

# INTEGRÁLGÖRBÉK MOMENTUMAINAK FELHASZNÁLÁSA DIFFERENCIÁLEGYENLETEK NUMERIKUS MEGOLDÁSÁNÁL

FREI TAMÁS

## Összefoglalás

Szerző a megoldandó differenciálegyenlethez hozzárendel olyan integrálegyenleteket, amelyeket a megoldás-függvény kielégít. Az integrálegyenletekben szereplő integrálokat mechanikus kvadraturával közelíti; az így kapott formulákban a keresett integrálgörbe bizonyos — önkényesen választott — helyeken felvett értékei szerepelnek. E formulák, ill. ezek rendszerei és különböző kombinációi alkalmasak közönséges differenciálegyenletek kerületérték- és kezdetiérték-feladatainak megoldására. A bemutatott módszerek mindkét problémakört illetően felveszik a versenyt az eddig ismert módszerekkel, kivéve a kezdeti-érték feladatok ú. n. kezdeti szakaszának számítását.

## Bevezetés

Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldásánál az egyik leggyakrabban alkalmazott módszer: egy integrálegyenletet definiálunk, amelynek — bizonyos feltételek alapján kiválasztott — rész-megoldásrendszere kielégíti az eredeti differenciálegyenletet. Felmerül az a kérdés, nem lehet-e a numerikus megoldást megkönnyíteni azáltal, hogy nem egy, hanem több integrálegyenletet rendelünk az adott differenciálegyenlethez, amelyeknek — bizonyos feltételek alapján kiválasztott — rész-megoldásrendszere közös és kielégíti az eredeti differenciálegyenletet. Jelen dolgozat célja, hogy egyrészt megmutassa, hogyan juthatunk el legegyszerűbben ilyen integrálegyenletek sokaságához és hogyan tudjuk azt a numerikus megoldásnál felhasználni. Már a bevezetésben szeretnők hangsúlyozni, hogy a bemutatott módszerek elsősorban a magasabbrendű differenciálegyenletek kerületérték-feladatainak numerikus megoldására lesznek alkalmasak. Tárgyalásunkat inkább a módszer egyszerű ismertetése céljából kezdjük az elsőrendű egyenletek esetével.

### 1. § Elsőrendű differenciálegyenletek

Azokkal a differenciálegyenletekkel foglalkozunk csak, amelyek

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

alakúak. Ismeretes [1], hogy az adott differenciálegyenlethez hozzárendelve az

$$(2) \quad y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi$$

integrálegyenletet, az (1) egyenlet bármely olyan megoldása, amely az  $x_0$  helyen az  $y(x_0)$  értéket veszi fel, kielégíti a (2) integrálegyenletet; ha továbbá feltesszük, hogy  $f(x, y)$  az  $x_0, y(x_0)$  helyet tartalmazó valamely  $G$  tartományban folytonos függvény és a (2) integrálegyenletnek csak a  $G$  tartományban folytonos megoldásaira szorítkozunk, úgy ezen megoldások kielégítik az (1) differenciálegyenletet és az  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltételt. Parciálisan integrálva azonnal belátható, hogy az (1) egyenlet bármely megoldása kielégíti az

$$(3) \quad \int_{x_0}^x y(\xi) d\xi = y_0(x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - \xi) f(\xi, y(\xi)) d\xi,$$

illetve általában az

$$(4) \quad \int_{x_0}^x (x - \xi)^k y(\xi) d\xi = y_0 \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k + 1} + \int_{x_0}^x \frac{(x - \xi)^{k+1}}{k + 1} f(\xi, y(\xi)) d\xi.$$

egyenletek bármelyikét is. (Ezen egyenletekhez úgy is eljuthatunk, ha a (2), majd a (3) stb. egyenleteket rendre integráljuk az  $x_0$  és  $x$  határok között.) Differenciálva az egyenleteket, közvetlenül adódik, hogy a (3), ill. (4) egyenletek bármelyikének folytonos megoldása egyszersmind (2)-nek is folytonos megoldása, s így kielégíti az (1) egyenletet is.

Ezen egyenletekben fellépnek a keresett integrálgörbe különböző rendű momentumai is, innen származik a módszer elnevezése.

Meg kell jegyeznünk, hogy a (4) egyenletekhez hasonlóan további integrálegyenleteket tudunk származtatni valamely  $\psi(x)$ , az  $[x_0, x]$  intervallumban differenciálható függvény segítségével. Az  $\int \psi(x) dx = \Psi(x)$  jelölést használva, parciális integrálással közvetlenül adódik, hogy az

$$(5) \quad \int_{x_0}^x y(\xi) \psi(\xi) d\xi = y(x_0) [\Psi(x) - \Psi(x_0)] + \int_{x_0}^x [\Psi(x) - \Psi(\xi)] f(\xi, y(\xi)) d\xi$$

egyenleteket (1) bármely megoldása kielégíti; viszont (5) bármely folytonos megoldása folytonos megoldása (2)-nek, s így (1)-nek is.

Fenti integrálegyenleteink mindkét oldalát közelítsük mechanikus kvadraturával, — éspedig jelen esetben ekvidisztans alappontokra támaszkodó mechanikus kvadraturával. E célból az  $[x_0, x]$  intervallumot  $n$  egyenlő részre osztva, az osztópontokat jelöljük  $x_i$ -vel ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Az integrálgörbe e pontokban felvett értékeit  $y_i = y(x_i)$ -vel, az  $f$  függvény megfelelő értékeit pedig  $f_i = f(x_i, y(x_i))$ -vel jelöljük. Az ekvidisztans beosztásnak megfelelő Newton—Cotes-féle számokat  $c_i$ -vel, a Laurent—Cotes-számokat  $l_i$ -vel jelöljük. (2), (3), (4), ill. (5) egyenleteink a következő összefüggéseket adják:

a) A Newton—Cotes formulákat használva

$$(2') \quad y_n = y_0 + (x_n - x_0) [c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n],$$

$$(3') \quad (c_0 y_0 + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = y_0 + [c_0 (x_n - x_0) f_0 + c_1 (x_n - x_1) f_1 + \dots + c_{n-1} (x_n - x_{n-1}) f_{n-1}],$$

$$(4') \quad c_0 (x_n - x_0)^k y_0 + c_1 (x_n - x_1)^k y_1 + \dots + c_{n-1} (x_n - x_{n-1})^k y_{n-1} = \\ = \frac{1}{k+1} [y_0 (x_n - x_0)^k + c_0 (x_n - x_0)^{k+1} f_0 + c_1 (x_n - x_1)^{k+1} f_1 + \dots \\ \dots + c_{n-1} (x_n - x_{n-1})^{k+1} f_{n-1}],$$

$$(5') \quad c_0 \psi(x_0) y_0 + c_1 \psi(x_1) y_1 + \dots + c_n \psi(x_n) y_n = \\ = \frac{1}{x - x_0} y_0 [\Psi(x_n) - \Psi(x_0)] + c_0 [\Psi(x_n) - \Psi(x_0)] f_0 + c_1 [\Psi(x_n) - \\ - \Psi(x_1)] f_1 + \dots + c_{n-1} [\Psi(x_n) - \Psi(x_{n-1})] f_{n-1}.$$

b) A Laurent—Cotes-formulák alkalmazásával kapcsolatban [amikor az  $(x_0, x)$  intervallumot  $2n$  egyenlő részre osztjuk], csak a (2) integrálegyenletből származó

$$(2'') \quad y_2 = y_0 + (x_2 - x_0) (l_1 f_1 + l_2 f_3 + l_3 f_5 + \dots + l_n f_{2n-1})$$

relációt említjük.

