

# EGY MAGYAR AUTOMATIKUS MÁSOLÓBERENDEZÉS MÁSOLÁSI PONTOSSÁGÁNAK MATEMATIKAI VIZSGÁLATA

FAZEKAS FERENC

## Összefoglalás

A *Mintagépgyár* nemrég hozta nyilvánosságra *Hydrofix* nevű, hidraulikus elven működő, esztergapadra szerelhető automatikus másolóberendezését.

A szerző jelen cikkében a *Hydrofix*-ben lejátszódó másolási folyamat matematikai vizsgálatával foglalkozik. A szakirodalomban szokásos egyszerűsítő feltételekkel élve, a berendezés egy-két egyszerű (elsősorban a lineáris, holtjáték-mentes) matematikai modelljére végez itt minőségi tájékoztatásra alkalmas számításokat.

A szerző vizsgálja a másolási hiba nagyságának, durvább és finomabb becslésének, aszimptotikus magatartásának, ilyen hibák halmozódási módjának, csökkentésének, stb. a gyakorlatban jelentős kérdéseit és megállapításait konkrét sablon-meridián-görbékben szemlélteti. Érint továbbá a szerző olyan kérdéseket is, mint pl. a sablon előjavítása, a ferde kés-beállítás, stb.

Végül a szerző összehasonlítás céljából és a hazai kutatások részére ismerteti a *Turmakin* szovjet szerző cikkében leírt kétfokozatos, hidraulikus másolóberendezést és ennek egy-két javasolható változatát.

## Bevezetés

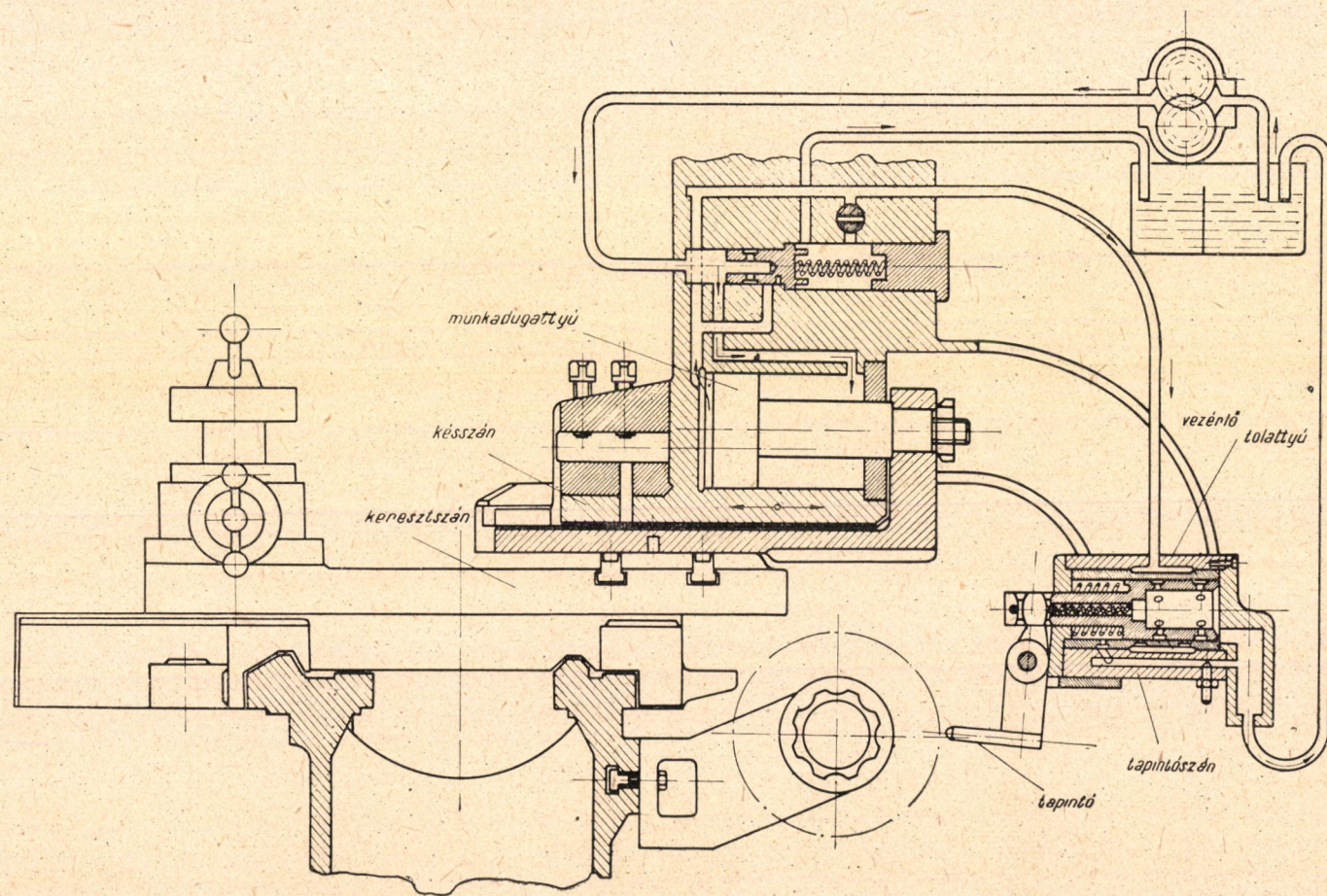
Az alábbiakban azon automatizálási tárgyú számítások első eredményeit ismertetjük, amely számítások a múlt év folyamán kezdődtek az *Alkalmazott Matematikai Intézet*ben, a *Mintagépgyár* felkérésére, e gyár szerszámgépen alkalmazott automatikus másolóberendezéseivel kapcsolatban.

A műszaki elmélet e nálunk eddig alig művelt területén csak a legutóbbi időben indult meg a munka — a külföldi, mindenekelőtt a gazdag szovjet szakirodalomra, valamint a szovjet és hazai gyakorlati tapasztalatokra támaszkodva. Így születtek a most ismertetendő kezdeti eredmények is. Számításaimról alkalmam volt beszámolni a *Magyar Tudományos Akadémia Mechanikai Automatizálási Szakbizottságának*, amely számos értékes útmutatással segítette további munkámat.

## 1. §

Ezek előrebocsátása után néhány szót e számítások tárgyáról, a *Mintagépgyár Hydrofix* nevű másolóberendezéséről!

Amint a sajtóból ismeretes, a *Mintagépgyár* a közelmúltban mutatta be a szakköröknek az általa tervezett és mintapéldányokban előállított



1. tábla



*Hydrofix* nevű készüléket. A bemutatónak az adott különös jelentőséget, hogy a *Hydrofix* az első hazai tervezésű és gyártmányú, esztergapadra szerelhető, hidraulikus elven működő automatikus másoló (kopírozó) berendezés. A Minta-gépgyár e sikeres kezdeményezésével jelentős lépést tett előre a hazai műszaki berendezések automatizálásának — ennek a szocializmus építése szempont-jából is döntő feladatnak — a területén. Az említett gyár már egy másik, ÉHM 200 (elektrohidraulikus másoló) nevű tökéletesebb készülék terveivel, kísérleteivel is szép előrehaladást ért el.

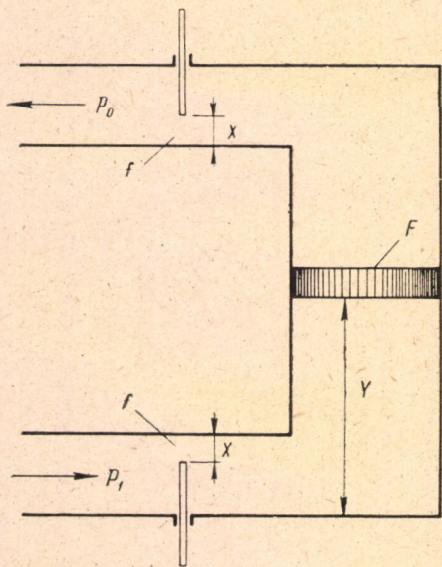
A *Hydrofix* szerkezete az 1. táblabeli elrendezési rajzon látható.

A készülék működéséről röviden a következőket mondhatjuk. — A for-gástest alakú mintadarabot, az ú. n. *sablont* az ú. n. *tapintó* tapogatja le. Elmoz-dulásával (amelyből a vele összeépített s a szerszámkést működtető szervó-motor elmozdulása levonódik) karos áttétel útján mozgásba hozza a *vezérlő tolattyút*, amely viszont az olajadagolást szabályozva a *szervómotort* működ-teti. Ennek dugattyúja az esztergapadhoz van erősítve, tehát a szervómotor hengere és a hozzá rögzített *szerszámkés* mozdul el. Ez utóbbi végül a *munka-darabra* másolja — több-kevesebb hűséggel — a sablon meridiángörbéjét.

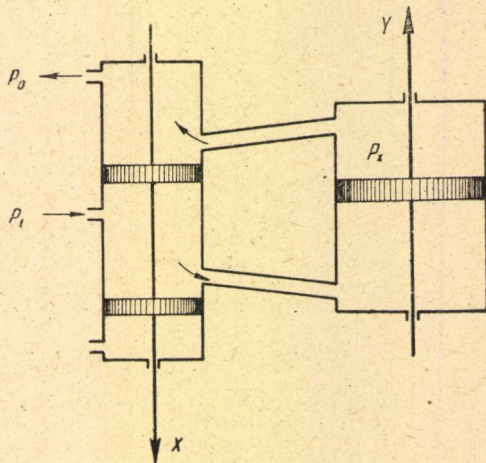
## 2. §

a) A másolóberendezésben központi helyet foglal el a szervómotor (vezérlőtolattyújával együtt). Tanulmányozzuk ezért előljáróban a *szervó-motor mozgásegységet* és vizsgáljuk meg a számítások megkönnyítését célzó egyszerűsítések, elhanyagolások lehetőségét.

