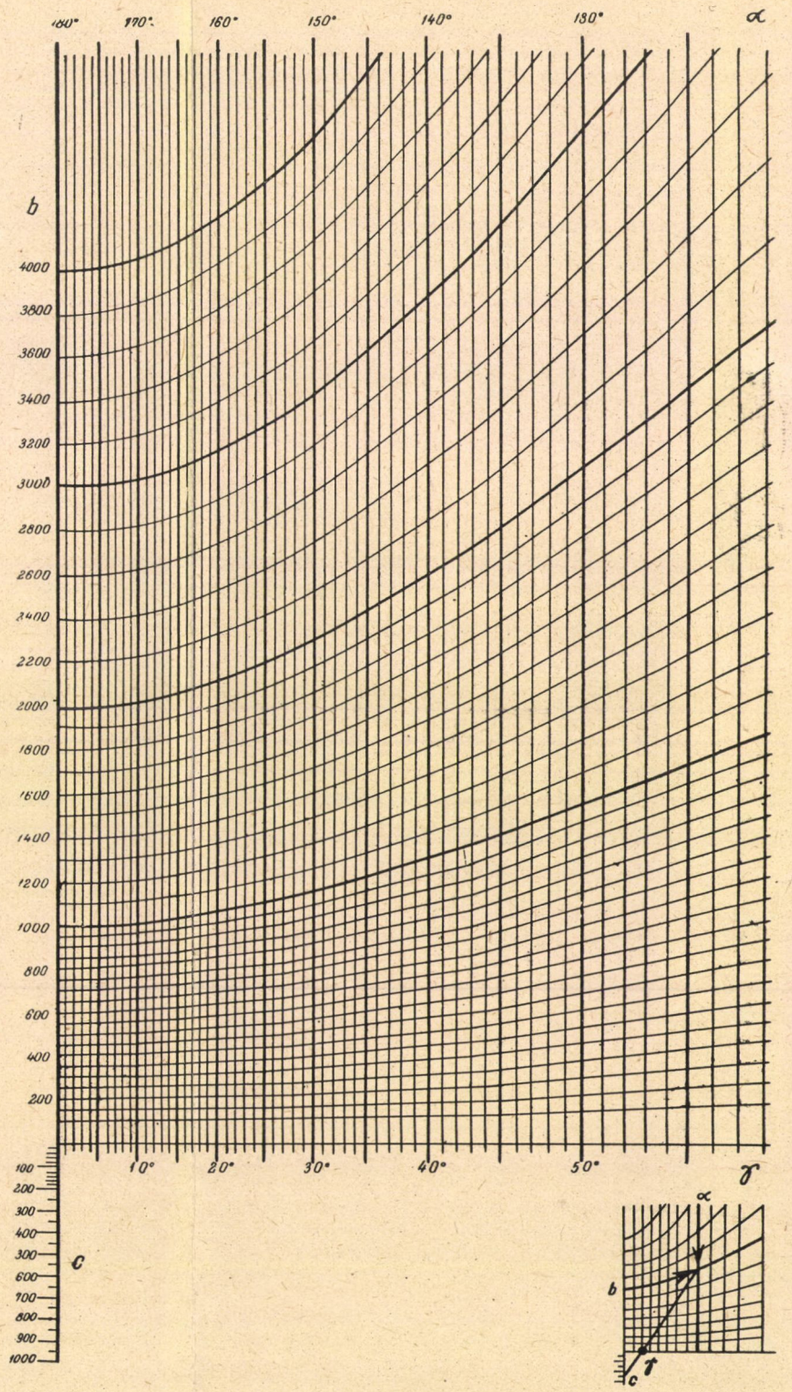
$$u=\operatorname{tg}\gamma \tag{5}$$

és

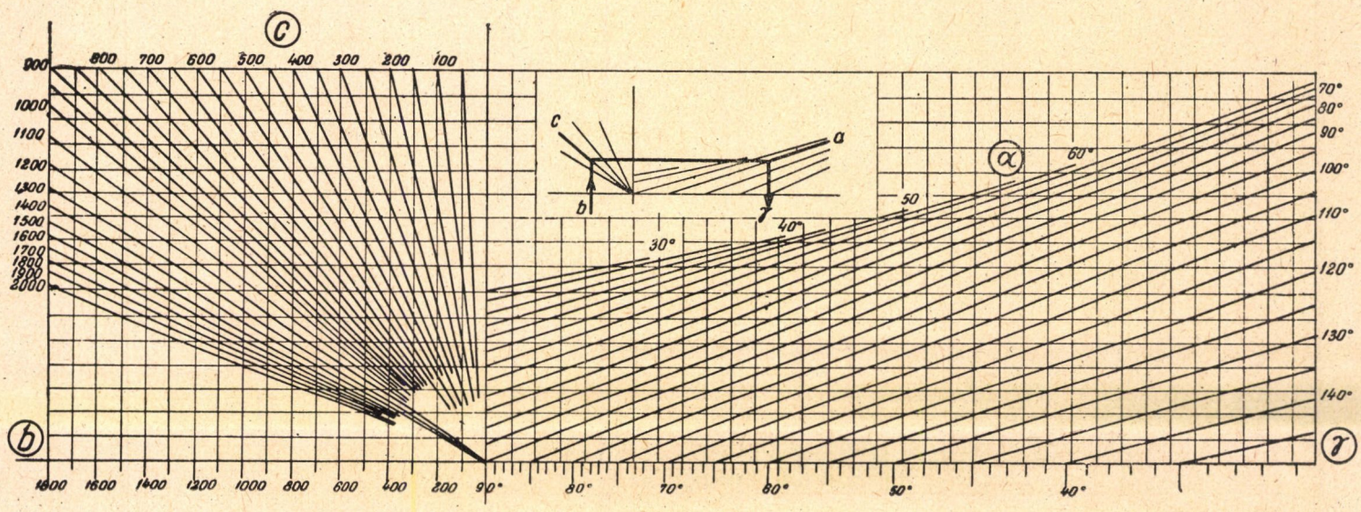
$$v=-c. \tag{6}$$



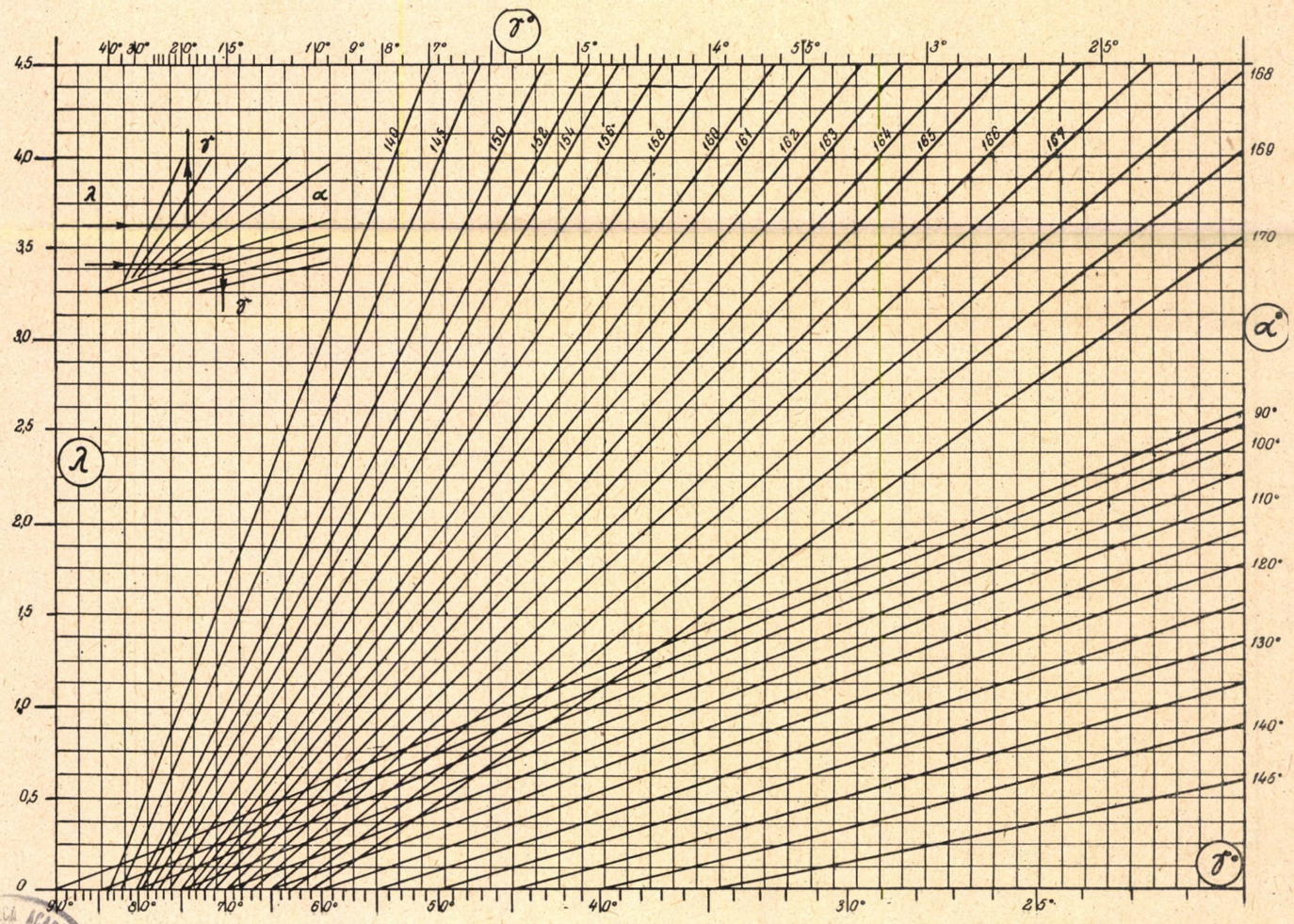
III/a, b. nomogramm



IV. nomogramm

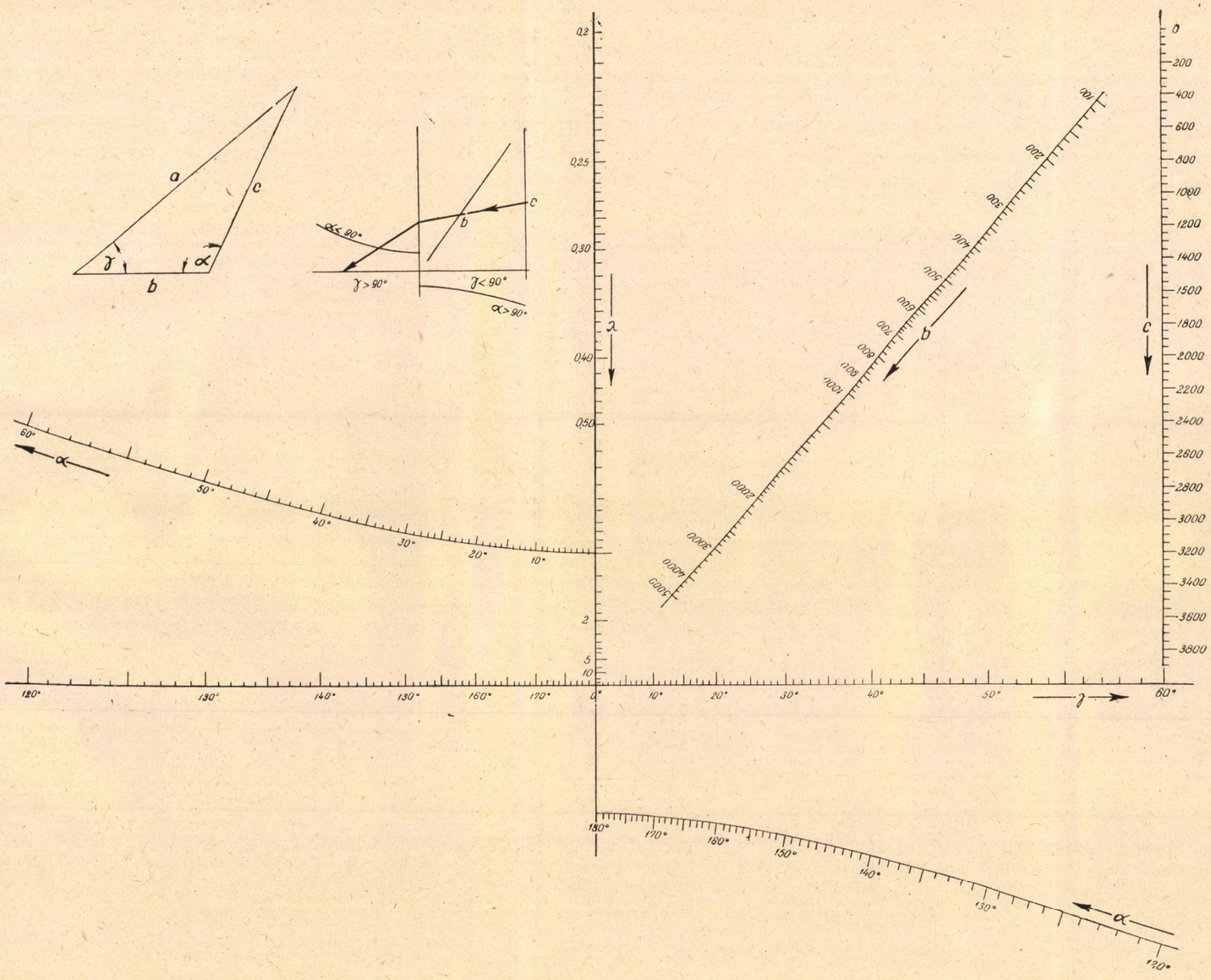


V/a. nomogramm

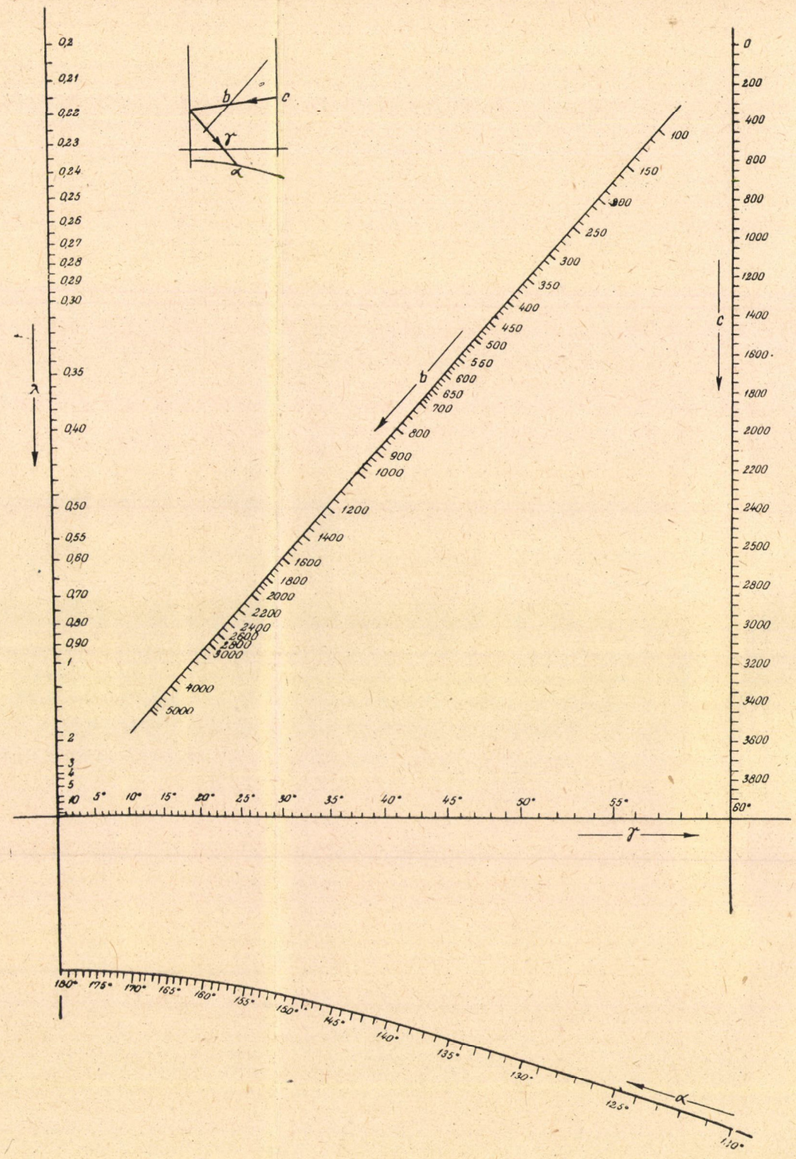


V/b. nomogramm

BIBLIOTHECA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE



VI/a. nomogramm



VI/b. nomogramm

Az a paramétergörbék (4) alapján az y-tengellyel párhuzamos $x = -\operatorname{tg} a$ egyenesek. A b paramétergörbék ugyancsak (4) alapján

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 - x^2 = 1 \tag{7}$$