Legyenek ismeretesek az  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  értékek közelítőértékei:  $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ ; ezek segítségével számítani tudjuk az  $f_i$  értékek közelítőértékeit is, éspedig az

$$F_i = f(x_i, Y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

értékeket. Feladatunk, hogy ezek felhasználásával további pontokban keressünk megfelelő közelítőértékeket. A (2') egyenlet alapján pl. az  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}$  és az  $F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$  értékek segítségével számítani tudjuk  $Y_n$  értékét, a (4') egyenletek bármelyike segítségével pedig az  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-2}$ , és  $F_0, F_1, \dots, F_{n-2}$  felhasználásával az  $Y_{n-1}$  értéket — csak hogy általában egy nem-lineáris egyenlet megoldása árán. Ezzel szemben a (3'), (5'), ill. a (2'') egyenletek lineárisak az  $Y_n$  ismeretlenben, s így segítségükkel ennek értéke [t. i. az  $y(x_n)$  közelítőértéke] egyszerűen számítható. Megjegyezzük, hogy egyenleteink általában más-más közelítőértékét szolgáltatják ugyanannak az értéknek.

Nem foglalkozunk a »kezdeti szakasz« pontjainak számításával [jóllehet erre akár a (3') egyenlet, akár pedig a (2'), (3'), (4'), (5') egyenletek megfelelő rendszere alkalmas volna], mert ennél lényegesen egyszerűbb módszerek állnak rendelkezésünkre e feladat megoldásához, pl. a Runge—Kutta módszer, különböző numerikus iterációs eljárások stb.

A kezdeti szakasz közelítőértékeinek ismeretében a (3') egyenlet alkalmazása tűnik első pillanatra leghasználhatóbbnak, további közelítőértékek számításánál; a következő bekezdésekben azonban látni fogjuk, hogy nem a (3') formulával, hanem a (3'), (4'), (5') és (2') egyenletek bizonyos kombiná-

cióival jobb dolgoznunk ; sőt, e kombinációk megalkotásánál bizonyos mértékig figyelembe vehetjük a megoldandó differenciálegyenlet speciális tulajdonságait is. E célból vázlatosan megvizsgáljuk a formulák alkalmazásakor fellépő hibák forrásait.

Elsősorban a formulák »lépésközét«, azaz két szomszédos alappont távolságát, továbbá az integrációs intervallum hosszát, azaz az  $(x_0, x_n)$  távolságot kell rögzítenünk, hogy azután már konkrétan vizsgálhassuk az egyes formulákat. A lépésköz nagyságrendjét a megkívánt pontosság megszabja ; ezen belül úgy választjuk azt, hogy a 10-es számrendszerben lehetőleg kevés jegyű legyen. Az integrációs intervallumot illetően már néhány próbálkozás meggyőz bennünket arról, hogy annak növelése — általában — bizonyos határig fokozza a pontosságot, majd ismét romlik a számítás jósága. (Ezt a tényt a mechanikus kvadratura hibabecslő formulájával indokolni lehet. Tekintettel azonban arra, hogy ekvidisztáns alappontok esetén a hibabecslő-formula csaknem áttekinthetetlen, praktikus következtetést úgysem tudnánk az indokolásból kiolvasni.) Meggondolandó az is, hogy a formulák kezelése növekedő alappontszám esetén egyre nehezkesebbé válik, mert a tagok száma egyre nő. Az egyetlen praktikus következtetés, amit a *Runge—König*: Numerisches Rechnen c. könyvben [3] közölt vázlatos hibabecslő-formulából kiolvashatunk (l. 78. §. 271 o.), hogy páratlanszámú alappontra támaszkodó formulát érdemes csak használnunk. A könyv ezen megjegyzése a mi feladatunkkal kapcsolatban az integrációs intervallum növekedése miatt még sokkal inkább helytálló. Mi a következőkben elsősorban az öt alappontra támaszkodó formulákat vizsgáljuk, azonban hat alappontra támaszkodó relációkat is megadunk.\*

A kombinációs formulák alkalmazását az a tény indokolja, hogy a kvadratúrahiba mellett a formulák alapján számított közelítőértékeket a felhasznált közelítőértékek hibája is befolyásolja, sőt, a tapasztalat szerint ez az ú. n. »öröklött hiba« általában messze felülmúlja a kvadratúrahibát. Elsősorban ezt az öröklött hibát akarjuk csökkenteni. Fejezzük ki tehát az alkalmazott formulából a számítandó  $Y_n$ -et :

$$(6) \quad Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i F_i + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i Y_i.$$

Jelöljük  $Y_i$  hibáját  $\varepsilon_i$ -vel,  $F_i$  hibáját  $\eta_i$ -vel ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ), és keressük meg  $\varepsilon_n$  értékét. A kvadratúrahibát elhanyagoljuk, és feltesszük, hogy az  $\varepsilon_i$  és  $\eta_i$  értékek elég kicsinyek ; ekkor

$$\eta_i \approx f'_y(x_i, Y_i) \varepsilon_i.$$

Így :

$$(7) \quad \varepsilon_n \approx \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_i f'_y(x_i, Y_i) + \beta_i] \varepsilon_i.$$

\* Azért használtunk párosszámú alappontra támaszkodó formulát is, mert a kombinációképzésnél szóba jövő (3'), (4'), (5') és (2') egyenletek közül csak így lehetséges elegendőszámú, azonos nagyságrendű kvadratúrahibával rendelkező formulát kiválasztanunk.

Innen kiolvasható, hogy az öröklött hibát csökkentendő, az  $|a_i f'_y(x_i; Y_i) + \beta_i|$  értékeket mennél kisebbé kell tennünk a formulákban. Tekintettel arra, hogy  $f'_y$  értéke a számítás folyamán általában változik, nagyságrendi alakulását lépésről-lépésre figyelemmel kell kísérnünk és szükség esetén más formula alkalmazására kell áttérnünk.

Megjegyezzük, hogy a kvadratúrahibát is kompenzálni tudjuk bizonyos mértékig alkalmasan választott formulával. Feltételezhetjük ugyanis, hogy a kvadratúrahibák lépésről-lépésre csak keveset változnak (t. i. az integrációs tartományok szomszédos alappontokhoz tartozó közelítőértékek számításánál nagyrésztben átfedik egymást). Ha tehát sikerül olyan formulát találnunk, amelynek

$$|a_i f'_y(x_i, Y_i) + \beta_i| \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-2)$$

elég kicsi és e mellett

$$-0,5 > a_{n-1} f'_y(x_{n-1}, Y_{n-1}) + \beta_{n-1} > -1,$$

akkor az előzőleg számított érték hibájával korrigáljuk (legalábbis részben) a következő lépés kvadratúrahibáját.