Vegyük szemügyre a szervómotorból és vezérlőtolattyúból álló rendszer szerkezeti és elvi vázlatrajzát! (L. az 1. és 2. ábrát!) Jelölje  $f$  a tolattyú momen-tán nyílásának területét,  $p_1$  a rajta beömlő,  $p_x$  a henger dugattyúja mögötti,  $p_0$  a tolattyú nyílásán kiömlő olaj nyomását,  $\gamma$  az olaj fajsúlyát;  $F$  a henger dugattyújának homlokfelülete,  $X$  a ve-zérlőtolattyú elmozdulása,  $Y$  a dugaty-



1. ábra



2. ábra

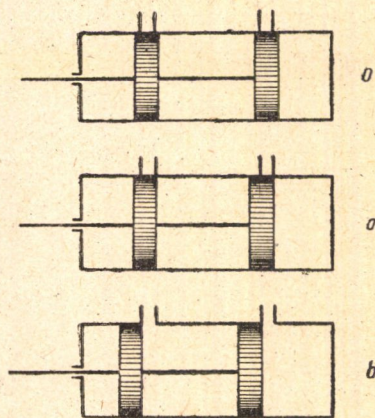


tyú elmozdulása. Legyen  $F$  mellett  $f$  elhanyagolhatóan kicsiny, azaz  $f \ll F$ . Egyelőre tegyük fel, hogy a hengerben a teljes  $p_1 - p_x$  nyomáskülönbséggel meghatározott potenciális energia átalakul kinetikai energiává (ideális szervomotor). Ez esetben az olajszerű folytonosságát kifejező és a Bernoulli-egyenletre támaszkodó differenciálegyenlet így alakul: \*

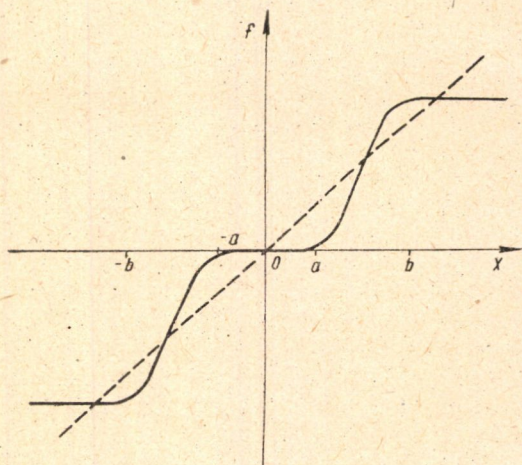
$$(1) \quad f \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_1 - p_x)} dt = f \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_x - p_0)} dt = F dY,$$

vagy a

$$p_1 - p_x = p_x - p_0 = \frac{p_1 - p_0}{2}$$



3. ábra



4. ábra

körülmény figyelembevétele és rendezés után:

$$\dot{Y} = \frac{f}{F} \sqrt{\frac{g}{\gamma} (p_1 - p_0)} = f S,$$

ahol

$$(2) \quad S = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{g}{\gamma} (p_1 - p_0)}.$$

Megjegyzendő, hogy a tolattyúnyílás  $f$  területe a tolattyú  $X$  elmozdulásának a függvénye:

$$(3) \quad f = \varphi(X).$$

Vizsgáljuk közelebbről e függvényt! A tolattyúábrázolt (l. a 3. ábrát) 0 és  $a$  helyzete között gyakorlatilag nem keletkezik nyílás,  $a$  és  $b$  helyzete között a nyílás  $f$  területe az  $X$  elmozdulás függvényében közel lineárisan változik,

\* L. pl. Айзерман cit. [4]



végül a  $b$  helyzetén túl a nyílás gyakorlatilag állandó marad. Ilyen meggondolásokkal magyarázható a *tolattyú karakterisztikájának* a 4. ábrán látható alakja.

b) Az ideális szervómotor után most lássuk a *valóságos szervómotor* viszonyait. Ennél nem alakulhat a teljes  $p_1 - p_x = \frac{p_1 - p_0}{2}$  nyomáskülönbség

sebességgé, mert ennek egy része felhasználódik a következő célokra:  $\alpha)$  *hidraulikus ellenállások* legyőzésére [ez függ a dugattyú sebességétől,  $\Delta p(\dot{Y})$ ],  $\beta)$  a mozgatott tömegek, elsősorban a dugattyú *gyorsítására*  $[M(Y)\ddot{Y}]$ , és  $\gamma)$  valamely hasznos *műszaki célra* [esetünkben a hengerből eszközölt forgácsolásra,  $N(Y)$ ]. A  $\beta)$  és  $\gamma)$  erők a hengerben működnek s ezért területegységre vonatkoztatott értéküket  $F$ -fel való osztás útján nyerjük. A *valóságos szervómotor mozgásegyenlete* tehát — ezek figyelembevételével — így alakul:

$$(4) \quad \dot{Y} = \frac{\varphi(X)}{F} \sqrt{\frac{g}{\gamma} \left[ p_1 - p_0 - \Delta p(\dot{Y}) - \frac{M(Y)\ddot{Y}}{F} - \frac{N(Y)}{F} \right]}$$

Az itt szereplő mennyiségek *nagyságrendje* pl. egy gyorsjárású szervómotor esetén a következő: \*

$$p_1 - p_0 \cong 5 \text{ kg/cm}^2, \Delta p \cong 0,5 \text{ kg/cm}^2, F \cong 10 \text{ cm}^2,$$

$$M(Y) \cong 0,0005 \text{ kgsec}^2/\text{cm}, N(Y) \cong 0,5 \text{ kg};$$

ezekkel a gyökalatti kifejezés:

$$\dot{Y} \cong 0,5 - \frac{0,0005 \ddot{Y}}{10} - \frac{0,5}{10} = 4,45 - 0,00005 \ddot{Y}$$

A most levezetett mozgásegyenlet némi átrendezéssel

$$\dot{Y}^2 + \frac{g\varphi^2(X)}{\gamma F^2} \left[ \Delta p(\dot{Y}) + \frac{M(Y)}{F} \ddot{Y} + \frac{N(Y)}{F} - (p_1 - p_0) \right] = 0,$$

vagy további rendezés és általánosítás után

$$(5) \quad \dot{Y} + \Phi(X, Y, \ddot{Y}) = 0$$

alakra hozható. Ezen  $Y$ -ban és  $\dot{Y}$ -ben *nem-lineáris differenciálegyenlet* exakt megoldása általában nem lehetséges. Ezért láthatóan kényszerítve vagyunk — legalább minőségi tájékoztatásra felhasználható számítások elvégzése érdekében — *egyszerűsítéseket, elhanyagolásokat* eszközölni, figyelembevéve a fentebbi számadatokat és a *tolattyú*  $f = \varphi(X)$  karakterisztikáját.

c) Szokás szerint a  $\Delta p(\dot{Y})$  és az  $\frac{N(Y)}{F}$  függvények (mérések útjántör-

tető) meghatározása helyett ezeket állandónak, tapasztalati átlagértékükkel egyenlőnek vesszük. Az utóbbit — a számadatok szerint — el is hanyagolhatjuk. Hasonlóan kezelhetjük az  $M(Y)\ddot{Y}/F$  tagot, annál is inkább, mert ez — az említett számadatok mellett — még  $a \cong g$  gyorsulás esetén is mind-

\* Айзерман cit. [4], 71—89. o.



össze  $0,05 \text{ kg/cm}^2$  nagyságrendű. Ilyen egyszerűsítések, elhanyagolások után mozgásegyenletünk a következő alakban írható :

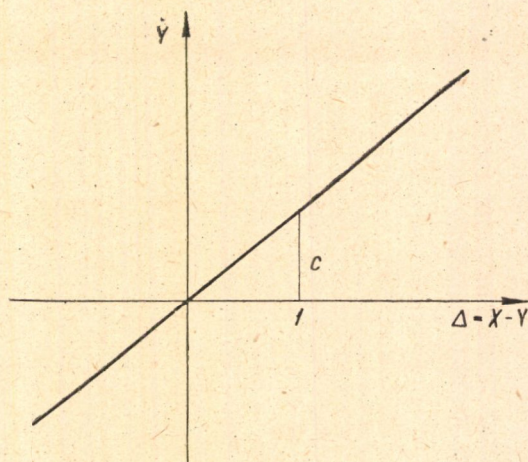
$$(6) \quad \ddot{Y} = S_0 \varphi(X), \text{ ahol } S_0 = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{g}{\gamma} (p_1 - p_0 - \Delta p^*)} ;$$

itt  $\Delta p^*$  tehát a hidraulikus ellenállásokra, esetleg forgácsoló és tehetetlenségi erőkre számításba vett tapasztalati állandó. Mivel  $p_1$  és  $p_0$  előírt értékűek, ilymódon az  $S_0$  állandónak tekinthető. Az

$$\ddot{Y} = S_0 \varphi(X)$$

mozgásegyenlet tehát azt jelenti ki, hogy a dugattyú  $\ddot{Y}$  sebessége arányos a tolattyú  $f$  nyílásával, mely utóbbi az  $X$  tolattyúelmozdulás  $\varphi(X)$  függvénye.

d) A szervomotor lineáris modelljének mozgásegyenletéhez jutunk, ha



5. ábra

a most említett  $f$  tollattyúnyílást az  $X$  tolattyúelmozdulás lineáris (homogén) függvényének tekintjük, azaz :

$$(7) \quad f = b X,$$

ahol  $b$  nem egyéb, mint a 4. ábrán szaggatva rajzolt [az  $Ob$  szakaszon a tényleges  $f = \varphi(X)$  görbét helyettesítő] egyenes irány-tg-e. Ezzel a szervomotor (holtjáték-mentes) lineáris modelljének mozgásegyenlete :

$$(8) \quad \ddot{Y} = cX, \text{ ahol } c = S_0 b.$$

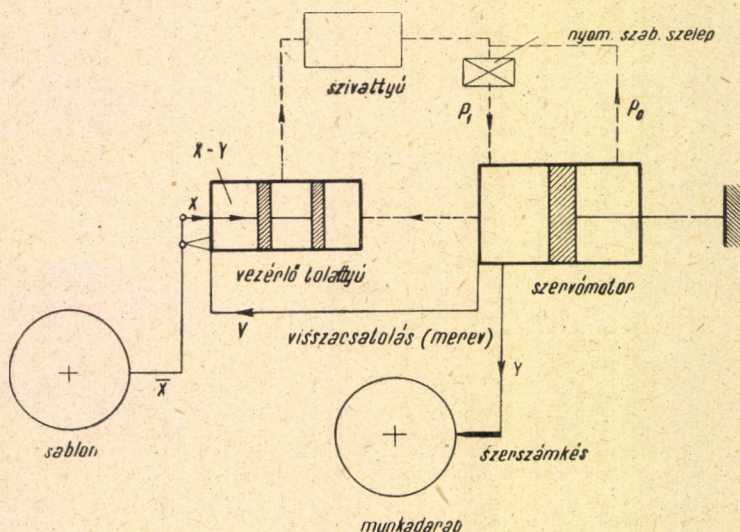
Az alábbiakban elsősorban e differenciálegyenlet [-nek a szerszám és tapintó közti merev visszacsatolást is figyelembe vevő változata] alapján teszünk majd a másolási folyamat lefolyásáról, a másolás pontosságáról s ennek javításáról néhány megállapítást. A fentebb részletezett elhanyagolások, egyszerűsítések miatt a matematikai modellre előállítandó eredmények természetesen



szükségképen eltérnek majd a valóságos folyamat mérési adataitól és *csak első közelítő, tájékoztató eredményeknek tekinthetők*. Mindazonáltal a valóságos szervomotor mozgásegyenletének bonyolultságára való tekintettel e tájékoztató megállapításokat is becsesnek kell minősíteni. Megjegyzendő, hogy a szakirodalomban rendszeresen használják a szervomotor fentebb felírt egyszerűsített elsőrendű lineáris differenciálegyenletét.\*

Ki fogunk térni végül röviden egy-két, a valósághoz közelebb álló tolattyú-karakterisztikájú modell vizsgálatára is.

e) Esetünkben — amint ez az 1. táblán és az 5. ábrán világosan látható — nem a tolattyúrúd  $X$  elmozdulása, hanem — a szervomotor [mozgó] hengere [és a hozzárögzített szerszámkés], valamint a vezértolattyú hengere közötti [az összeépítés folytán] *merev visszacsatolás* miatt — a tolattyú  $X$