egyenletű hiperbolák, amelyeknél a valós féltengely hossza egyenlő b-vel, a képzetes féltengely hossza pedig mindig az egységgel egyenlő.

Aszimptotáinak egyenlete $y = \pm bx$.

A szerkesztést egyszerűsíti, hogy az egymástól egyenlő csúcsponttávolságú hiperboláknak bármely függőleges egyenessel való metszéspontjai egyenlő távolságban vannak.

A hiperbolasereg harmadik, illetve első negyedbeli része tartozik a nomogrammhoz aszerint, hogy a hegyes- vagy tompaszög.

(5) alapján γ skálája tangensskála a pozitív x tengelyen, a c skála pedig (6) alapján lineáris a negatív y tengely irányában.

A nomogramm előnye, hogy az egyik görbesereg egyenessereg (a másik is könnyen megrajzolható hiperbolasereg), továbbá, hogy az egyik skála lineáris, a másik pedig trigonometrikus. Ha a tompaszög a γ skála és az a egyenessereg kótázása egybeesik.

Hátránya, hogy nagy b értékhez tartozó hiperbolák a nagyobb $a =$ konst. vízszintesekkel már elég lapos metszést adnak, sőt a-nak és γ-nak nagyobb értékei már kívülesnek a nomogramm határain. Ezenkívül hegyesszögű a-nál a negyedik síknegyed nincsen kihasználva és a nomogramm vízszintes irányban nagyon is hosszúra nyúlik.

3. § *Egyenessereges és pontsoros nomogrammok*

A következőkben az (1) összefüggést ábrázoló két összetett nomogrammot ismertetünk: az egyik kapcsolt egyenessereges nomogramm, a másik ennek a duál megfelelője: kapcsolt pontsoros nomogramm.