Az eddig elmondottakat jól illusztrálja a következő példa:

Az  $y' = \frac{1}{10} y^2 - xy$ ;  $y(0) = 1$  kezdetiérték-feladatot először a (3') egyenletből adódó formulával oldjuk meg.  $h = 0,1$  nagyságú lépésközt választunk, öt alappontra támaszkodunk, azaz integrációs intervallumunkat 0,4 hosszúságúnak választjuk. A számítást tehát a (3') egyenletből adódó

$$Y_4 = 11,857143 Y_0 - 4,571429 Y_1 - 1,714286 Y_2 - \\ - 4,571429 Y_3 + 0,4 F_0 + 1,371429 F_1 + 0,342857 F_2 + 0,457143 F_3$$

formulával végezzük. A táblázatban közöljük az egyes közelítőértékek tényleges hibáját ( $\epsilon$ ) és azt a hibát, amelyet a (7) formula felhasználásával kap-

$x$	$Y$	$10^4 \epsilon_S$	$10^4 \epsilon_S$
0	1,0	0	
0,1	1,005046		6 tizedesjegyre pontos »kiindulási» értékek
0,2	1,000068	$\pm 0,5$	
0,3	0,985113		
0,4	0,960541	$+4 \pm 0,5$	$\pm 9$
0,5	0,926967	$-20 \pm 0,5$	$-19 \pm 7$
0,6	0,885460	$+90 \pm 0,5$	$+87 \pm 6$
0,7	0,836414	$-419 \pm 0,5$	$-411 \pm 6$

hatunk ( $\varepsilon_s$ ); az egyezés majdnem tökéletes, amit az mutatja, hogy esetünkben a kvadratúrahiba valóban elhanyagolhatóan kisebb az öröklött hibánál.

A táblázatból látható, hogy a (3') egyenlet használatakor ennél a feladatnál az öröklött hibák hatására milyen gyorsan nő az egyes közelítőértékek hibája. Az  $|\alpha_i f'_y + \beta_i|$  kifejezések átlagos értéke [az alkalmazott formula és a megoldásgörbe (0,3, 1,2) szakaszát tekintve] 4, 5 nagyságrendű; ez nemcsak kvalitatíve magyarázza a hibák gyors növekedését, hanem kvantitatíve is »meghatározza« a hibasorozat egyes értékeinek nagyságrendjét.

Ugyanezt a feladatot a (3') és (4'), valamint az eggyel kevesebb alapontra támaszkodó (2') formula bizonyos kombinációjából származó

$$Y_4 = 0,740780 Y_0 + 1,014026 Y_1 - 0,317922 Y_2 - 0,436884 Y_3 - \\ - 0,011045 F_0 + 0,277928 F_1 - 0,052461 F_2 + 0,278825 F_3$$

formulával is megoldottuk. Ekkor az  $|\alpha_i f'_y + \beta_i|$  ( $i = 0, 1, 2$ ) mennyiségek átlagos értéke [ismét a (0,3 ; 1, 2) szakaszra vonatkozóan] 0,7 körül van,  $\alpha_3 f'_y + \beta_3$  értéke pedig (ugyanezen intervallumban) - 0,5 és - 0,8 között változik. (Meg kell jegyeznünk, hogy az adott feladathoz a fentiniél »lényegesen jobb« formulát is találhatunk.) A hibasorozat így alakult :

$x$	$10^6 \varepsilon_T$	$10^6 \varepsilon_S$
0	0	
0,1—0,3	$\pm 0,5$	
0,4	$\pm 0,5$	$\pm 1,3$
0,5	$+3 \pm 0,5$	$\pm 1,5$
0,6	$+7 \pm 0,5$	$-1,5 \pm 1,5$
0,7	$+6 \pm 0,5$	$-3,6 \pm 1,5$
0,8	$+16 \pm 0,5$	$+0,5 \pm 1,5$
0,9	$+18 \pm 0,5$	$-1 \pm 2$
1,0	$+17 \pm 0,5$	$-4 \pm 2$
1,1	$+21 \pm 0,5$	$+2 \pm 2$
1,2	$+25 \pm 0,5$	$+4 \pm 2$

Ezen táblázatnál összehasonlítva  $\varepsilon_T$  és  $\varepsilon_S$  értékeit, látható, hogy a fenti formula alkalmazásakor az öröklött hibák mellett elég erőteljesen szobajön a kvadratúrahiba is : egyrészt azért, mert az öröklött hibák hatását a formula elég erősen letompította, másrészt, mert a (4') és az eggyel kevesebb pont-

számra támaszkodó (2') formula kvadratúrahibája fenti  $y(x)$  függvényt illetően nagyságrenddel nagyobb, mint (3')-é, s így a kombinációképzésnél a kvadratúrahiba növekedett.

A következőkben módszerünket egy példa kapcsán összehasonlítjuk a leggyakrabban alkalmazott eljárásokkal: az Adams—Nyström-féle extrapolációs eljárással és a Runge—Kutta-módszerrel.

Az

$$yy' + 1,7 y^2 = 13,125 e^{1,6x}; y(0) = 2,5$$

feladatot választottuk ki e célból, amelynek megoldása:

$$y(x) = \sqrt{e^{-3,4x} + 5,25e^{1,6x}}.$$

A vizsgált tartományban  $f'_y$  értéke  $-3,8$  és  $-4,2$  között van. Ennek megfelelően módszerünkkel kapcsolatban a következő kombinációs formulát használtuk fel:

$$19 Y_5 = 1,8571358 Y_0 + 12,2014736 Y_1 + 6,2894944 Y_2 - \\ - 4,4220368 Y_3 + 3,073933 Y_4 - 0,53905366 F_0 + 2,37808096 F_1 + \\ + 1,12166796 F_2 - 0,15819536 F_3 + 4,3164917 F_4,$$

amiből kerekítéssel:

$$Y_5 = 0,097744 Y_0 + 0,642184 Y_1 + 0,331026 Y_2 - 0,232740 Y_3 + \\ + 0,161786 Y_4 - 0,028371 F_0 + 0,125162 F_1 + 0,059032 F_2 - \\ - 0,008326 F_3 + 0,227184 F_4.$$

A megadott kezdetiértéken kívül módszerünk, ill. az Adams—Nyström-féle extrapolációs módszer alkalmazásakor 3 további függvényértéket számítottunk ki más módszerrel. A módszerünk alapján számított legelső értéket [az  $y(0,3)$  közelítőértékét] az

$$Y_4 = 0,155708 Y_0 + 1,307997 Y_1 - 0,244429 Y_2 - 0,219276 Y_3 - \\ - 0,032679 F_0 + 0,220376 F_1 - 0,073267 F_2 + 0,259439 F_3$$

(ötponos) formula segítségével kaptuk.