6. ábra

elmozdulásának és a szerszámkés  $Y$  elmozdulásának  $\Delta = X - Y$  különbsége határozza meg a tolattyú  $f$  nyílását. Készülékünk *lineáris modelljének differenciálegyenlete* tehát \*\*:

$$(9) \quad \dot{Y} = c(X - Y) = c\Delta, \text{ azaz } \dot{Y} + cY = cX.$$

(L. az 5. ábrát!) Mégegyszer kiemeljük, hogy  $Y$  — szemben a fentebbiekkel — a *Hydrofix*-nél a szervomotor hengere és a hozzáerősített szerszám elmozdulását jelenti [u. i. esetünkben a dugattyú rögzítve van], az  $X$  pedig — miként eddig — a tolattyúrúd elmozdulását, amely a *karos áttétel* miatt *arányos* a tapintó  $\bar{X}$  elmozdulásával. Az egyszerűség kedvéért az  $X$ -et fogjuk mégis a tapintó elmozdulásaként emlegetni. Ez ugyanaz, mint az  $X/\bar{X}$  áttételt 1-nek

\* Айзерман cit. [4]

\*\* Tumarkin cit. [3]



venni. [Megjegyezendő, hogy  $X$ -szel, a tapintó elmozdulásával és  $X/\bar{X} = \alpha \neq 1$  áttétellel dolgozva, mozgásegyenletünk így alakulna :

$$\dot{Y} + c Y = \alpha X, \text{ ahol } \alpha = a c.$$

Mind az  $X$ , mind az  $Y$  az előtolás irányára *merőleges* elmozdulást jelent! A *Hydrofix* lineáris modellje a 6. ábrán látható, *blokkdiagramm* formájában.

### 3. §

a) Vizsgáljuk ezeketán matematikailag a *Hydrofix* holtidékmentes, lineáris karakterisztikájú modelljében lejátszódó másolási folyamatot — előbb általában, majd néhány, a gyakorlatban előforduló sablon-meridiángörbe esetére.

Egyelőre tegyük fel, hogy a másolási folyamat kezdetén a szerszámkés és a tapintó egyaránt *nyugalmi helyzetben* van, azaz a másoló kezdeti hibája *zérus*:

$$(10) \quad Y(0) = 0, \quad X(0) = 0, \quad \Delta(0) = X(0) - Y(0) = 0.$$

A másolási folyamat *differenciálegyenlete* és a *kezdeti feltétel* tehát így alakul :

$$(11) \quad \frac{dY(t)}{dt} + c Y(t) = c X(t), \quad Y(0) = 0.$$

b) Állítsuk elő a hiba kifejezését tetszőleges  $t$  időpontra vonatkozólag és ennek birtokában keressünk lehetőleg egyszerű hibabecslő formulát. E célból szükségünk van e differenciálegyenletnek a *kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldására*. A közismert elemi megoldási módszer helyett itt célszerűbb [a későbbiekre való tekintettel és az automatikában kialakult szokás szerint] az

$$(12) \quad L[Y(t)] = \int_0^{+\infty} Y(t) e^{-pt} dt = y(p)$$

módon definiált *Laplace-transzformációval* dolgozni, felhasználva a

$$(13,a) \quad L[\dot{Y}(t)] = py(p) - Y(0) = y'(p)$$

ismert *transzformációs* és az

$$(13,b) \quad L^{-1}[y_1(p) y_2(p)] = \int_0^{\infty} Y_1(\tau) Y_2(t - \tau) d\tau$$

*inverziós formulát*. Megjegyezendő, hogy a *Laplace-transzformáció* definíciója megköveteli, hogy  $Y(t) = 0$  legyen, ha  $t < 0$ ; ennek megfelelően :

$$L[Y(t)] = \int_0^{+\infty} Y(t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) e^{-pt} dt.$$



c) *Differenciálegyenletünk Laplace-transzformáltja*, a kezdeti feltétel figyelembevételével :

$$p y(p) + c y(p) = c x(p), \text{ azaz } y(p) = \frac{c}{p+c} x(p).$$

Ebből nyerhető a szerszám és tapintó elmozdulása (az ú. n. kimenő és bemenő jel) *Laplace-transzformáltjának* hányadosaként (a visszacsatolás miatt *zárt rendszerünk* ú. n. *átviteli (transzfer) függvénye* :

$$(14) \quad M(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{c}{p+c} = \frac{1}{1+Tp}, \quad T = \frac{1}{c};$$

továbbá a másolási hiba és a tapintó elmozdulása (a jelkülönbség és a bemenő jel) *Laplace-transzformáltjának* hányadosaként a *hiba-átviteli függvény* :

$$(15) \quad D(p) = \frac{\delta(p)}{x(p)} = \frac{x(p) - y(p)}{x(p)} = 1 - M(p) = \frac{p}{p+c} = \frac{Tp}{1+Tp}.$$

Megjegyzendő, hogy e fogalmak sok egyéb között fontos szerepet játszanak a *szervómechanizmusok modern* (nálunk még kevésbé használatos) *vizsgálati módszerében*. E széles matematikai alapokon álló, a matematikai eredményekből egyszerű fogalmakat, összefüggéseket, szabályokat, algoritmusokat, praktikus szimbolikát, szemléletes ábrákat kialakító ú. n. frekvencia-módszer különösen bonyolultabb lineáris rendszerek vizsgálatánál előnyös. E módszer (itt mellőzve!) matematikai alapjai és alkalmazása tekintetében utalok az Intézetben előkészületben lévő »*Automatikus szabályozások matematikai vizsgálata (különös tekintettel a másoló szerszámgépekre)*« c. cikkekre.\*

A berendezés átviteli függvényének *pólusai* (másként az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei) mértekadók a másolási folyamat *stabilitása* szempontjából ; kell, hogy e pólusok (gyökök) negatívak, ill. negatív valós részfűek legyenek. Egyszerű esetünkben nyilvánvaló a stabilitás, mert :

$$p_1 = -c < 0, \text{ lévén } c = \frac{1}{T} > 0.$$

A *másolási hiba* transzformáltja :

$$(16) \quad \delta(p) = D(p) x(p) = \frac{p x(p)}{p+c} = \frac{\dot{x}(p)}{p+c}.$$

Ebből látható, hogy :

$$(17) \quad \delta_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \delta(p) = \frac{x_0}{c}, \quad A_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{1}{c} \dot{X}_\infty;$$

\* Jelen problémákkal kapcsolatban *Török Vilmos* kartárs volt szíves a frekvencia-módszer használatát röviden bemutatni ; l. a következő cikket.

vagyis  $t \rightarrow \infty$ -nél a hiba kiküszöbölődik, ill. állandósul, amennyiben

$$X \rightarrow \text{const, ill. } X \rightarrow at + b.$$

A másolás *jóságára* jellemző a másolási sebesség, gyorsulás, magasabb deriváltak, valamint a másolási hiba *Laplace*-transzformáltjának viszonya, ill. e viszony magatartása  $p \rightarrow 0$  esetén. Most, mint a differenciálegyenletből világos, állandóan

$$(18) \quad J = \frac{\dot{y}}{\dot{\delta}} = \frac{c\dot{\delta}}{\dot{\delta}} = c.$$

A  $c$  tényező növelése tehát javítja a másolást.

d) Állapítsuk meg ezek után, visszatranszformálás útján, a szerszámkés elmozdulását, valamint a *másolás hibáját, tetszőleges  $t$  időpontra vonatkozólag*. A (14) és (15) alapján írható :

$$(19) \quad Y(t) = L^{-1} [M(p)x(p)] = L^{-1} \left[ \frac{c}{p+c} x(p) \right] = \\ = c \int_0^t X(\tau) e^{-c(t-\tau)} d\tau,$$

$$(20) \quad \Delta(t) = L^{-1} [D(p)x(p)] = L^{-1} \left[ \frac{\dot{x}(p)}{p+c} \right] = \\ = \int_0^t \dot{X}(\tau) e^{-c(t-\tau)} d\tau.$$

A 0 alsó határ helyett mindkét integrálban  $-\infty$  is írható, tekintve, hogy  $\tau < 0$ -ra  $X(\tau) = \dot{X}(\tau) = 0$ . Feltételezzük továbbá (egyelőre), hogy  $X(\tau)$  görbéje folytonos (ugrásmentes) és rész-szakaszonként sima. A másolási hiba *ilyen alakban is* előállítható :

$$(21) \quad \Delta(t) = L^{-1} \{ [1 - M(p)] x(p) \} = X(t) - c \int_0^t X(\tau) e^{-c(t-\tau)} d\tau = \\ = ce^{-ct} \int_{-\infty}^t [X(t) - X(\tau)] e^{c\tau} d\tau.$$

e) A másolási hiba most nyert pontos kifejezéseit felhasználhatjuk *hibabecslő formulák* előállítására. Jelöljük  $V$ -vel az  $X(\tau)$  görbe  $0 \leq \tau \leq t$  szakaszminti *legnagyobb meredekségét*, vagy másként a tapintó  $0 \leq \tau \leq t$  időközbeli legnagyobb sebességét :

$$V = \max_{[0,t]} |\dot{X}(\tau)|.$$



Ennek felhasználásával, a (20) alapján írható :

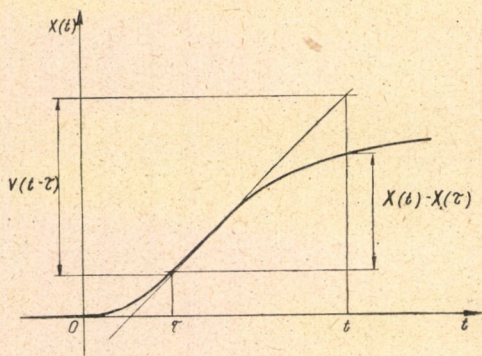
$$H = |A(t)| < V \int_{-\infty}^t e^{-c(t-\tau)} d\tau = \frac{V}{c}.$$

Ugyanez a (21)-ből is nyerhető, az

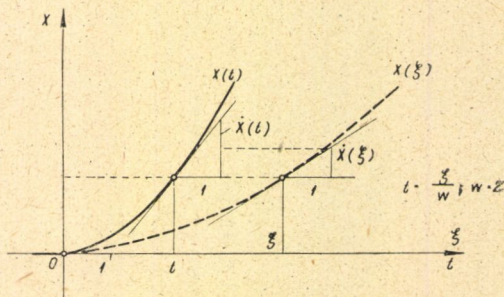
$$|X(t) - X(\tau)| < V(t - \tau), \text{ ha } -\infty < \tau < t$$

körülmény figyelembevételével :

$$H = |A(t)| < cV \int_{-\infty}^t e^{-c(t-\tau)} (t - \tau) d\tau = \frac{V}{c}.$$



7. ábra



8. ábra

A következő egyszerű hibabecslő formulát nyertük tehát :

$$(22) \quad H < \frac{V}{c}.$$

Figyelemre méltó, hogy differenciálegyenletünk értelmében :

$$|\dot{Y}| = cH$$

és a most megismert hibabecslő formula szerint :

$$V > cH, \text{ következésképpen } \max_{[0,t]} |\dot{X}| > |\dot{Y}|;$$

vagyis a szerszámkés sebessége a  $0 \leq \tau \leq t$  véges időközben nem éri el a tapintó legnagyobb sebességét. A  $H < \frac{V}{c}$  hibabecslő formulánk a  $0 \leq \tau \leq t$  véges időközre is megerősíti az állandósult hibára már korábban tett megállapításunkat ; a másolás pontossága e szerint javítható a  $c$  jósági tényező növelése és a tapintó  $V$  maximális sebességének csökkentése útján.