Kiindulásul bontsuk fel az (1) összefüggést

$$\frac{b}{c} = \lambda \tag{8}$$

és

$$\lambda = \frac{\sin(a + \gamma)}{\sin \gamma} \tag{9}$$

részekre. A (8) összefüggés bármilyen osztónomogrammal nehézség nélkül ábrázolható.

A (9) összefüggés ilyen alakban írható:

$$\lambda = \sin a \cdot \operatorname{ctg} \gamma + \cos a.$$

Ez pedig, ha a állandó, a $(\lambda, \operatorname{ctg} \gamma)$ koordinátarendszerben egy egyenes egyenlete. A (9) összefüggés tehát a paraméterű egyenessereggel ábrázolható. Ennek egyenesei az első síknegyedben vannak és nincs közös metszéspontjuk. Ez az egyenessereg könnyen megszerkeszthető (V. nomogrammok).

A (8) összefüggést szintén egyenessereges nomogrammal, mégpedig a c paraméterű $\lambda = \frac{1}{c} \cdot b$ sugársorral ábrázoltuk.

A két nomogramm a közös λ tengelyén keresztül kapcsolódik egymáshoz. A leolvasás az ábrán feltüntetett kulcs szerint történik (V/a. nomogramm).

A nomogrammot értékelve megállapíthatjuk, hogy előnye a könnyű megszerkeszthetőség, a könnyen kezelhetőség, hátránya, hogy nem vihető fel sem a teljes α, sem a teljes γ skála. (Pl. a γ tengelyen a 30°-nál kisebb szögek lemaradtak, az α tengelyen pedig a 30°-nál kisebb és a 145°-nál nagyobb szögek.) További hátrányként említhető meg, hogy az α = konstans egyenesek csak kb. 5°-onként rajzolhatók fel, de nagy szögeknél még ezek az egyenesek sem húzhatók végig, mert elég lapos szögben metszik egymást.

Ha például a teljes $90° \leq \alpha \leq 180°$ tompaszögű intervallumra van szükség, akkor a fenti nehézségek azáltal oldhatók meg, hogy a γ tengelyen kétfelé egységet, illetve két γ tengelyt veszünk fel. Hogy a tévesztési lehetőséget kiküszöböljük, a felső egyenessereghez tartozó γ tengelyt felülre, az alsó egyenessereghez tartozó γ tengelyt pedig alulra rajzoljuk.

A $\cdot \lambda = \frac{b}{c}$ osztónomogrammot itt elhagytuk, helyette a λ = konstans egyenessereget kótáztuk. Elképzelhető ugyanis, hogy a $\frac{b}{c}$ osztást logarléccel előre elvégezzük. A leolvasás a feltüntetett kulcs szerint történik (V/b. nomogramm).

Az (1) összefüggés ábrázolására felhasználhatjuk az ismertetett egyenessereges nomogrammal duális pontsoros nomogrammot is.

Az előző nomogramm, ha a λ = konst. és γ = konst. egyenesekkel kiegészítjük, három-egyenessereges nomogramm. Mivel az α = konst. egyenessereg nem halad át közös ponton, a λ = konst. és a γ = konst. egyenessereg ellenben igen, tudniillik az illető egyenesek végtelen távoli pontjában, azért ennek a nomogrammnak a duálja két egyenes és egy görbe skálát tartalmazó nomogramm.

Most a (9) összefüggést

$$\frac{\frac{1}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\lambda}} + \frac{-\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma} = 1$$

alakban írjuk. Ebből kiolvasható a két egyenes és a görbe skála egyenlete. Fenti alakjában az egyenlet azt fejezi ki, hogy az y tengely $\frac{1}{\lambda}$ koordinátájú pontja, az x tengely tg γ koordinátájú pontja és az

$$x = -\operatorname{tg} \alpha, \qquad y = \frac{1}{\cos \alpha}$$

koordinátájú pont egy egyenesen van.

Az y tengelyre tehát $\frac{1}{\lambda}$ reciprok skálát kell felvinni, az x tengelyre pedig tg γ skálát. A görbe tartó paraméteres egyenletrendszeréből az α paraméter kiküszöbölésével az $y^2 - x^2 = 1$ hiperbola adódik.

Egyenlő x és y egységek esetén ez egyenlőszárú hiperbola. Hegyes-, ill. tompaszögek esetén a hiperbola második, illetve negyedik síknegyedbeli része szerepel. Mindezeket az eredményeket a dualitás alapján közvetlenül is megkaphattuk volna, pl. a hiperbola az előző nomogramm egyenesseregének burkoló görbéje.

A VI/a. nomogrammban a (8) összefüggést pontsoros Z-nomogrammal ábrázoltuk.

Hátrányként jelentkezik ennél a nomogrammnál abban az esetben, ha hegyes- és tompaszögek egyaránt szerepelnek, a rossz helykihasználás, valamint, hogy a $\frac{\pi}{2}$-hez közeleső szögek kiesnek a nomogramm kereteiből. A kétszeri egyenesátfektetés is gyakran nehézkes. Előnye viszont ennek a nomogrammnak az, hogy a mindkét szögnegyedet tartalmazó α, γ skála folytán a háromszög teljes megoldására alkalmas.

Ha tompaszögű α értékekre szorítkozhatunk, viszonylag jó helykihasználású könnyen kezelhető nomogrammot kapunk (VI/b. nomogramm).

4. § *Logaritmikus egyenessereges és mozgóskálás nomogrammok*

Az általános háromszög megoldására készítettünk olyan logaritmikus egyenessereges és mozgóskálás nomogrammokat is, amelyek segítségével a háromszög megoldható, ha adott két oldal és egy szög vagy egy oldal és két szög. A megoldás alapjául a tangens- és a sinustétel szolgált :

$$(b - c) : (b + c) = \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

A tangens- és a sinustételnek megfelelően készítettünk két egyenessereges nomogrammot (VII/a. és VII/b.). Az ismert adatokból az ismeretlen meghatározása a nomogrammokon található magyarázó rajzok szerint történik. Mindkét nomogramm ugyanazon elv alapján készíthető el s éppen ezért elegendő, ha csak a sinustétellel foglalkozunk.