Az Adams—Nyström-módszerrel kapcsolatban az ötödik differenciákat még figyelembe vettük; a Runge—Kutta módszerrel kapcsolatosan a lépésközt  $0,3$  nagyságúnak választottuk. Így kb. azonos időt kellett fordítanunk a három módszernél a közelítőértékek számítására. Az eredményeket a következő oldalon található táblázatunk tartalmazza.

A hibabecslést illetően a kvadratúrahibával csak keveset foglalkozunk.

Az  $(n+1)$  darab ekvidisztans alappontra támaszkodó mechanikus kvadratúra esetén a hibát az

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

		módszerünkkel	Adams— Nyström- módszerrel	Runge—Kutta- módszerrel
x	y (x)	kapott eredmények		
-0,1	2,424604			
0	2,5			
0,1	2,62159			
0,2	2,78146			
0,3	2,9740	2,9741	2,9741	2,9812
0,4	3,1959	3,1959	3,1959	
0,5	3,4448	3,4449	3,4449	
0,6	3,7204	3,7205	3,7203	3,7280
0,7	4,0228	4,0229	4,0231	
0,8	4,3528	4,3530	4,3521	
0,9	4,7123	4,7123	4,7146	4,7201
1,0	5,1026	5,1027	5,0960	
1,1	5,5262	5,5262	5,5446	
1,2	5,9856	5,9856	5,9333	5,9946

függvény segítségével a következő alakban becsülhetjük [2]:

$$|H| \leq \frac{\text{Max } |g^{n+1}(x)|}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x_n} |\omega(\xi)| d\xi,$$

ahol  $g^{n+1}$  jelenti az integrálandó  $g(x)$  függvény  $n+1$ -edik deriváltját.

A gyakorlatban azonban ezen becslőformulánál sokkal jobban használható a következő közelítő hibabecslő formula:

$$H_n \sim \begin{cases} \Omega_n \left[ \frac{(n-1)h}{2} \right]^{n+1} \frac{g^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}, & \text{ha } n \text{ páratlan szám,} \\ \Omega_n \left[ \frac{(n-1)h}{2} \right]^n \frac{g^n(\zeta)}{n!}, & \text{ha } n \text{ páros szám,} \end{cases}$$

$$\text{ahol } \Omega_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2} - \sum_{i=0}^n \left(-1 + \frac{2i}{n}\right)^{n+2} C_i, & \text{ha } n \text{ páratlan szám,} \\ \frac{1}{n+1} - \sum_{i=0}^n \left(-1 + \frac{2i}{n}\right)^{n+1} C_i, & \text{ha } n \text{ páros szám,} \end{cases}$$



$h$  jelenti a lépésközt,  $C_i$  a Newton—Cotes-számokat, és  $x_0 < \xi < x_n$  [3].  $\Omega_n$  néhány értékét közöljük :

$$\Omega_3 = -\frac{2}{15}; \quad \Omega_4 = -\frac{8}{135}; \quad \Omega_5 = -\frac{1}{42}; \quad \Omega_7 = -\frac{56}{8505}.$$

Ennek alapján felírhatjuk bármely kombinációs formula hibabecslését. Így pl. a (3') formulával kapcsolatban a pontos értékek között fennáll a következő reláció :

$$y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f_i + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i y_i + \varepsilon_q$$

ahol  $\alpha_i$ , ill.  $\beta_i$  jelentése a (7) képletből ismert,

$$\varepsilon_q \doteq \frac{1}{c_n} [\varepsilon_{qj} - \varepsilon_{qb}],$$

ahol  $\varepsilon_{qj}$ , ill.  $\varepsilon_{qb}$  a (3') formula jobb-, ill. baloldalán szereplő kvadratúra hibája. Mivel a közelítő értékek között az

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i F_i + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i Y_i$$

egyenlet áll fenn, a két egyenlet kivonásával azonnal kapjuk a hibákra vonatkozó

$$(10) \quad \varepsilon_n \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \eta_i + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \varepsilon_i - \varepsilon_q \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i f'_y(x_i, Y_i) + \beta_i) \varepsilon_i - \varepsilon_q$$

összefüggést, ahol  $\varepsilon_i$  és  $\eta_i$  a (7) képletből ismert jelentésűek.

Több képlet kombinációjából álló formula hibabecslését hasonló módon végezhetjük.

Az elsőrendű differenciálegyenletek tárgyalását ki kellene egészítenünk olyan formulagyűjteménnyel, amelyből  $f'_y$  különböző értékeihez jól használható formulákat választhatnánk ki. Ilyen formulagyűjtemény azonban még nem készült.

## 2. § A magasabbrendű differenciálegyenletek kezdetiérték-feladatai

Ezt a problémakört csak érintjük. Az

$$(1) \quad y^{(k)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x))$$

alakú differenciálegyenlet numerikus megoldásával foglalkozunk. Módszerünk elvben az 1. §-ban alkalmazott módszerrel megegyezik.

Így pl. — az 1. §-ban elmondottakhoz hasonlóan — könnyen belátható, hogy az (1) egyenlet bármely megoldása kielégíti az

$$(2) \quad y^{(k-2)}(x) = y^{(k-2)}(x_0) + (x-x_0)y^{(k-1)}(x_0) + \\ + \int_{x_0}^x (x-\xi)f(\xi, y(\xi), \dots, y^{(k-1)}(\xi)) d\xi$$

integrálegyenletet. Ugyanígy igen egyszerűen belátható, hogy a (2) egyenlet bármely, egy  $G$  tartományban  $(k-1)$ -szer folytonosan differenciálható megoldása kielégíti az (1) differenciálegyenletet.

Felhasználjuk ezenkívül az

$$(3) \quad y^{(i)}(x) = y^{(i)}(x_0) + \int_{x_0}^x y^{(i+1)}(\xi) d\xi; \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k-3),$$

alakú integrálegyenletek rendszerét is, amelyeket nyilván bármely  $(i+1)$ -szer differenciálható függvény kielégít.

A numerikus megoldással kapcsolatban a kezdeti szakasz számításával itt sem foglalkozunk. Ismertnek tekinthetjük tehát az

$$\begin{array}{ll} y(x_0); y(x_1); \dots; & y(x_{n-1}) \\ y'(x_0); y'(x_1); \dots; & y'(x_{n-1}) \\ \dots & \dots \\ y^{(k-1)}(x_0); y^{(k-1)}(x_1); \dots; & y^{(k-1)}(x_{n-1}). \end{array}$$

értékrendszer

$$\begin{array}{ll} Y_0; Y_1; \dots; & Y_{n-1} \\ Y'_0; Y'_1; \dots; & Y'_{n-1} \\ \dots & \dots \\ Y_0^{k-1}; Y_1^{k-1}; \dots; & Y_{n-1}^{k-1} \end{array}$$

közelítőértékeinek rendszerét, ahol  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ , és  $x_n$  az  $[x_0, x_n]$  szakasz ekvidisztans osztáspontjai.