Megjegyzendő, hogy e  $V$ -t a lemásolandó sablon  $X(\xi)$ -meridiángörbéjének alakja határozza meg, ahol  $\xi$  az  $[X$  és  $Y$  tapintó-, ill. szerszám-elmozdu-

lásra merőleges irányú] *előtolási* elmozdulás, vagy másként a sablon és munkadarab elmozdulása. Ha ezen előtolás állandó  $\dot{\zeta} = w$  sebességű [mint a gyakorlatban rendszerint], azaz  $\zeta = wt$ , akkor a *tapintó*  $X(t)$  *út-időgörbéje* és a *sablon*  $X(\zeta) = X(wt)$  *meridiángörbéje* egymásból egyszerű nyújtással v. zsugorítással előállítható, vagyis e két görbe *hasonló*. Meredekségük  $\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{d\zeta} \frac{1}{w}$

értelmében egymással arányos (l. a 8. ábrát). E szerint a *másolás pontossága annál jobb, minél lankásabb a sablon meridiángörbéje*. Az  $X(t)$ - és az  $X(\zeta)$ -görbe hasonló lévén, a rövidség kedvéért az  $X(t)$  görbét fogjuk a továbbiakban sablon-meridiángörbéként emlegetni, vagy ami ugyanaz, a *w* előtolási sebességét 1-nek vesszük.

A (20) és (21) alapján a (22)-nél pontosabb, de kevésbé egyszerű *hiba-becselő formulát* is nyerhetünk. Pl. a (20) alapján :

$$(23) \quad H \leq V \int_0^t e^{-c(t-\tau)} d\tau = \frac{V}{c} (1 - e^{-ct});$$

a (21) alapján pedig :

$$(24) \quad \begin{aligned} H &\leq cV \int_0^t (t-\tau) e^{-c(t-\tau)} d\tau + c|X(t)| \int_{-\infty}^0 e^{-c(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{V}{c} [1 - e^{-ct} (ct + 1)] + e^{-ct} |X(t)|. \end{aligned}$$

E becsléseknek a (22)-nél *pontosabb* volta nyilvánvaló, lévén :

$$1 > 1 - e^{-ct}, \text{ ill. } V \left( t + \frac{1}{c} \right) > |X(t)|.$$

A (23) és (24) egyenlőtlenségek  $X(\tau) = a\tau$ , vagyis egyenes sablon-meridiánvonal esetén válnak egyenlőségekké ; a  $t \rightarrow \infty$  esetén pedig egyaránt a (22) egyenlőtlenségbe mennek át.

#### 4. §

A holtjáték-nélküli, lineáris karakterisztikájú *Hydrofix*-modell másolási hibájára vonatkozó *eme általános megállapításokat most szemléltessük néhány gyakorlati meridiángörbén*.

a) *Lineáris sablon-meridiángörbe másolása.*

Ekkor a sablon-meridiángörbe egyenlete (l. a 9. és a 10. ábrát) :

$$X_0(t) = 0, \text{ ha } t < 0; \quad X_0(t) = vt = wtg \alpha \cdot t, \text{ ha } t \geq 0,$$

ahol  $X$  a tapintónak az előtolás irányára merőleges elmozdulása,  $v$  ugyan-



ennek a sebessége,  $w$  az előtolás [állandó] sebessége. A (19) felhasználásával a munkadarab meridiángörbéjének egyenlete:

$$Y_0(t) = X_0(t) - \frac{v}{c}(1 - e^{-ct}), \quad t \geq 0.$$

tehát a másolási hiba:

$$\Delta_0(t) = \frac{v}{c}(1 - e^{-ct})$$

és nyilván  $|\Delta_0(t)| < \frac{|v|}{c}$ , összhangban a (20)- és (21)-gyel;  $t \rightarrow \infty$  esetén pedig:

$$\Delta_{0,\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_0(t) = \frac{v}{c},$$

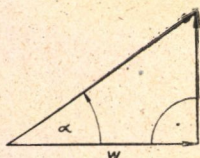
a (17)-nek megfelelően. A másolási hiba csökkentése tekintetében nyilvánvalóan helytálló a 3. § e)-ben tett megállapításunk.

#### b) Törött meridiánvonal másolása.

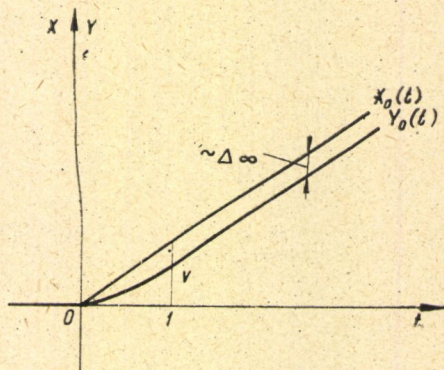
Legyen a lemásolandó meridiángörbe egyenlete (l. a 11. ábrát):

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ vt, & \text{ha } 0 \leq t \leq t_1 \\ vt_1, & \text{ha } t > t_1 \end{cases}.$$

Függvényünk az előbbi  $X_0(t)$  függvény segítségével a következő módon fejezhető ki (l. a 12. ábrát):



9. ábra



10. ábra

$$X(t) = X_0(t) - X_0(t - t_1),$$

ahol mindegyik függvény 0 értékű 0-nál kisebb argumentum-értékekre. A Laplace-transzformáció lineáris függvényművelet lévén, a munkadarab meridiángörbéjének egyenlete így írható:

$$Y(t) = Y_0(t) - Y_0(t - t_1),$$

a hiba kifejezése pedig:

$$\Delta(t) = \Delta_0(t) - \Delta_0(t - t_1).$$

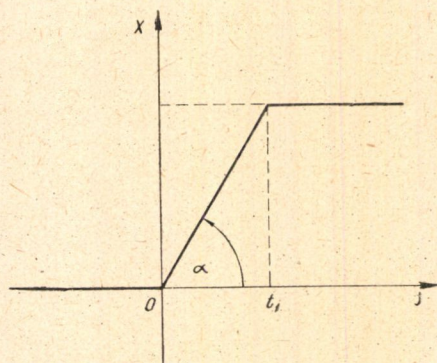


ahol  $Y_0(t)$  és  $\Delta_0(t)$  jelentése a fentebbi; valamennyi most említett függvény 0 értékű 0-nál kisebb argumentum-értékekre. Látható, hogy a  $t_1$ -nél gyakorlatilag állandósult  $\Delta(t_1) \approx \frac{v}{c}$  hiba  $t \gg t_1$  esetén aszimptotikusan kiküszöbölődik,  $\Delta_\infty = 0$ . Ez összhangban van a (17)-tel.

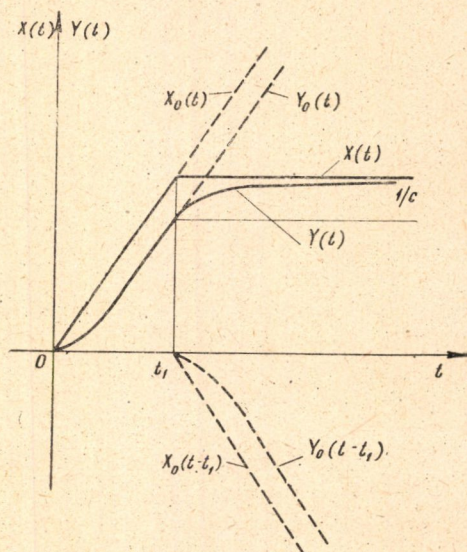
c) Háromszög alakú meridiángörbe másolása.

A 13. ábrán látható görbe egyenlete, az előbbi szerint

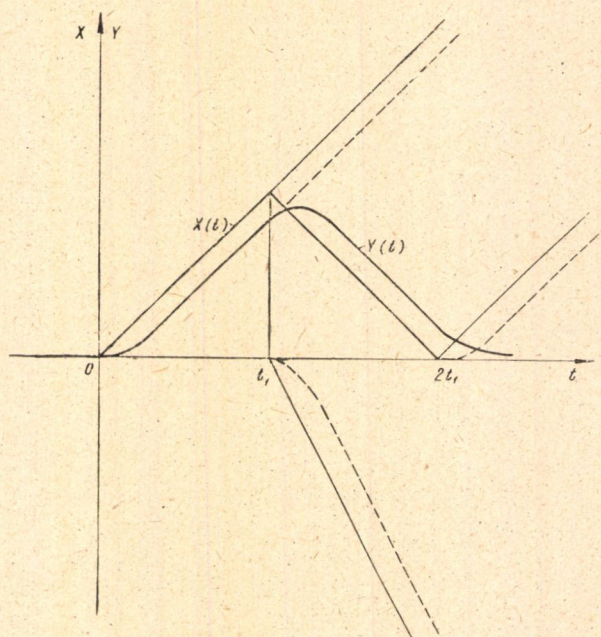
$$X(t) = X_0(t) - 2X_0(t - t_1) + X_0(t - 2t_1)$$



11. ábra



12. ábra



13. ábra



módon állítható elő s ennek megfelelően a munkadarab meridiángörbéjének egyenlete :

$$Y(t) = Y_0(t) - 2Y_0(t-t_1) + Y_0(t-2t_1),$$

a másolási hiba kifejezése pedig :

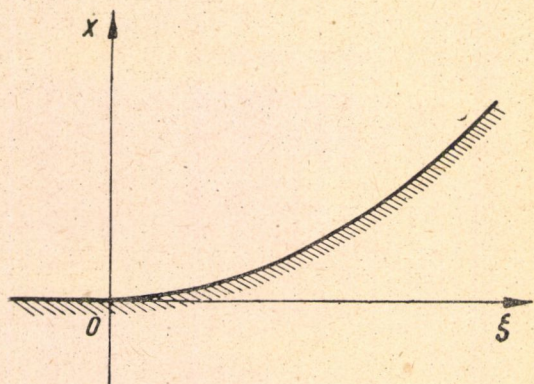
$$\Delta(t) = \Delta_0(t) - 2\Delta_0(t-t_1) + \Delta_0(t-2t_1),$$

ahol  $X_0(t)$ ,  $Y_0(t)$  és  $\Delta_0(t)$  jelentése a fentebbi, továbbá valamennyi függvény 0 értékű 0-nál kisebb argumentumokra. A hiba láthatóan  $t \gg 2t_1$  esetén aszimptotikusan elenyészik,  $\Delta_\infty = 0$ , összhangban a (17)-tel.