A sinustétel szerint :

$$a_1 \sin \alpha_2 = a_2 \sin \alpha_1.$$

Ezt

$$\lg a_1 + \lg \sin \alpha_2 = \lg a_2 + \lg \sin \alpha_1$$

alakban is felírhatjuk. Ha úgy a jobb-, mint a baloldalt y-nal tesszük egyenlővé, kapjuk, hogy

$$y = \lg a_1 + \lg \sin \alpha_2$$

és

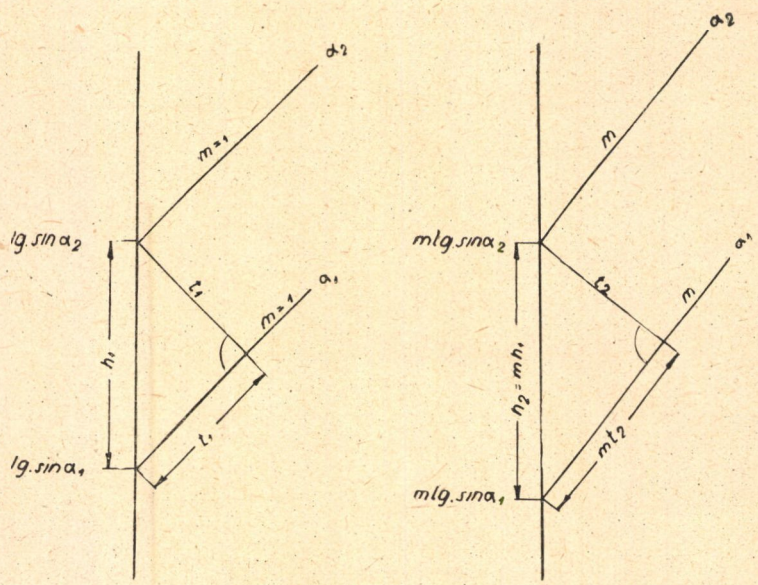
$$y = \lg a_2 + \lg \sin \alpha_1.$$

A logaritmikus papíron e függvények képe olyan egyenes, amelynek irányténye zője 1, ugyanis jelöljük lg a_1-et, illetve lg a_2-t x-szel, lg sin α_2-t, illetve lg sin α_1-et d-vel, akkor

$$y = x + d.$$

d minden értékéhez tartozik egy egyenes. Ezek összessége az 1 irányténye zőjű egyenesek seregét alkotja.

A logaritmikus papír vízszintes tengelyét távolságskálának választjuk, másik tengelyén pedig kitűzzük a szögeknek megfelelő d értékeket. Ha a kitűzött pontokon át a távolságskálához 45° alatt hajló egyeneseket húzunk, már el is készítettük a sinustétel megoldásához szükséges nomogrammot.



3. ábra

90° közelében a sinusértékek igen közel esnek egymáshoz, ami az egyenessereg erős sűrűsödését jelenti. Ez hátránya ennek a nomogrammnak. Mint az alábbiakban látjuk, az y tengely egységének növelésével mód nyílik az egyenessereg némi széthúzására. Ha ezt az egységet m-szeresre nyújtjuk, a sereg egyeneseinek iránytangense m. A VII/b. nomogrammon 2 irányténye zőjű egyenessereg szerepel.

Nézzük meg, hogy az α_1 és α_2-höz tartozó párhuzamos egyenesek távolsága hogyan függ m-től. A 3. ábrán először 1 az irányténye ző, másodszor m.

Az ábrákból adódik, hogy

$$2t_1^2 = h_1^2,\ t_2^2 + m^2t_2^2 = h_2^2,\ h_2 = mh_1,$$

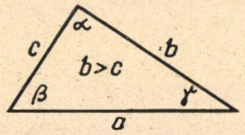
tehát

$$t_1 = \frac{h_1}{\sqrt{2}}, \qquad t_2 = \frac{h_2}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{mh_1}{\sqrt{1+m^2}}$$

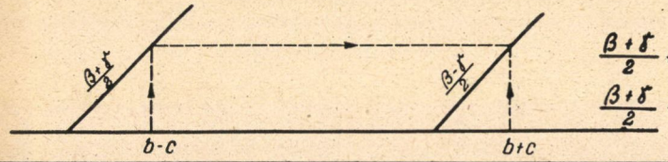
$$(b-c):(b+c) = tg\,\frac{\beta-\gamma}{2} : tg\,\frac{\beta+\gamma}{2}$$

Adott:

b, c és α.