Ezen közelítőértékek segítségével számítani tudjuk az  $f(x_0, y(x_0), \dots, y^{(k-1)}(x_0)); f(x_1, y(x_1), \dots, y^{(k-1)}(x_1)); \dots; f(x_n, y(x_n), \dots, y^{(k-1)}(x_n))$  értékek

$$F_0; F_1; \dots; F_{n-1}$$

közelítő értékeit.

Az  $y_n$  helyen először  $y^{(k-2)}(x_n)$  közelítőértékét,  $Y_n^{k-2}$ -et számítjuk ki, és pedig a (2) egyenletből mechanikus kvadratúrával adódó:

$$(2') \quad Y_n^{k-2} = Y_0^{k-2} + (x_n - x_0) [Y_0^{k-1} + c_0(x_n - x_0) F_0 + \\ + c_1(x_n - x_1) F_1 + \dots + c_{n-1}(x_n - x_{n-1}) F_{n-1}]$$

formula segítségével.

Ezután  $Y_n^{k-3}$  értékét számítjuk, és pedig a (3) egyenletből mechanikus kvadratúrával előálló :

$$(3') \quad Y_n^{k-3} = Y_0^{k-3} + (x_n - x_0) [c_0 Y_0^{k-2} + c_1 Y_1^{k-2} + \dots + c_n Y_n^{k-2}]$$

egyenlet segítségével. Ugyanígy számítjuk egymásután

$$Y_n^{k-4}; Y_n^{k-5}; \dots; Y'_n; Y_n$$

értékét.

Az  $x_n$  helyen most már csak  $Y_n^{k-1}$  és  $F_n$  értéke ismeretlen. Ha az (1) differenciálegyenlet hiányos, t. i. az  $f$  függvény  $y^{(k-1)}(x)$ -től nem függ (ez a gyakorlatban elég sokszor előfordul), akkor  $F_n$  értékét egyszerű helyettesítéssel máris kiszámíthatjuk. Külön foglalkozunk tehát a hiányos és a nem-hiányos differenciálegyenletek esetével, hiszen  $F_n$  értékét az  $x_{n+1}$  helyhez tartozó közelítőértékek számításánál fel kell használnunk,  $Y_n^{k-1}$  értékére pedig csak az  $x_{2n}$  helyhez tartozó közelítőértékek számításánál van szükségünk.

A nem-hiányos differenciálegyenletek esetében  $F_n$  értékét csak  $Y_n^{k-1}$  ismeretében tudjuk kiszámítani.  $Y_n^{k-1}$  értékét (éppúgy mint az 1. §-ban  $Y_n$  értékét) az

$$(4) \quad \int_{x_0}^x y^{(k-1)}(\xi) d\xi = y^{(k-1)}(x_0)(x - x_0) + \\ + \int_{x_0}^x (x - \xi) f(\xi, y(\xi), y'(\xi); \dots; y^{(k-1)}(\xi)) d\xi$$

$$(5) \quad \int_{x_0}^x (x - \xi)^m y^{(k-1)}(\xi) d\xi = y^{(k-1)}(x_0) \frac{(x - x_0)^{m+1}}{m+1} + \\ + \int_{x_0}^x \frac{(x - \xi)^{m+1}}{m+1} f(\xi, y(\xi), y'(\xi), \dots, y^{(k-1)}(\xi)) d\xi$$

integrálegyenletek segítségével számíthatjuk. Elvileg már a (4) egyenletből mechanikus kvadratúrával adódó :

$$(4') \quad c_0 Y_0^{k-1} + c_1 Y_1^{k-1} + \dots + c_n Y_n^{k-1} = Y_0^{k-1} + \\ + c_0 (x_n - x_0) F_0 + c_1 (x_n - x_1) F_1 + \dots + c_{n-1} (x_n - x_{n-1}) F_{n-1}$$

formula alkalmas volna  $Y_n^{k-1}$  értékének kiszámítására.

Az így kapott közelítőértékre azonban az öröklött hibák befolyása épp oly nagy lenne, mint az 1. §-ban (3') közvetlen alkalmazásakor az  $Y_n$  közelítőértékére. Ezért az öröklött hiba csökkentése céljából itt is előnyös az 1. §

mintájára kombinációs formulákat használunk, amelyeket egyrészt a (4') egyenlet, másrészt az (5) egyenletekből mechanikus kvadratúrával adódó

$$(5') \quad c_0 (x_n - x_0)^m Y_0^{k-1} + c_1 (x_n - x_1)^m Y_1^{k-1} + \dots + c_{n-1} (x_n - x_{n-2})^m Y_{n-1}^{k-1} = \\ = Y_0^{k-1} \frac{(x_n - x_0)^{m+1}}{m+1} + \left[ c_0 \frac{(x_n - x_0)^{m+1}}{m+1} F_0 + \right. \\ \left. + c_1 \frac{(x_n - x_1)^{m+1}}{m+1} F_1 + \dots + c_{n-1} \frac{(x_n - x_{n-1})^{m+1}}{m+1} F_{n-1} \right]$$

egyenletek, végül az

$$(6) \quad y^{(k-1)}(x) = y^{(k-1)}(x_0) + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi), y'(\xi), \dots, y^{(k-1)}(\xi)) d\xi$$

integrálegyenletből mechanikus kvadratúrával kapott

$$(6') \quad Y_p^{k-1} = Y_0^{k-1} + (x_p - x_0) [c_0^* F_0 + c_1^* F_1 + \dots + c_p^* F_p]$$

egyenlet felhasználásával képezhetünk. A (6') egyenletben \*-gal jelöltük, hogy az együtthatók az  $(n-1)$ , ill.  $(n-2)$  alapponthoz tartozó Newton-Cotes-számokat jelentik;  $p$  ennek megfelelően  $(n-1)$ -gyel, ill.  $(n-2)$ -vel egyenlő.

A legkedvezőbb formula megkeresése itt lényegesen komplikáltabb feladat, mint az 1. §-ban, mert  $F$  hibáját sokkal több közelítőérték befolyásolja. Ezt a kérdést nem akarjuk részletesen megvizsgálni ehelyütt. Az öröklött hiba csökkentése érdekében megfelelőnek látszik az az eljárás, amikor csak az  $Y_i^{(k-1)}$  értékek hibáját vesszük tekintetbe. Ekkor — az 1. § mintájára — olyan formulát kell alkotnunk a (4'), (5'), (6') egyenletek segítségével, amelynél az  $|\alpha_i f'_{y^{k-1}} + \beta_i|$  értékek lehető kicsinyek ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$ ), e mellett  $-0,5 > \alpha_{n-1} f'_{y^{k-1}} + \beta_{n-1} > -1$ . Az  $\alpha_i$  és  $\beta_i$  értékek itt nemcsak jelentésükben, hanem számértékükben is egyeznek az 1. § hasonló kifejezésében szereplő értékekkel. Az ott alkalmasnak talált formulák tehát itt is közvetlenül felhasználhatók.