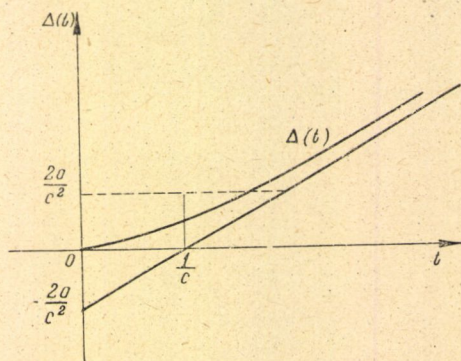
d) Másodfokú parabola meridiángörbe másolása.

Ez esetben (l. a 14. ábrát) :

$$X = a\xi^2 = \alpha (wt)^2 = at^2, \text{ ahol } a = \alpha w^2 \text{ és } t \geq 0.$$



14. ábra



5. ábra

A munkadarab meridiángörbéjének egyenlete :

$$Y(t) = X(t) - \frac{2a}{c} \left[ t - \frac{1}{c} (1 - e^{-ct}) \right],$$

a másolási hiba pedig (l. a. 15. ábrát) :

$$\Delta(t) = \frac{2a}{c} \left[ t - \frac{1}{c} (1 - e^{-ct}) \right].$$

Megfigyelhető, hogy a másolási hiba görbéje hasonló az  $\alpha$ -beli  $Y_0(t)$  görbéjéhez. Lévéen most

$$\max_{[0,t]} |\dot{X}(\tau)| = V = |\dot{X}(t)| = 2|a|t,$$



így a hiba abszolút értéke nyilván :

$$H < \frac{2|a|}{c}t,$$

a (22)-nek megfelelően, vagy pontosabb becsléssel :

$$H < \frac{2|a|t}{c} \left[ 1 - e^{-ct} \left( 1 + \frac{ct}{2} \right) \right],$$

a (24)-nek megfelelően.

## 5. §

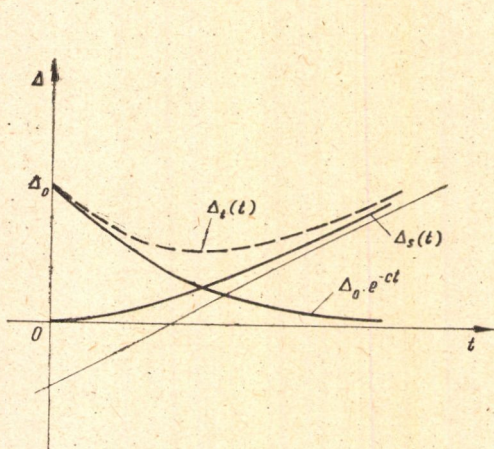
a) Az eddigi vizsgálatok során feltételeztük, hogy a másolás kezdeti hibája 0, azaz :

$$\Delta(0) = X(0) - Y(0) = 0.$$

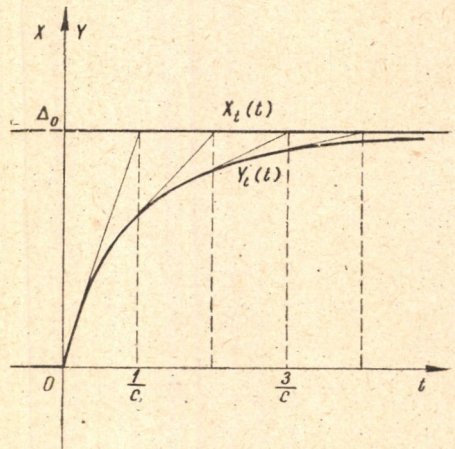
Most vizsgáljuk a másolási folyamatot 0-tól különböző kezdeti hibával, amikor is :

$$(25) \quad X(0) = \Delta_0 \neq 0, \quad Y(0) = 0, \quad \text{azaz } \Delta(0) = X(0) = \Delta_0.$$

A kezdeti  $\Delta_0$  hibát nyilvánvalóan úgy lehet tekinteni, mint a másolási folyamat előbbi szakaszának végső [esetleg már állandósult] hibáját. Gyakorlati szem-



16. ábra



17. ábra

pontból fontos tudni, hogy eme öröklött hiba hogyan befolyásolja az új másolási folyamat saját [vagyis öröklött hiba nélkül, 0 kezdeti hiba esetén adódó] hibáját.

Az öröklött és saját hiba egyszerű szuperpozíciójáról nyilván nem lehet szó, mert a szerszámkés sebessége a folyamat

$$\dot{Y} = c(X - Y) = c\Delta$$

differenciálegyenlet értelmében arányos a másolási hibával.

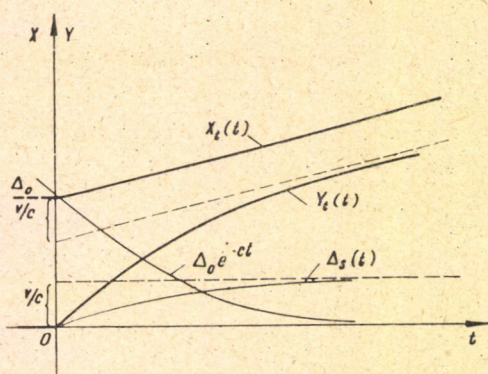


b) Másoljunk egy tetszőleges  $X_s(t)$  egyenletű meridiángörbét,  $\Delta_0$  kezdeti hibával. Ekkor a tapintó teljes elmozdulása, nyugalmi helyzetéhez képest:

$$(26) \quad X_t(t) = \Delta_0 + X_s(t).$$

A teljes másolási hiba a (21) szerint most így alakul [figyelembevétel, hogy  $X_t(t) = X_s(t) = 0$ , ha  $t < 0$ ]:

$$(27) \quad \begin{aligned} \Delta_t(t) &= ce^{-ct} \left\{ \int_0^t [X_s(t) - X_s(\tau)] e^{c\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 [X_s(t) + \Delta_0] e^{c\tau} d\tau \right\} = \\ &= ce^{-ct} \int_{-\infty}^t [X_s(t) - X_s(\tau)] e^{c\tau} d\tau + \Delta_0 e^{-ct} = \Delta_s(t) + \Delta_0 e^{-ct}. \end{aligned}$$



18. ábra

(L. a 16. ábrát!) Látható tehát, hogy a  $\Delta_s(t)$  sajáthiba nem a teljes  $\Delta_0$  öröklött hibára; hanem ennek exponenciálisan csökkenő és idővel elenyésző  $\Delta_0 e^{-ct}$  értékére szuperponálódik. A készülék eme — az öröklött másolási hibát idővel kiküszöbölő magatartása kedvező, mert meggátolja a hibák halmozódását.

Lássunk most néhány konkrét példát az öröklött és a saját másolási hiba együtműködésére.

c) Állandó meridiángörbe másolása, a szerszámkés kezdeti lemaradása esetén.

Legyen esetünkben (l. a 17. ábrát):

$$X_t(t) = X(0) + X_s(t) = \Delta_0 \text{ és } Y_t(0) = 0.$$

Ekkor a munkadarab meridiángörbéje a (19) szerint:

$$Y_t(t) = \Delta_0 (1 - e^{-ct}),$$

a teljes másolási hiba pedig:

$$\Delta_t(t) = \Delta_0 e^{-ct},$$

összhangban a (27)-tel, mert most  $A_s(t) = 0$  volt. A hiba  $t \rightarrow \infty$  esetén nyilván aszimptotikusan elenyészik, mégpedig annál gyorsabban, minél nagyobb a  $c$  jóssági tényező.

d) *Lineáris meridiángörbe másolása, a szerszámkés kezdeti lemaradása esetén.*

Legyen most (l. a 18. ábrát):

$$X_t(t) = A_0 + vt \quad \text{és} \quad Y_t(0) = 0.$$

Ez esetben a munkadarab meridiángörbéje és a teljes másolási hiba:

$$Y_t(t) = A_0(1 - e^{-ct}) + v \left[ t - \frac{1}{c}(1 - e^{-ct}) \right],$$

ill.

$$A_t(t) = \frac{v}{c}(1 - e^{-ct}) + A_0 e^{-ct} = A_s(t) + A_0 e^{-ct},$$

a (27)-nek megfelelően.

## 6. §

a) A másoló szerszámgépekkel végzett tömeggyártásban, a másolási hiba minimumra való csökkentésének módjait keresve, felvetődött a *sablon előjavításának* lehetősége.

Amint a számítások során láttuk, a munkadarab meridiángörbéje a lemásolt sablon-meridiángörbétől többé-kevésbé eltér — egyszerűbb esetekben közelítő számítással is követhetően. E módosulással számolva, nyilván *lehetséges a sablon meridiángörbét előzetesen úgy javítani, hogy ezt lemásolva, a munkadarabon* [elméletileg pontosan, gyakorlatilag közelítően] *éppen a kívánt meridiángörbe jelentkezzen.*

A kérdés *matematikai szempontból* így fogalmazható: miként alakítandó a sablon  $X(t)$  meridiángörbéje, hogy az adott differenciálegyenletű másolási folyamat során a munkadarabon előírt  $Y(t)$  meridiángörbe valósuljon meg.

b) A *Hydrofix*

$$\dot{Y} + cY = cX$$

differenciálegyenletű modelljével dolgozva, az előírt  $Y(t)$  függvényhez a keresett  $X(t)$  függvény a következő módon nyerhető, éppen a differenciálegyenlet alapján:

$$(28) \quad X(t) = Y(t) + \frac{1}{c} \dot{Y}(t).$$

A sablon keresett  $X(t)$  meridiángörbét ennélfogva a munkadarab előírt  $Y(t)$  meridiángörbéjének és az  $[Y(t)$  deriváltjával arányos]  $\frac{1}{c} \dot{Y}(t)$  függvény görbéjének szuperpozíciójával nyerjük. A

$$(29) \quad K(t) = \frac{1}{c} \dot{Y}(t)$$



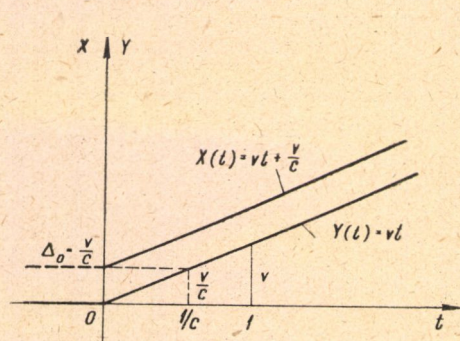
függvény határozza meg tehát a szükséges előjavítást. Ez utóbbi annál jelentéktelenebb, minél nagyobb a szervomotor  $c$  jósági tényezője.

Állapítsuk meg egy-két konkrét esetben az előjavított sablon-meridián-görbe egyenletét!