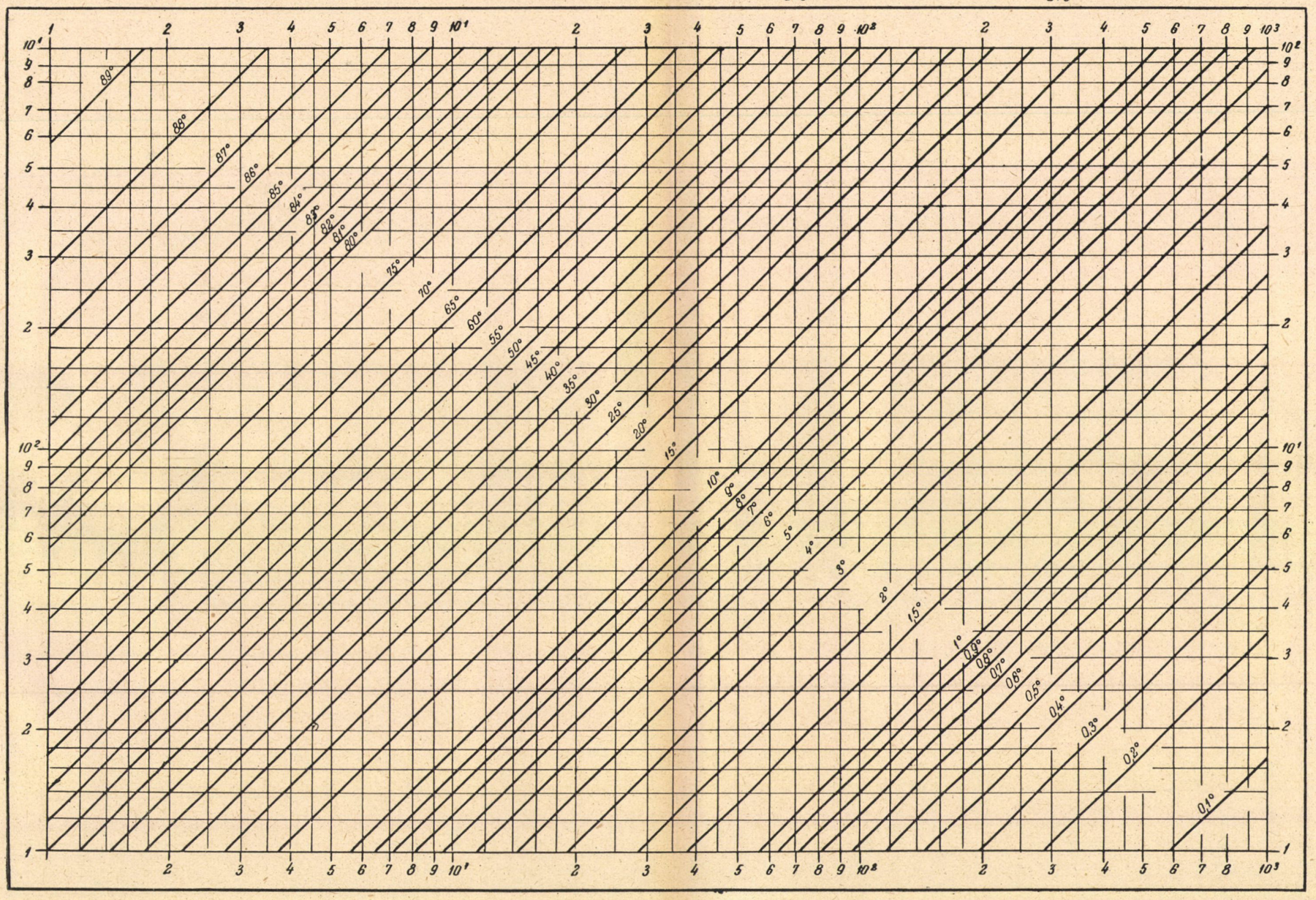


$$\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{180^\circ-\alpha}{2}$$



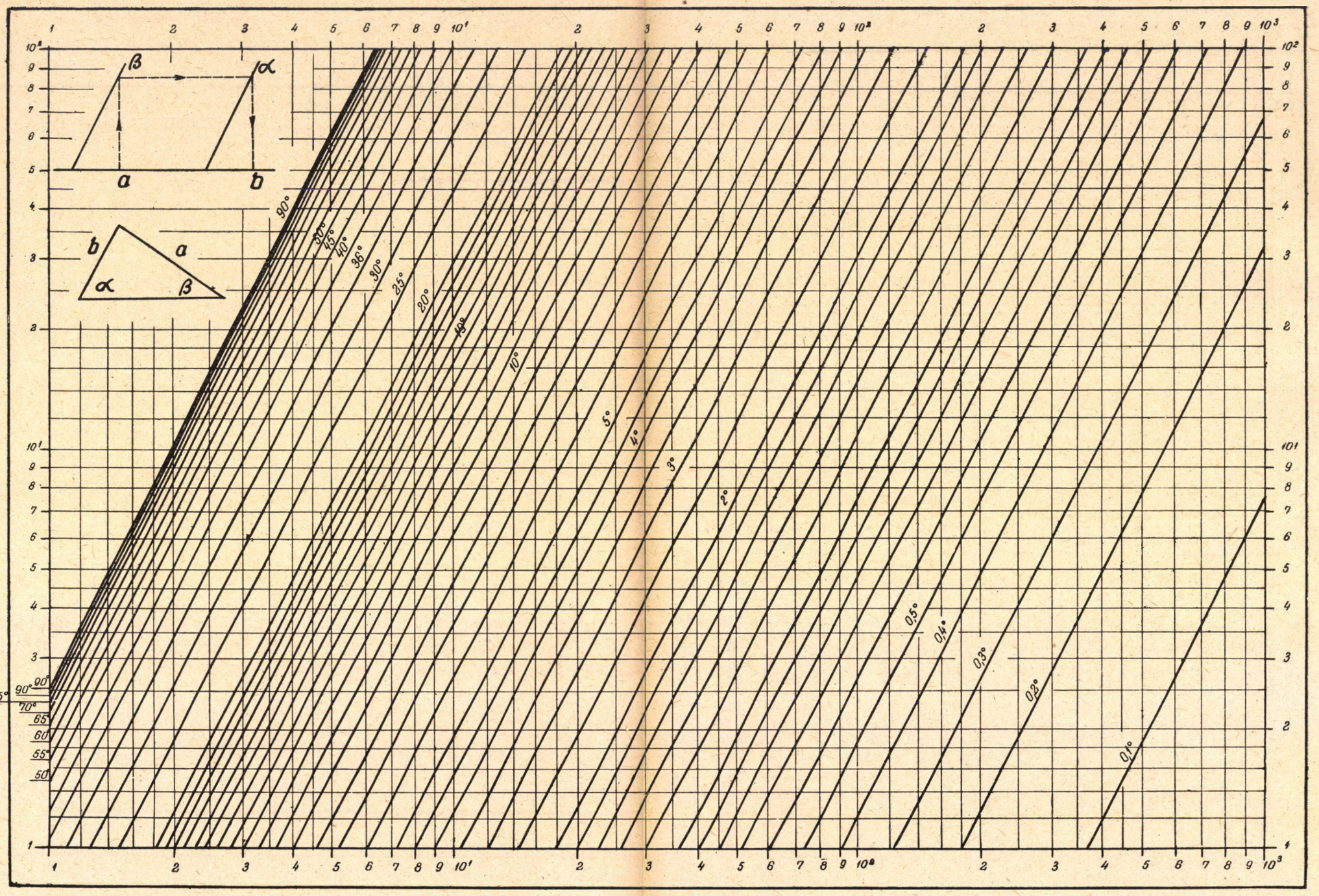
$$\frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2} = \beta$$