Hiányos differenciálegyenletek esetében sokkal egyszerűbb  $Y_n^{k-1}$  értékének számítása. Ilyenkor ugyanis  $F_n$  értékét  $Y_n^{k-1}$  ismerete nélkül számíthatjuk. Ennek következtében a (6) egyenletből (de most  $x = x_n$  választással) adódó

$$(6'') \quad Y_n^{k-1} = Y_0^{k-1} + (x_n - x_0) [c_0 F_0 + c_1 F_1 + \dots + c_n F_n]$$

relációt közvetlenül felhasználhatjuk  $Y_n^{k-1}$  számításához.

Megjegyezzük, hogy a lépésköz választására, ill. az integrációs intervallum hosszára vonatkozóan az 1. §-ban elmondottak változatlanul érvényesek. A hibabecslés elvileg szintén ugyanúgy történhet, mint az 1. §-ban.

Kiegészítőleg egy feladat kapcsán összehasonlítjuk módszerünket a leggyakrabban alkalmazott eljárással, a Störmer-féle extrapolációs módszerrel.

Az

$$y'' = 2y(1 + y^2); y(0) = 0; y'(0) = 1;$$

feladatot választottuk e célra. A feladat exakt megoldása :

$$y = \operatorname{tg} x.$$

x	u(x)	módszerünkkel		Störmer-módszerrel	
		kapott értékek és ezek hibáinak 10 <sup>6</sup> -szere			
-0,1	-0,10033				
0	0				
0,1	0,10033				
0,2	0,20271				
0,3	0,30934	0,30934	0	0,30934	0
0,4	0,42279	0,42279	0	0,42280	+1
0,5	0,54630	0,54630	0	0,54630	0
0,6	0,68414	0,68413	-1	0,68412	-2
0,7	0,84229	0,84228	-1	0,84224	-5
0,8	1,02964	1,02961	-3	1,02952	-12
0,9	1,26016	1,26008	-8	1,25988	-18
1,0	1,55740	1,55722	-18	1,55672	-68

A Störmer-módszert alkalmazva a negyedik differenciákat még figyelembe vettük; így a közelítőértékek számítására fordított idő a Störmer-módszer alkalmazásakor némileg nagyobb volt.

### 3. § Magasabbrendű differenciálegyenletek kerület- és sajátértékfeladatai

Amint a bevezetésben is említettük, módszerünk elsősorban az ilyen feladatok egyszerű, de mégis pontos numerikus megoldására alkalmas. Ezt egyrészt az a tény indokolja, hogy a kezdetiérték-problémáknál módszerünk bizonyos mértékig hátrányban volt a differencia-módszerekkel szemben, mert azoknál az integrációs intervallum egyetlen lépésközre terjedt csak ki általában; a kerületérték-feladatoknál viszont egyetlen integrációs intervallumnak kell tekintenünk a teljes tartományt. Másrészt nagymértékben fokozni tudjuk az alkalmazott mechanikus kvadratúra pontosságát azáltal, hogy nem ekvidisztans alappontokra, hanem pl. a Gauss-féle mechanikus kvadratúra alappontjaira támaszkodunk, hiszen itt az eljárás folytatásáról nincs szó.

Az

$$(1) \quad y^{(k)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x))$$

$k$ -adrendű differenciálegyenlet megoldásával foglalkozunk tehát bizonyos előírt

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi_\nu(\alpha; y(\alpha); y'(\alpha); \dots; y^{(\nu)}(\alpha)) &= b_\nu; \nu = 1; 2; \dots \\ \varphi_\kappa(\beta; y(\beta); \dots; y^{(\kappa)}(\beta)) &= c_\kappa; \kappa = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

kerületi feltételek mellett.

Az eddigiekhez hasonlóan az (1) egyenlethez hozzárendeljük az integrálegyenleteknek egy seregét. (1) bármely megoldása bármelyik integrálegyenletet kielégíti, viszont bármely integrálegyenletnek valamely  $G$  tartományban folytonos és elegendően sokszor folytonosan differenciálható megoldásai kielégítik az (1) egyenletet is. Így pl. a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$(3.1) \quad y^{(k-1)}(x) = y^{(k-1)}(\alpha) + \int_{\alpha}^x f(\xi, y(\xi), \dots, y^{(k-1)}(\xi)) d\xi,$$

$$(3.2) \quad \int_{\alpha}^x y^{(k-1)}(\xi) d\xi = y^{(k-1)}(\alpha)(x-\alpha) +$$

$$+ \int_{\alpha}^x (x-\xi) f(\xi, y(\xi), \dots, y^{(k-1)}(\xi)) d\xi;$$

$$(3.p) \quad \int_{\alpha}^x y^{(k-1)}(\xi) \cdot (x-\xi)^{p-1} d\xi = \frac{(x-\alpha)^p}{p} y^{(k-1)}(\alpha) +$$

$$+ \int_{\alpha}^x \frac{(x-\xi)^p}{p} f(\xi, y(\xi), \dots) d\xi;$$

$$(4.1/a) \quad y^{(k-2)}(x) = y^{(k-2)}(\alpha) + \int_{\alpha}^x y^{(k-1)}(\xi) d\xi$$

$$(4.1/b) \quad y^{(k-2)}(x) = y^{(k-2)}(\alpha) + (x-\alpha) y^{(k-1)}(\alpha) + \int_{\alpha}^x (x-\xi) f(\xi, y(\xi), \dots) d\xi;$$

$$(4.2/a) \quad \int_{\alpha}^x y^{(k-2)}(\xi) d\xi = (x-\alpha) y^{(k-2)}(\alpha) + \int_{\alpha}^x (x-\xi) y^{(k-1)}(\xi) d\xi;$$

$$(4.2/b) \quad \int_{\alpha}^x y^{(k-2)}(\xi) d\xi = (x-\alpha)y^{(k-2)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}y^{(k-1)}(\alpha) + \\ + \int_{\alpha}^x \frac{(x-\xi)^2}{2!}f(\xi, y(\xi), \dots) d\xi;$$

.....

stb. Végül :

$$(5.1/a) \quad y'(x) = y'(\alpha) + \int_{\alpha}^x y''(\xi) d\xi;$$

$$(5.1/b) \quad y'(x) = y'(\alpha) + y''(\alpha)(x-\alpha) + \int_{\alpha}^x (x-\xi)y'''(\xi) d\xi;$$

.....

$$(5.2/a) \quad \int_{\alpha}^x y'(\xi) d\xi = y'(\alpha)(x-\alpha) + \int_{\alpha}^x (x-\xi)y''(\xi) d\xi;$$

$$(5.2/b) \quad \int_{\alpha}^x y'(\xi) d\xi = y'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}y''(\alpha) + \int_{\alpha}^x \frac{(x-\xi)^2}{2!}y'''(\xi) d\xi;$$

.....

$$(6.1/a) \quad y(x) = y(\alpha) + \int_{\alpha}^x y'(\xi) d\xi;$$

$$(6.1/b) \quad y(x) = y(\alpha) + (x-\alpha)y'(\alpha) + \int_{\alpha}^x (x-\xi)y''(\xi) d\xi;$$

.....

$$(6.2/a) \quad \int_{\alpha}^x y(\xi) d\xi = y(\alpha)(x-\alpha) + \int_{\alpha}^x (x-\xi)y'(\xi) d\xi;$$

.....