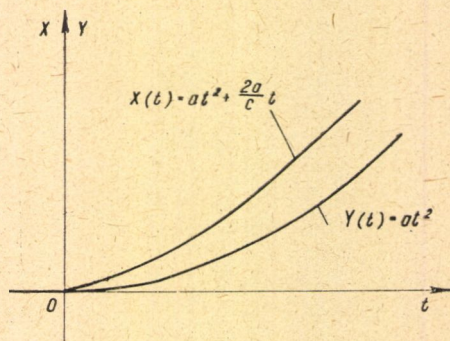
c) Legyen pl.  $Y(t) = vt$ ; akkor a fentebbi formula szerint:

$$X(t) = vt + \frac{v}{c},$$

vagyis a sablon-meridiángörbe a munkadarabon megvalósítandóhoz képest  $\frac{v}{c}$  állandó ráhagyással készítendő, ami gyakorlatilag igen egyszerűen megoldható. Másszóval  $\Delta_0 = \frac{v}{c}$  kezdeti hibával indítandó a másolás, a kívánt meridiánvonallal párhuzamos egyenes mentén. A (19) alapján, valamint az 4. § a)



19. ábra



20. ábra

és 5. § c) segítségével könnyű ellenőrizni, hogy az  $X(t) = vt + \frac{v}{c}$  görbe másolatként valóban a kívánt  $Y(t) = vt$  görbe adódik (l. a 19. ábrát!)

d) Vagy legyen pl.  $Y(t) = at^2$ ; ekkor (28) formula szerint:

$$X(t) = at^2 + \frac{2a}{c}t;$$

ez a (19) alapján, az 4. § a) és d) segítségével ellenőrizhető (l. a 20. ábrát).

## 7. §

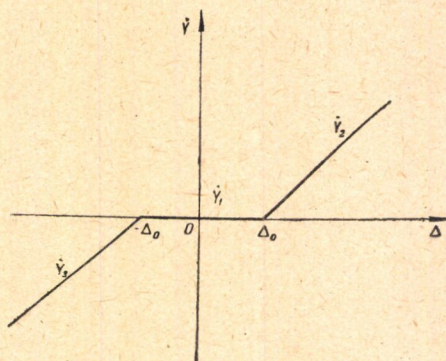
a) A 3 — 6. §-ban a *Hydrofix*-nek holtjáték-nélküli lineáris karakterisztikájú modelljét vizsgáltuk, első közelítésként, főleg minőségi tájékozódás céljából. Most lássunk egy holtjátékos, de egyébként lineáris karakterisztikájú modellt, amely valóságos esethez közelebb áll s így jobb közelítésre tarthat igényt.



Vizsgálódjunk tehát a 21. ábrán feltüntetett *szervomotor-karakterisztika* esetén. Számolva a  $\Delta_0$  holtjátékkal, valamint a készüléknek előre és hátra egyforma működésével, továbbá a középső holtszakaszon kívül lineáris karakteristikával, a másolási folyamat differenciálegyenlet-rendszere így alakul:

$$(30) \quad \left. \begin{aligned} \dot{Y}_1 &= 0, & \text{ha } -\Delta_0 \leq \Delta \leq \Delta_0 \\ \dot{Y}_2 &= c(\Delta - \Delta_0), & \text{ha } \Delta > \Delta_0 \\ \dot{Y}_3 &= c(\Delta + \Delta_0), & \text{ha } \Delta < -\Delta_0 \end{aligned} \right\}$$

A készülék folytonos, *ugrásmentes működésének* követelményéből folyik,



21. ábra

hogy a holtszakasz határain az 1. és 2., ill. az 1. és 3. differenciálegyenlet megoldásának ugyanazon értéket kell szolgáltatnia, azaz:

$$Y_1(\Delta_0) = Y_2(\Delta_0) \text{ és } Y_1(-\Delta_0) = Y_3(-\Delta_0).$$

b) Az *első differenciálegyenlet* általános megoldása nyilvánvalóan:

$$Y_1 = k.$$

Ha az eddigi  $Y(0) = 0$  kezdeti feltételt továbbra is fenntartjuk, akkor:

$$Y_1(t) = 0,$$

és megfelelően:

$$Y_{1/}(t_0) = Y_2(t_0) = 0$$

$$Y_{1b}(t_0) = Y_3(t_0) = 0; |\Delta| \leq \Delta_0.$$



Itt  $t_0$ -val jelöljük azon időpontot, amelyben az  $[\Delta] < \Delta_0$  hibával indulónak feltételezett]  $X(t)$ -re fennáll :

$$X(t_0) = \pm \Delta_0,$$

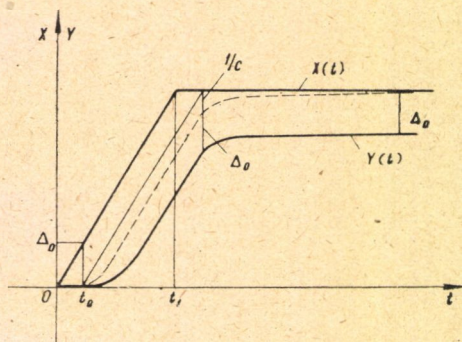
előre és hátra menetben egyforma működést feltételezve.

A 2. és 3. differenciálegyenlet, a

$$t' = t - t_0$$

új változó bevezetésével így alakul :

$$\frac{dY}{dt'} + cY = cX \mp c\Delta_0, \quad t' \geq 0; \quad |\Delta| \geq \Delta_0 \text{ és } Y(0) = 0.$$



22. ábra

A keresett partikuláris megoldást, Laplace-transzformáció segítségével, így nyerjük :

$$\begin{aligned} sy + cy &= cx \mp c\Delta_0 \frac{1}{s}, \quad y = \frac{cx}{s+c} \mp \frac{c\Delta_0}{s(s+c)} = \\ &= \frac{c}{s+c} x \mp \Delta_0 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+c} \right). \end{aligned}$$

Innen :

$$(31) \quad Y(t) = c \int_0^{t-t_0} e^{-c(t-t_0-\tau)} X(\tau) d\tau \mp \Delta_0 [1 - e^{-c(t-t_0)}].$$

E szerint esetünkben a holtjáték befolyása a másolási folyamatra kettős:  
 $\alpha)$  Egyrészt  $t_0$  idővel késlelteti az [egyébként, holtjáték nélkül végbemenő] másolási folyamatot.  $\beta)$  Másrészt  $\Delta_0$  aszimptotikusan állandósuló hibával növeli a másolás [egyébként, holtjáték nélkül jelentkező] hibáját.

$c)$  Példaként az 4. § b) alatt tárgyalt sablon-meridiángörbe és a munkadarab meridiángörbéje látható a 22. ábrán. A szaggatva rajzolt görbe a  $t_0$  késleltetéssel, de holtjáték-hiba nélkül nyerhető meridiángörbe. Az ábra szépen szemlélteti a holtjáték hátrányos hatását a másolási folyamatra.



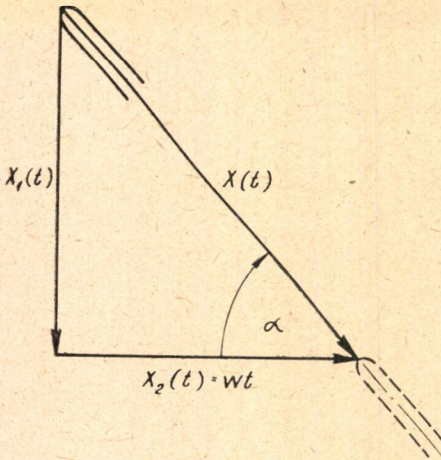
a) Végezetül még néhány szót a *Mintagépgyár* részére a *Hydrofix*-szel kapcsolatban végzett számításaim néhány további részletéről, amelyek részben másutt jelentek meg, részben pedig még folyamatban vannak.

b) A [9] cikkben kitérek a *ferde* (az előtolás irányához képest  $\alpha \neq \pi/2$  hajlásszögű) *tapintó- és késbeállításra* és vizsgálom ilyen feltételek mellett a gyakorlatban kritikus

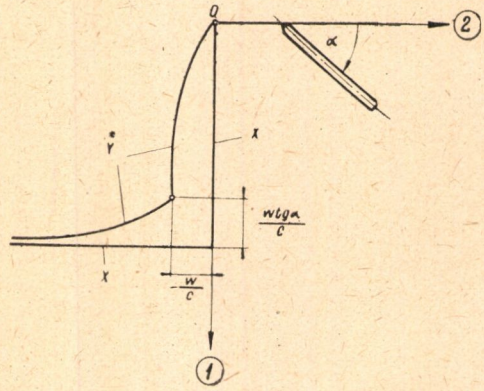
$$(32) \quad X(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ \frac{w}{\cos \alpha} t, & \text{ha } 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{w}{\cos \alpha} t_1, & \text{ha } t > t_1 \end{cases}$$

út-idő függvényű derékszögű lépcső másolását (l. a 23. ábrát).

Jelölje most  $X(t)$ , ill.  $Y(t)$  a tapintó, ill. a szerszámkés ferde elmozdu-



23. ábra



24. ábra

lását,  $X_1(t) = X(t) \sin \alpha$ , ill.  $Y_1(t) = Y(t) \sin \alpha$  ugyanezeknek az előtolás irányára merőleges,  $X_2(t) = X(t) \cos \alpha$ , ill.  $Y_2(t) = Y(t) \cos \alpha$  pedig az előtolás irányába eső elmozdulását.

A  $0 \leq t \leq t_1$  időszakban, az 4. § a) szerint :

$$Y(t) = \frac{w}{\cos \alpha} \left[ t - \frac{1}{c} (1 - e^{-ct}) \right], \quad A(t) = \frac{w}{c \cos \alpha} (1 - e^{-ct})$$

és a munkadarab meridiángörbéjének paraméteres egyenletrendszere (az előtoláshoz képest relatív mozgást tekintve) :

$$(33) \quad \begin{aligned} Y_1^*(t) &= Y_1(t) = wt g \alpha \left[ t - \frac{1}{c} (1 - e^{-ct}) \right], \\ Y_2^*(t) &= Y_2(t) - wt = -\frac{w}{c} (1 - e^{-ct}). \end{aligned}$$



A  $t > t_1$  időszakban pedig a 5. § c) szerint (az  $e^{-ct}$ -et 1 mellett elhanyagolva):

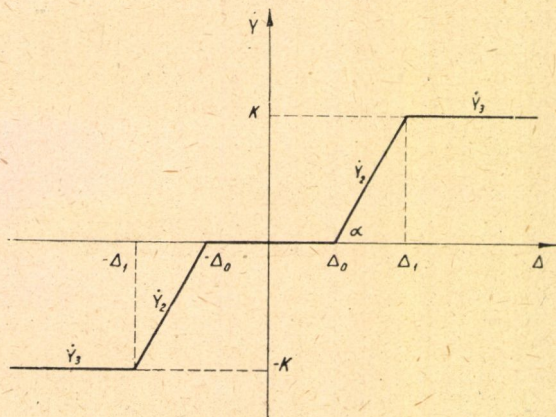
$$Y(t) = \frac{w}{\cos \alpha} \left[ t_1 - \frac{1}{c} e^{-c(t-t_1)} \right], \quad \Delta(t) = \frac{w}{c \cos \alpha} e^{-c(t-t_1)}$$