$$\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2} = \gamma$$

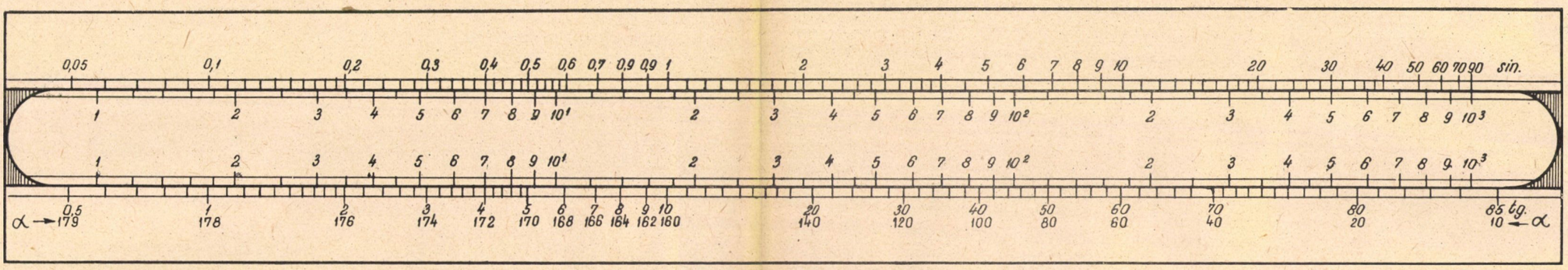


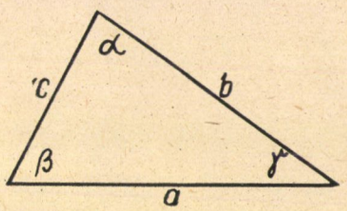
VII/a. nomogramm

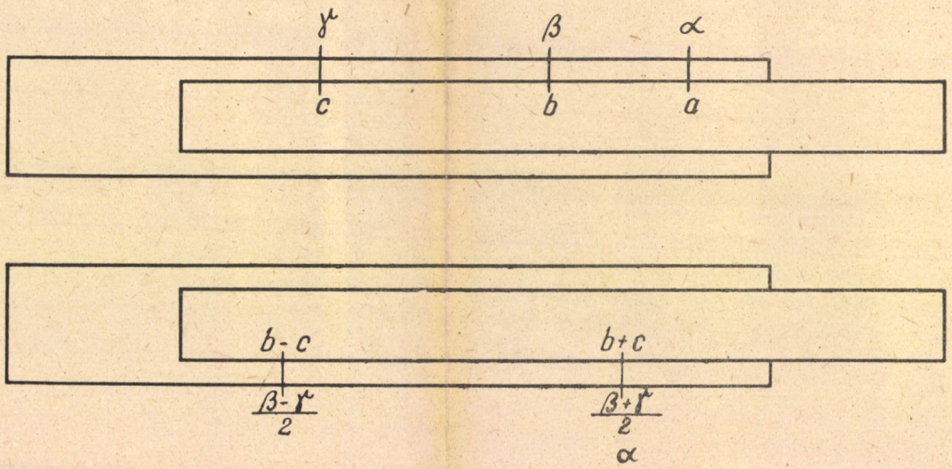
$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta.$$



VII/b. nomogramm







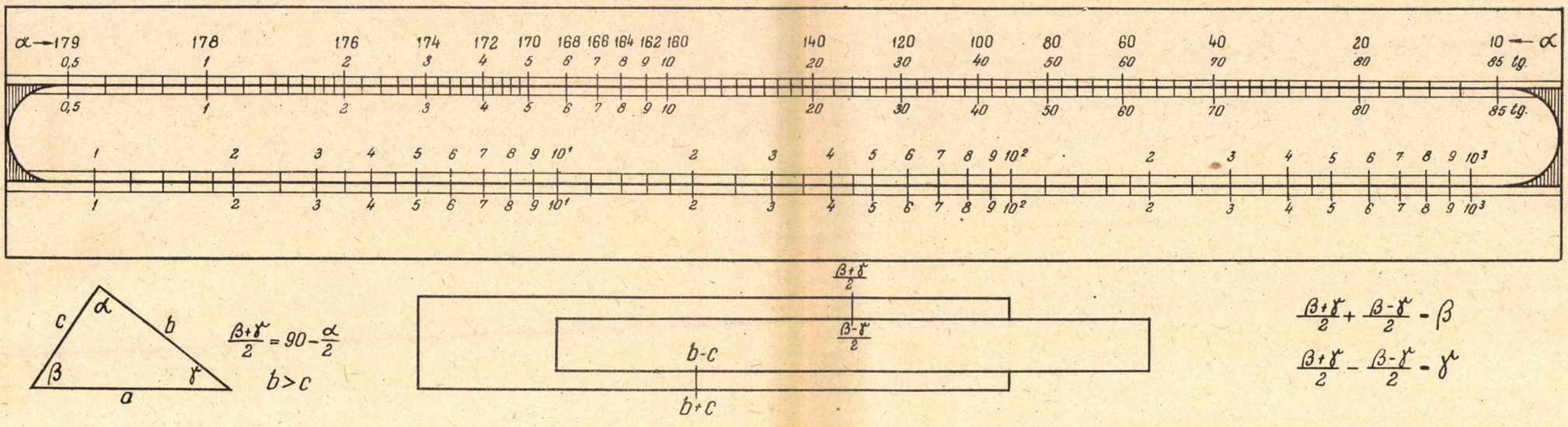
$b > c; \quad \frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$

$$\frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2} = \beta$$

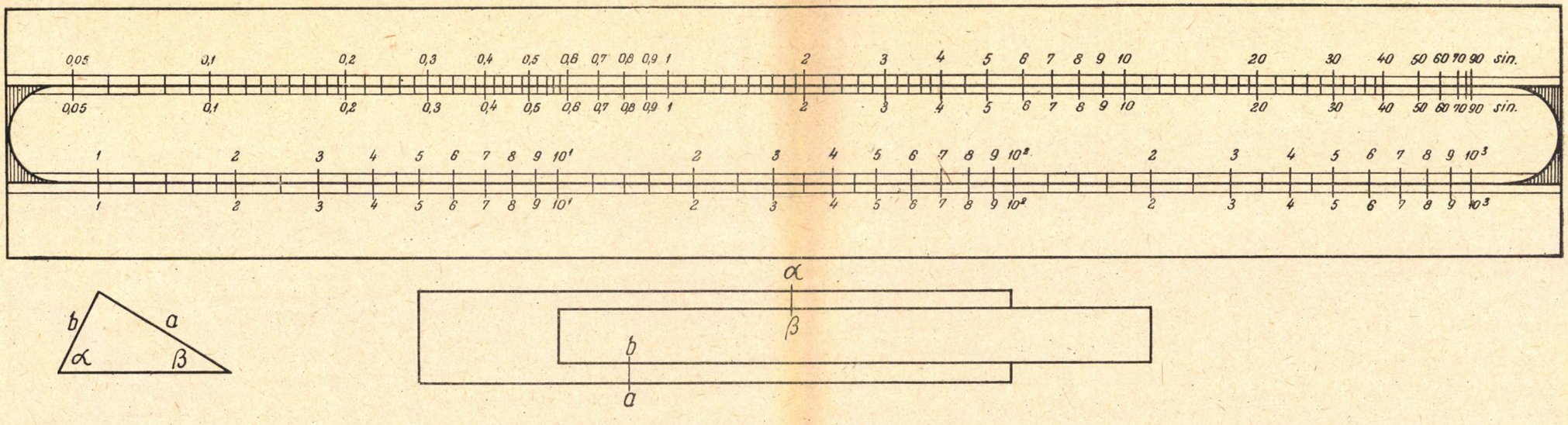
$$\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2} = \gamma$$