A numerikus számítás keresztülvitele céljából az integrálegyenletek fentebb megadott sokaságából bizonyos számú egyenletet választunk ki, és a bennük szereplő integrálokat mechanikus kvadratúrával közelítjük. Legegyszerűbb az integrálokat azonnal a teljes  $[\alpha, \beta]$  közre számítani. Bizonyos

esetekben azonos számolási munkával nagyobb pontosságot tudunk azonban elérni, ha az  $[\alpha, \beta]$  intervallumot két vagy több részre osztjuk majd. Tegyük fel, hogy  $n$  darab belső osztáspontot veszünk fel az  $[\alpha, \beta]$  intervallumban. Ez általában  $(n + 2)k$  közelítőérték meghatározását teszi szükségessé. Közöttük a kerületi feltételek  $k$  relációt határoznak meg. Tehát  $(n + 1)k$  integrálegyenlet felvételére van szükség.

Az elmondottakat néhány példán fogjuk szemléltetni, amelyek kapcsán egyszersmind összehasonlítjuk módszerünk hatékonyságát az ismert módszerekével. Ezt megelőzően azonban néhány megjegyzést akarunk előre bocsátani.

A probléma természetéből következően a legnagyobb pontosságot (legkevesebb numerikus munka árán) nem a Gauss-féle mechanikus kvadratúra alkalmazásával érhetjük el, hanem egy olyan mechanikus kvadratúrával, amelynél az intervallum végpontjai is szerepelnek a kvadratúra alappontjai között. A többi alappontot és a súlyokat úgy állapítjuk meg, hogy a formula a lehető legmagasabb fokszámú polinomra is pontos legyen. Így pl.  $z \in [-1, +1]$  intervallumban négy, ill. öt alappont esetén alappontokul, ill. súlyokul a következőket kapjuk:

alappont	$-1$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$+\frac{1}{\sqrt{5}}$	$1$	
súly	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	
alappont	$-1$	$-\sqrt{\frac{3}{7}}$	$0$	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$1$
súly	$\frac{1}{20}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{64}{180}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{1}{20}$

Hogy így (ugyanakkora munkával) a Gauss-féle kvadratúránál nagyobb pontosságra számíthatunk, az egyszerűen abból a tényből következik, hogy az integrációs intervallum két szélső pontjában felvett függvényértékek és deriváltértékek egyenleteinkben mindenképp szerepelnek, Gauss-féle mechanikus kvadratúra alkalmazása esetén azonban nem használjuk fel őket.

Az integrációs intervallumot a kerületi feltételek megszabják. Esetleg ugyanakkora munkával nagyobb pontosságot érhetünk azonban el, ha az  $[\alpha, \beta]$  közt két vagy több, egymást esetleg részben átfedő szakaszra osztjuk, egyenleteinket az egyes szakaszokra külön-külön írjuk fel, és ezeket mint egyetlen egyenletrendszert oldjuk meg.

Első pillanatra meglepő az a tény, hogy olyan integrálegyenletekből indulunk ki, amelyek nem függetlenek, s a közelítőértékekre felírt egyenletrendszer általában mégis egyértelműen megoldható. Ennek igazolásával itt nem foglalkozunk; példáink azonban meggyőznek erről.

Az eljárás hibabeckslésével sem foglalkozunk, csak megjegyezzük, hogy a hibabeckslés elvégezhető az 1. § hibabeckslésének, valamint a lineáris egyenletrendszer megoldása hibabeckslésének alapján.

Első példaként az

$$y'' = -(y + x); \quad y(0) = y(1) = 0$$



kerületértékproblémát tárgyaljuk, amelynek exakt megoldása :

$$y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x.$$

Ezt a feladatot összehasonlításképp a Ritz-féle eljárással, továbbá a hibanégyzet-minimalizálásával is megoldottuk.

Ez utóbbi módszer abban áll, hogy a kerületi feltételeket kielégítő, határozatlan mennyiségeket is tartalmazó függvények közül azt a függvényt keressük meg, amelyre a differenciálegyenlet oldalaiból alkotott különbség négyzetének integrálja minimális. Feladatunknál az

$$a_1 (x - x^2) + a_2 (x - x^3)$$

függvényekkel dolgoztunk így.

Ugyanezt a függvényosztályt használtuk a Ritz-módszerrel való megoldásnál is.

Módszerünket a következő módon alkalmaztuk : a  $[0, 1]$  intervallumot 3 belső osztásponttal négy egyenlő részre osztottuk.

A megoldásnál a következő integrálegyenletekből adódó összefüggéseket használtuk fel :

- (6.1/a) egyenlet, a  $(0;0,5)$  szakaszon integrálva,
- (3.1) egyenlet, a  $(0;0,5)$  szakaszon integrálva (esetünkben  $k = 2$ ),
- (6.1/b) egyenlet, a  $(0;0,5)$  szakaszon integrálva,
- (6.1/b) egyenlet, a  $(0,25 ; 0,75)$  szakaszon integrálva,
- (6.1/b) egyenlet, a  $(0,5;1)$  szakaszon integrálva, és végül
- (6.1/b) egyenlet, a  $(0;1)$  szakaszon integrálva.

Ezen egyenletekben 6 ismeretlen szerepei, éspedig  $y(0,25)$ ;  $y(0,5)$ ;  $y(0,75)$ ;  $y'(0)$ ;  $y'(0,25)$  és  $y'(0,5)$  közelítőértéke. A 6 egyenletből álló rendszer egyértelműen megoldható.

Mindhárom módszernél a numerikus munka körülbelül azonos időt emésztett fel — az általunk javasolt módszer talán minimálisan többet. Az alábbiakban közlünk egy táblázatot, amelyben az  $Y_{0,5}$ -re és az  $Y_0$ -ra talált értékek hibáit hasonlítjuk össze.

	Pontos érték	Ritz-módszer	Hibája	Hibanégyzet m	Hibája	Momentum m	Hibája
$Y_{0,5}$	0,06975	0,06944	-0,45%	0,06807	-2,4%	0,07014	-0,55%
$Y_0'$	0,18840	0,19241	+2,1%	0,18754	-0,46%	0,19004	+0,87%

Második feladatként az

$$(1 + x) y'' + y' + \lambda (1 + x) y = 0 ; y'(0) = y(1) = 0$$

sajátértékproblémát tárgyaljuk. E feladatot Collatz (Numerische Behandlung von Differentialgleichungen c. könyvében) több különböző módszer segít-

ségével oldja meg, pl. a Ritz-módszerrel, differenciálegyenletek segítségével, továbbá néhány ú. n. többpontos differenciálegyenlet segítségével. Az eredményeket és a módszerek leírását a 101, 115, 119–120, továbbá a 140. oldalon találjuk meg.