és a munkadarab meridiángörbéje:

$$(34) \quad \begin{aligned} Y_1^*(t) &= Y_1(t) = w t g \alpha \left[ t_1 - \frac{1}{c} e^{-c(t-t_1)} \right], \\ Y_2^*(t) &= Y_2(t) - w t = -w \left[ (t-t_1) + \frac{1}{c} e^{-c(t-t_1)} \right]. \end{aligned}$$

A legnagyobb másolási hiba tehát ferde irányban:

$$\Delta_{\max} = \Delta(t_1) \approx \frac{w}{c \cos \alpha}.$$



25. ábra

A  $t_1$  időpont után, *elégendő idő múltán* a munkadarab meridiángörbéje a sablonéhoz simul:

$$Y_1^* \approx w t g \alpha \cdot t_1 = X_1^*, \quad Y_2^* \approx -w(t-t_1).$$

(L. a 24. ábrát!)

c) Behatóbb vizsgálatra érdemes a *Hydrofix*-nek a [9] cikkben érintett

$$(35) \quad \begin{cases} Y_1 = 0, & \text{ha } |\Delta| \leq \Delta_0 \\ \dot{Y}_2 = c(\Delta \mp \Delta_0), & \text{ha } \Delta_0 < |\Delta| \leq \Delta_1 \\ Y_3 = \pm c(\Delta_1 - \Delta_0) = \pm K, & \text{ha } |\Delta| > \Delta_1 \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszerű modellje (l. a 25. ábrát).



d) A *Hydrofix* részletesen tárgyalt *lineáris modellje* — a 2. §-ban említett egyszerűsítések, elhanyagolások miatt — *csak minőségi tájékoztatásra alkalmas*. Éppen ezért a *Mintagépgyárban* kísérletek és ezekkel párhuzamosan Intézetünkben számítások vannak folyamatban, amelyek célja a *valóságos másolási folyamat hűvebb tükrözése*. Amint a 2. §-ban láttuk, a valóságos másolási folyamat *differenciálegyenlete* (a merev visszacsatolás és a lineáris, holtjátékmentes karakterisztika figyelembevételével) :

$$(36) \quad \dot{Y} = \frac{b(X-Y)}{F} \sqrt{\frac{g}{\gamma} \left[ p_1 - p_0 - \Delta p(\dot{Y}) - \frac{M(Y)}{F} \dot{Y} - \frac{N(Y)}{F} \right]}.$$

A gyök alatt a *tehetetlenségi tagot* változónak, a többit pedig tapasztalati átlagértékű állandónak véve, az előbbi differenciálegyenlet

$$(37) \quad \dot{Y} = c(X-Y) \sqrt{1 - a\dot{Y}}$$

alakot ölt. E nem-lineáris differenciálegyenlet, az  $|a\dot{Y}| \ll 1$  körülményre való tekintettel, binomiális sorfejtés útján, két tag figyelembevételével így alakul :

$$\dot{Y} \left( 1 + \frac{a}{2} \ddot{Y} \right) = c(X-Y).$$

E nem-lineáris differenciálegyenlet közelítő megoldása előállítható.

A gyök alatti *súrlódási tagot* is változónak, mégpedig a szokás szerint a sebességgel arányosnak véve, ez a nem-lineáris differenciálegyenlet adódik :

$$(38) \quad \dot{Y} = c(X-Y) \sqrt{1 - b\dot{Y} - a\ddot{Y}}$$

A *közelítő megoldás* mellett eredmény várható e nem-lineáris differenciálegyenletek *minőségi* (kvalitatív) *vizsgálatától*.

A gyök alatti  $p_1 - p_0$  tagot a *nyomásszabályozó szelep* működése befolyásolja s erre vonatkozólag mérések folynak.

A vezérlő tolattyú (35) karakterisztikájú *modelljének* vizsgálata szintén közelebb viszi a számításokat a valósághoz.

f) Érdekesnek ígérkezik továbbá tekintetbe venni az *olajáramlás mennyiségi és minőségi különbségeit* a vezérlőtollattyú zárt, kissé nyitott és erősen nyitott hornyai esetén — figyelemre méltó szovjet kezdeményezések alapján. Pl. *Lescsenko* [7] cikkében *tapasztalati formulát* javasol, mely jól egyezik mind az erősen túlfedett, zárt horony és lamináris olajáramlás esetére használatos

$$(39) \quad q_1 = \frac{\pi d \delta^3 p g}{12 \nu l \gamma}$$

formulával, mind az erősen nyitott horony és turbulens olajáramlás

$$q = \mu f \sqrt{2g \frac{p}{\gamma}}$$



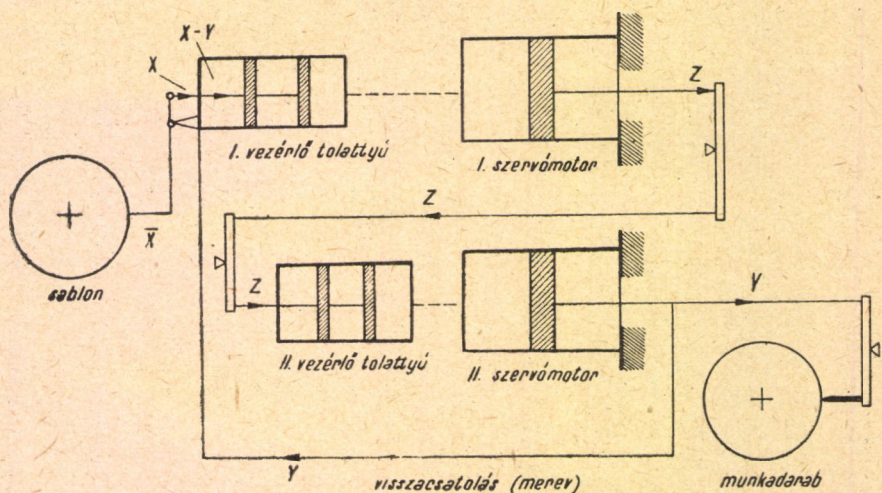
formulájával, s amely ugyanakkor — szemben ezekkel — használható kissé túlfedett, zárt, valamint kissé nyitott horony és megzavart lamináris olajáramlás esetén is, sőt felhasználhatónak látszik hidraulikus szervóberendezések számításánál is.

Számbavehetőek még olyan tényezők is, mint pl. a rúgók, az olaj összenyomhatósága lökésszerű terhelés esetén stb.

Újabb és újabb anyagot szolgáltatnak a számítások részére a *minta-gépgyári kutatások*. Előrehaladott állapotban van az *ÉHM 200* nevű, a *Hydrofix*szel rokon, nagyobb igényű és teljesítményű elektro-hidraulikus elven működő másolóberendezés tervezése és remélhető, hogy a számítások ehhez is nyújtanak segítséget.

## 9. §

a) Összehasonlítás céljából röviden ismertetek most *egy szovjet hidraulikus* másolóberendezést (l. bővebben a [3] cikkben), amelyhez a *Hydrofix*



26. ábra

bizonyos rokonságot mutat. Ez utóbbinál az I. szervómotor hengere nincs vezérlő tolattyújához visszacsatolva, hanem e helyett egy II. szervómotor vezérlő tolattyúját működteti és ennek a hengere van az I. vezérlő tolattyújához (mereven) visszacsatolva. Az I. fokozat kisebb méretű és gyorsjárású. E berendezés a két fokozat folytán lényegesen nagyobb erő kifejtésre képes; ez nagyobb szerszámgepek esetén fontos.

b) A *Hydrofix*nél alkalmazott egyszerűsítések mellett a berendezés differenciálegyenlet-rendszere (l. a 26. ábrát):

$$(40) \quad \left. \begin{aligned} \dot{Z} &= c_1 (X - Y) \\ \dot{Y} &= c_2 Z \end{aligned} \right\}$$



ill. összevont *differentiálegyenlete*:

$$(41) \quad \ddot{Y} + \omega_0^2 Y = \omega_0^2 X,$$

ahol  $\omega_0^2 = c_1 c_2$ , vagyis a jósági tényezők szorzata. E differenciálegyenlet *Laplace*-transzformáltja, valamint a berendezés (zárt rendszer) és a hiba *átviteli függvénye*:

$$(42) \quad p^2 y + \omega_0^2 y = \omega_0^2 x,$$

$$M = \frac{y}{x} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{1 + T^2 p^2},$$

$$D = \frac{\delta}{x} = 1 - M = \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{T^2 p^2}{1 + T^2 p^2}; \quad T^2 = \frac{1}{\omega_0^2}.$$

A munkadarab *meridiángörbéje* és a *másolási hiba* tehát:

$$(43) \quad Y = L^{-1}[Mx] = \omega_0 L^{-1} \left[ \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} x \right] = \omega_0 \int_0^t X(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau,$$

$$\Delta = L^{-1}[Dx] = \frac{1}{\omega_0} L^{-1} \left[ \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} p^2 x \right] = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \ddot{X}(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau,$$

feltéve, hogy  $X(0) = \dot{X}(0) = 0$ ; viszont:

$$(44) \quad \Delta = \frac{1}{\omega_0} \left[ \int_0^t \ddot{X}(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau + \dot{X}(0) \sin \omega_0 t \right],$$

ha  $X(0) = 0$ , de  $\dot{X}(0) \neq 0$ . A  $G = \max_{[0, t]} |\ddot{X}(\tau)|$  és  $V_0 = |\dot{X}(0)|$  jelölésekkel

a következő *hibabecslő formulát* írhatjuk fel:

$$(45) \quad H = |\Delta(t)| \leq \frac{2G}{\omega_0^2}, \quad \text{ill.} \quad H = |\Delta(t)| \leq \frac{2G}{\omega_0^2} + \frac{V_0}{\omega_0}.$$

c) A sablon középvonala felé mutató *egységlokkés* ( $X = 1$ , ha  $t \geq 0$ ;  $X = 0$ , ha  $t < 0$ ) esetén:

$$Y = \omega_0 \int_0^t \sin \omega_0(t - \tau) d\tau = 2 \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}; \quad \Delta = 1 - Y = \cos \omega_0 t.$$



Az  $X = vt$  egyenes másolásánál ( $v = w \operatorname{tg} \alpha$ ):

$$Y = v\omega_0 \int_0^t \tau \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau = X - \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

$$A = \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \frac{w \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{c_1 c_2}} \sin t \sqrt{c_1 c_2}; \quad H \leq \frac{|v|}{\omega_0}.$$

Az  $X = at^2$  görbe másolásánál pedig:

$$A = \frac{2a}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau = \frac{4a}{\omega_0^2} \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}; \quad H \leq \frac{4|a|}{\omega_0^2}.$$

d) Látható, hogy a másolás pontossága annál jobb, minél lankásabban kezdődik és minél kevésbé görbült a sablon meridiángörbéje [ $\operatorname{sign} \ddot{X}(\tau) = \operatorname{sign} \ddot{X}(0)$  esetén], továbbá minél nagyobb az  $\omega_0$  jósági tényező. A másolás itt szemmel láthatóan lengő, (oszilláló) jellegű, míg a *Hydrofix*-nél simuló (oszkuláló).