VIII/c. nomogramm

BIBLIOTHECA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA
BUDAPEST



VIII/a. nomogramm



VIII/b. nomogramm

és

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{mh_1}{h_1}\sqrt{\frac{2}{1+m^2}} = \sqrt{\frac{2m^2}{1+m^2}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{m^2}+1}} \; .$$

Ebből nyilvánvaló, hogy $t_2 > t_1$, ha $m > 1$ és $\frac{t_2}{t_1}$ felső határa $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ Ha például

$$m = 2, \text{ akkor } t_2 \approx 1{,}265\, t_1$$

$$m = 3, \text{ akkor } t_2 \approx 1{,}342\, t_1$$

Az m értékét 2-nél nem célszerű nagyobbra választani, mert egyrészt az éles metszés miatt a leolvasás pontatlanná válik, másrészt pedig nagyobb m esetén a szomszédos egyenesek közötti t távolság olyan kis mértékben nő, hogy az már gyakorlatilag lényegtelen.

Teljesen hasonló elv alapján készült a VII/a. nomogramm a tangens-tételre, itt azonban nem volt szükség a nomogramm megnyújtására a log tg függvény egyenletesebb viselkedése miatt. Ennek használatához az adott b és c értékekből előbb $(b-c)$ és $(b+c)$, az adott α-ból pedig $\frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$ számítandó ki, a leolvasott $\frac{\beta-\gamma}{2}$ és a már kiszámított $\frac{\beta+\gamma}{2}$ értékekből összeadással, illetve kivonással adódik β, illetve γ. E külön számítások levonnak a nomogramm értékéből, viszont viszonylagos egyszerűsége miatt így is használható.

Mindkét nomogramm kielégítő pontosságú, egyszerűen készíthetők és kezelhetők, kezelésük azonban tévesztési lehetőségekkel is jár. Ezért ezeket mozgóskálás, logarlécszerű megoldással is elkészítettük.

A VIII/a. és a VIII/b. nomogramm külön-külön a tangens-, illetve a sinustétel alkalmazásával készült, a VIII/c. nomogramm a kettőt egyetlen mozgóskálás nomogrammban egyesíti.

A nomogrammok skálái logaritmikusak. A távolságskálára a számok logaritmusait mértük fel 1-től 1000-ig, a szögskálákra pedig a tangens-, illetve a sinusértékek logaritmusait.

A VIII/a. nomogramm magyarázó rajza szerint, ha az adott két oldal összegéhez állítjuk ugyanezen két oldal különbségét, akkor az adott közbezárt szög alatt két szög összege, illetve különbsége megadja a még ismeretlen két szög értékét. (Az adott közbezárt szöget e nomogrammon külön is megjelöltük.)

Egy oldalból és két szögből az ismeretlen oldal, illetve két oldalból és az egyikkel szembeni szögből az ismeretlen szögek meghatározása a VIII/b. nomogramm segítségével történhet. Amint a magyarázó rajz is mutatja, itt az ismeretlen értékek közvetlenül adódnak.

Megoldhatnánk ezzel a nomogrammal akkor is a háromszöget, ha két oldala és az általuk bezárt szög adott. Ilyenkor úgy járhatunk el, hogy a két

ismert oldal mérőszámát egymás mellé állítjuk és utána a szögskálákon olyan egyvonalon fekvő értékpárt keresünk, amelyeknek összege a közbezárt szög kiegészítő szögével egyenlő. Az egy vonalon fekvő két szög az adott oldalakkal szemben fekvő szögek. Ez az eljárás mindenesetre nehézkesebb, mint a VIII/a. illetve VII/a. nomogramm használata.

A VIII/c. nomogramm magában foglalja az előbb ismertetett két nomogrammot. Ezen a már jól ismert skálák vannak. A nomogramm kezelését a magyarázó rajzok mutatják. Előnye ennek a nomogrammnak, hogy könnyen kezelhető, vele a háromszög megoldása egyszerű (egy lécen két beállítással elvégezhető) és az értékek leolvasása jóval egyszerűbben végezhető, mint az egyenessereges nomogrammoknál. Igaz viszont, hogy — különben egyszerű — elkészítése költségesebb, hosszadalmasabb, mint az egyenesseregeseké. Hátránya marad, hogy tangenstétel esetén még külön összeadási és kivonási műveleteket kell végezni.

IRODALOM

[1] М. В. Пентковский: Номография. (*M. V. Pentkovszkij:* Nomográfia) ГТТИ. Moszkva—Leningrád, 1949.

[2] *E. Soreau:* Nomographie ou traité des Abaques. (Chiron, Paris) 1921.

[3] *H. Körwien:* Graphisches Rechnen. (GMBH, Leipzig) 1952. 6. kiad.

НОМОГРАММЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЩЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Я. Ацель, Д. Беда, И. Гати и Ш. Тэрэк.

Резюме

Видимые на чертежак составные номограммы и номограммы с подвижными элементами, снабженные описанием способа употребления, служат для определения неизвестных данных общего треугольника в случае, когда даны одна сторона и два угла или две стороны и один угол. С помощью номограммы II, а еще проще, применяя номограмму III при упомянутых данных, а также и в том случае, если известны три стороны, имеется возможность определить одновременно величины всех прочих составных частей.

NOMOGRAMMES POUR LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES GÉNÉRAUX

J. ACZÉL, GY. BÉDA, I. GÁTI ET S. TÖRÖK

Résumé

Les nomogrammes d'alignements multiples resp. de points condensés resp. des points á deux côtes resp. d'éléments mobiles de l'article servent á trouver les dates inconnues d'un triangle général dont un côté et deux angles resp. deux côtés et un angle sont donnés. (Les nomogrammes II. et surtout le nomogramme III. peuvent servir aussi dans le cas où les trois côtés sont donnés et ces nomogrammes présentent tous les dates inconnues au même temps.)