Módszerünket alkalmazva a differenciálegyenletet ilyen alakban írjuk fel:

$$[(1+x)y'(x)]' = -\lambda(1+x)y(x).$$

Az egyenlet kétszeri, ill. háromszori integrálásával (és egyes, az egyenletekben szereplő integrálok parciális integrálás segítségével történő átalakításával) a következő két integrálegyenletet származtathatjuk:

$$\begin{aligned} (1+x)y(x) - y(0) - \int_0^x y(\xi) d\xi &= -\lambda \int_0^x (x-\xi)(1+\xi)y(\xi) d\xi; \\ \int_0^x (1+\xi)y(\xi) d\xi - xy(0) - \int_0^x y(\xi)(x-\xi) d\xi &= \\ &= -\frac{\lambda}{2} \int_0^x (x-\xi)^2(1+\xi)y(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

A felírt integrálegyenletekben szereplő integrálokat az  $x=0$ ;  $x=\frac{1}{2}$  és  $x=1$  pontokra támaszkodó mechanikus kvadratúrával (Simpson-szabály) közelítjük. Így kétismeretlenes (homogén) egyenletrendszert kapunk  $y(0)$  és  $y\left(\frac{1}{2}\right)$ , ill.  $\lambda$  közelítőértékei számára.

Az összehasonlításnál szóba jövő módszerek numerikus keresztülvitelére fordított időtartamokat illetően megjegyezzük, hogy a közönséges differenciálegyenletmódszer, továbbá az általunk javasolt módszer időráfordítás szempontjából a legkedvezőbb, a Ritz-módszer pedig a legkedvezőtlenebb, csaknem kétszerannyi munkát ad, mint az előbbieket.

Az első két (értékre legkisebb) sajátértékre a következő közelítéseket kapjuk:

*Collatz könyvének adatai:*

Pontos érték	101. oldal		115. oldal		119–120. oldal		Ritz-módszer		Módszerünk	
	érték	hiba	érték	hiba	érték	hiba	érték	hiba	érték	hiba
$\lambda_1$	3,2191	2,836 -12%	3,0413	-5,5%	3,0968	-3,8%	3,2185	-0,02%	3,1771	-1,3%
$\lambda_2$	22,9643	13,164 -43%	18,00	-22%	19,29	-16%	25,334	+10,3%	21,8229	-4,97%

Az eddig bemutatott két feladatnál a kerületi feltételek homogének voltak. A következőkben bemutatunk egy inhomogén kerületi feltételekkel kapcsolatos feladatot is. Az

$$y'' = y; y'(0) = 0; y(2) = 1$$

kerület-értékfeladat megoldása kapcsán pontosság és időráfordítás szempontjából is összehasonlítjuk a leggyakrabban alkalmazott módszert, a Ritz-módszert és módszerünk néhány változatát.

Ritz-módszerrel dolgozva

$$\varphi_1 = a_0 + x^2 \left[ (1 - a_0) \frac{1}{4} + a_1 (x - 2) \right],$$

ill.

$$\varphi_2 = b_0 + x^2 \left[ (1 - b_0) \frac{1}{4} + b_1 (x - 2) + b_2 (x - 2)^2 \right]$$

alakú függvényekkel közelítettünk.

Módszerünket ekvidisztans felosztás mellett és a 326. oldalon javasolt, a táblázatban optimálisnak nevezett felosztás mellett is kidolgoztuk. A függvényértékek közelítőértékeit a (4.1/b), (4.2/b) stb. egyenletekből származó megfelelő számú relációk segítségével számítottuk. Ezek ismeretében  $y'(2)$  közelítőértéke a (3.1) egyenlet segítségével közvetlenül adódik. Az első derivált további közelítőértékeinek számítására viszont egyrészt a (6.1/a) egyenletet, másrészt a (6.2/a) és (3.2); (6.3/a) és a (3.3) stb. egyenletekből származó relációkból elegendő számú egyenletet használtuk fel.

Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza :

	Pontos érték	2 együtthatós Ritz	3 együtthatós Ritz	1 belső osztópont	2 belső ekvidisztans osztópont	2 belső osztáspont és pedig *optimális*	3 belső osztáspont és pedig *optimális*
Időráfordítás órában	—	2	7	0,25	0,8	1,3	3,2
$y(0)$ értéke	0,26580	0,27166	0,26546	0,26316	0,26453	0,26589	0,265796
hibája	—	+2,16%	-0,13%	-0,99%	-0,48%	+0,03%	0,0000%
$y(0,5)$ értéke	0,41016	0,40542	0,41012	0,42105	—	—	0,410153
hibája	—	-1,16%	-0,01%	+2,58%	—	—	~0%
$y'(0,5)$ értéke	0,31237	0,31584	0,31098	0,30702	—	—	0,312363
hibája	—	+1,1%	-0,45%	-1,71%	—	—	~0%
$y'(1)$ értéke	0,96403	0,92164	0,95968	0,98245	0,97272	0,96443	0,964027
hibája	—	-4,4%	-0,45%	+1,91%	+0,9%	+0,04%	~0%

## IRODALOM

- [1] *I. G. Petrovskij*: Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről. Akadémiai Kiadó, 1952.  
[2] *I. P. Natanson*: Konstruktív függvénytan. Akadémiai Kiadó, 1952.  
[3] *C. Runge—R. König*: Numerisches Rechnen. Springer, Berlin.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОМЕНТОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т. Фрей

Резюме.

К решаемому дифференциальному уравнению найдены такие интегральные уравнения, которым удовлетворяет его решение. Приближения входящих в интегральное уравнение интегралов вычисляются с помощью механической квадратуры. В полученных таким образом формулах фигурируют значения искомой интегральной кривой находящиеся в некоторых произвольно выбранных точках. Упомянутые формулы, их системы и различные комбинации применимы для решения задач с начальными условиями и краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Описанные методы, в отношении обоих кругов задач, равноценны с известными до сих пор методами, за исключением вычисления исходной фазы задач с начальными условиями.

## ANWENDUNG DER MOMENTE DER INTEGRALKURVEN ZUR NUMERISCHEN LÖSUNG VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

T. FREI

*Zusammenfassung*

Einer Differentialgleichung werden Integralgleichungen zugeordnet, die durch die Lösungsfunktion erfüllt sind. Die in den Integralgleichungen auftretenden Integrale werden durch mechanische Quadratur approximiert; in den so erhaltenen Formeln treten einige — willkürlich gewählte — Funktionswerte der gesuchten Integralkurve auf. Mit diesen Formeln, bzw. mit ihren Systemen und verschiedenen Kombinationen kann man die Rand- bzw. Anfangswertaufgaben der gewöhnlichen Differentialgleichungen numerisch lösen. Die hier besprochenen Methoden sind, mit Ausnahme der Berechnungen des sogenannten Anfangsabschnittes der Anfangswertaufgaben, in keinem der oben genannten beiden Problemklassen den bisher bekannten Methoden unterlegen.