E kétfokozatos rendszer másolási hibája az egyfokozatoséhoz képest lényegesen lecsökkenthető, mint ezt a [3] cikk kiemeli. Az  $X = vt$  egyenes másolásánál pl. az 4.§a) és 9.§c) szerint (az egyfokozatos rendszer  $c$ -jét a kétfokozatos  $c_2$ -jével közel egyenlőnek véve) a maximális hibák aránya így alakul:

$$\varrho = \frac{A_{II \max}}{A_{I \max}} = \frac{\frac{v}{\omega_0}}{\frac{v}{c}} \approx \frac{\frac{v}{\sqrt{c_1 c_2}}}{\frac{v}{c_2}} = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}};$$

Tumarkin példájában (lévén az első fokozat a másodikhoz képest gyorsjárású, azaz  $c_1 \gg c_2$ ):  $\varrho \approx \frac{1}{20}$ . Az  $X = at^2$  görbe másolásánál pedig:

$$\varrho = \frac{A_{II \max}}{A_{I \max}} \approx \frac{\frac{4a}{\omega^2}}{\frac{2at}{c}} \approx \frac{2}{c_1 t},$$

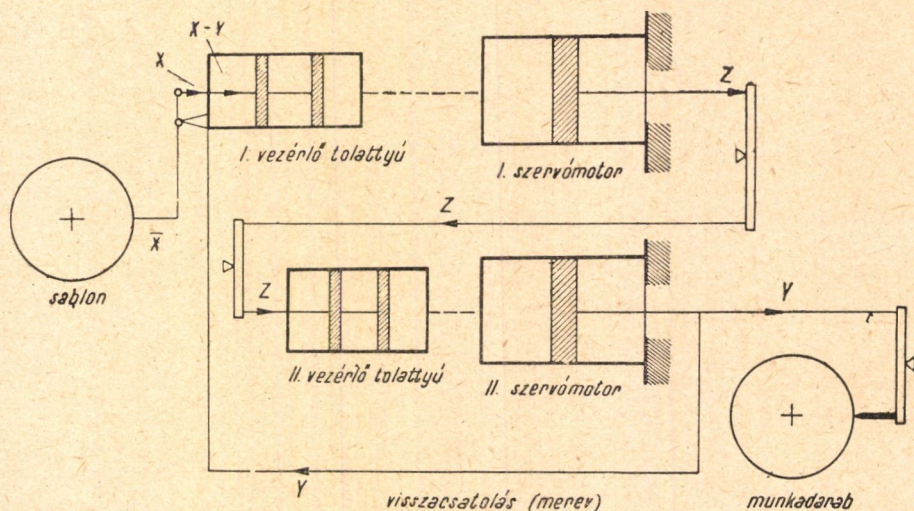
vagyis a kétfokozatos rendszer viszonylagos pontossága a parabolikus szakasz hosszával egyre növekszik.

Figyelemreméltó, hogy e készülék pontossága nemcsak mennyiségileg, hanem minőségileg is jobb a *Hydrofix*-énél, minthogy tetszőleges hosszú parabolikus szakaszt képes korlátos hibával, korlátos gyorsulás mellett másolni; ugyanis a differenciálegyenletünk értelmében:

$$(46) \quad \frac{\ddot{y}}{\delta} = \frac{\omega_0^2 \delta}{\delta} = \omega_0^2.$$

E kétfokozatos másolóberendezés elméletileg a *labilitás* határán működik, lévén a rendszer átviteli függvényének pólusai tiszta képzetesek:  $p_{1,2} = \pm i\omega_0$ ; ennek megfelelően a kitérített szerszám (az  $X = 0$  alapegyenés körül) elméletileg  $\omega_0$  körfrekvenciájú *csillapítatlan öngerjesztéseket* végez. A valóságos helyzet, főleg a súrlódási viszonyok miatt nyilván kedvezőbb; a berendezést kielégítő tapasztalatokkal használták is, a [3] cikk szerint. Mégis fel kell tételezni az említett elméleti határ-labilitás miatt, hogy a készülék a valóságban káros öngerjesztett rezgésekre hajlamos. A [3] cikkben szó esik egyébként a készülék bizonyos módosításairól.

A kétfokozatos rendszer fentebb részletezett *előnyei* miatt helyesnek látszik ez irányban is tájékozódni a hazai hidraulikus másolóberendezésekkel kapcsolatos kutatások során; annál is inkább, mert e kétfokozatos rendszer — a stabilitás biztosításán túl — aránylag egyszerűen tovább fejleszthető.



27. ábra

Megjegyzendő továbbá, hogy az említett kutatások során célszerű behatóan tanulmányozni a gőz- és gázgépek és motorok szabályozását, ahol régóta alkalmaznak hidraulikus szervóberendezéseket.

## 10. §

a) A fentebb tárgyalt kétfokozatos másolóberendezés elméleti stabilitását többféle módon lehet biztosítani. Egy javasolható egyszerű megoldás pl. a következő: a II. szervómotor nemcsak az I. szervómotor elé, hanem önmaga elé is mereven visszacsatolandó. Ez műszakilag megoldhatónak látszik, pl. az I. dugattyú-rúdja és a II. tolattyú-rúdja közti kétkarú emelő merev csatolással, a két ház összeépítésével és a II. dugattyú-rúdjának rögzítésével.

b) E készülék differenciálegyenlet-rendszere tehát:

$$(47) \quad \left. \begin{aligned} \dot{Z} &= c_1 (X - Y) \\ \dot{Y} &= c_2 (Z - Y) \end{aligned} \right\}$$



ill. differenciálegyenlete:

$$(48) \quad \ddot{Y} + 2\delta \dot{Y} + \omega_0^2 Y = \omega_0^2 X, \text{ ahol } 2\delta = c_2, \omega_0^2 = c_1 c_2.$$

A rendszer és a hiba átviteli függvénye:

$$(49) \quad M = \frac{y}{x} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\eta p + 1},$$

$$D = 1 - M = \frac{p^2 + 2\delta p}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} = \frac{T^2 p^2 + 2\eta p}{T^2 p^2 + 2\eta p + 1}.$$

A stabilitás most biztosítva van, mert  $M$  pólusai  $\delta > 0$  és  $\omega_0^2 > 0$  miatt, valamint az  $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 = c_2^2 \left( c_1^2 - \frac{1}{4} \right) > 0$  esetet (periodicitást) feltételezve negatív valós részűek. A másolási hiba tehát,  $X(0) = \dot{X}(0) = 0$  feltevéssel:

$$(50) \quad \Delta = L^{-1} \left[ \frac{p^2 + 2\delta p}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} x \right] = L^{-1} \left[ \frac{\ddot{x} + 2\delta \dot{x}}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{X}(\tau) e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau + \frac{2\delta}{\omega} \int_0^t \dot{X}(\tau) e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau.$$

c) A sablon középvonala felé irányuló *egységugrás* másolási hibája pl.

$$\Delta_1(t) = L^{-1} \left[ D \frac{1}{p} \right] = L^{-1} \left[ \frac{p + 2\delta}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} \right] =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\delta}.$$

Az ú. n. túlszabályozás csupán néhány százalékos lehet és ennek megfelelően

$$\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2c_1 c_2}{\sqrt{4c_1 c_2 - c_2^2}} = 1,03 \sim 1,07,$$

ami meghatározza a  $c_1/c_2$  arányt.

d) A rendszer *jóssági foka*:

$$(51) \quad J = \frac{\dot{y}_0}{\delta_0} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_0^2}{p + 2\delta} = \frac{\omega_0^2}{2\delta} = c_1.$$

A berendezés üze me tehát a *Hydrofixére emlékeztet*: ugyanis állandósult szer számkés-sebesség mellett állandósult hibával tud dolgozni. E hiba azonban itt sokkal kisebb, lévén,  $c_1 \gg c_2$ ; *Tumarkin* példájában  $c_1/c_2 \approx 400$ . A fentebb ismertetett kétfokozatos berendezéssel szemben ennek önrezgései (stabilitásának megfelelően) *csillapodók*, a hiba lengései szintén (az alaphibát, amelyre a rezgések szuperponálódnak, a másolandó görbe határozza meg).

A fentebbi előnyökkel szemben azonban az említett visszacsatolás *rontja* az egyszerű kétfokozatos berendezés másolási minőségét olyan értelemben, hogy nem képes tetszőleges hosszú parabolagörbe-szakaszt korlátos hibával másolni. E mellett a két merev visszacsatolás elhanyagolható tömegűnek merevvé, törekennyé teszi. Célszerű ezért rugalmasabb és a másolást minőségileg javítani képes egyéb megoldásokat is megvizsgálni.

## 11. §

a) Próbálkozzunk pl. a gázmotoroknál gyakran alkalmazott csatolással, a folyadécsillapítást és rúgót tartalmazó ú. n. *izodrom csatolással*,\* pl. a két szervómotor között. Az izodrom csatolás elhanyagolható tömegűnek tekintve, a berendezés *differenciálegyenlet-rendszere* így alakul:

$$(52) \quad \left. \begin{aligned} \dot{Z} &= c_1 (X - Y) \\ \dot{V} + k_1 V &= k_2 \dot{Z} \\ \dot{Y} &= cV \end{aligned} \right\},$$

ill. *sztatikus erősítésre* is képes izodrom csatolás esetén:\*\*

$$(53) \quad \left. \begin{aligned} Z &= c_1 (X - Y) \\ V + k_1 V &= k_2 (\dot{Z} + k_3 Z) \\ \dot{Y} &= c_2 V \end{aligned} \right\}.$$

Az *első esetben* a berendezés differenciálegyenlete:

$$(54) \quad \ddot{Y} + b\dot{Y} + cY = Xc, \text{ ahol } b = k_1, c = c_1 c_2 k_2.$$

Látható, hogy a *másolás minőségileg itt sem jobb*, mint a fentebbi két merev visszacsatolásos készüléknél, mert átviteli függvényeik hasonló alakúak. Mindenesetre ez műszakilag megnyugtatóbb szerkezet.

b) A *második esetben* a berendezés differenciálegyenlete:

$$(55) \quad \ddot{Y} + b\dot{Y} + c\dot{Y} + dY = c\ddot{X} + dX, \text{ ahol } b = k_1, c = c_1 c_2 k_2, d = c_1 c_2 k_2 k_3.$$

\* Айзерман cit. [4], 107–108.

\*\* Айзерман cit. [4], 145–147.



Az átviteli függvények most :

$$(56) \quad M = \frac{cp + d}{p^3 + bp^2 + cp + d} \quad \text{és} \quad D = 1 - M = \frac{p^3 + bp^2}{p^3 + bp^2 + cp + d}.$$

A jósági tényezők:

$$(57) \quad \dot{y}_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{cp + d}{p^2 + bp} = \infty, \quad \ddot{y}_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{cp + d}{p + b} = \frac{d}{b},$$

vagyis e készülék a szerszámkés állandósult gyorsulása (sebessége) mellett állandósult hibával (hiba nélkül) képes dolgozni. Az üzem akkor *stabilis*, ha a Routh—Hurwitz-kritériumnak megfelelően :

$$(58) \quad H_1 = b > 0, \quad H_2 = \begin{vmatrix} b & d \\ 1 & c \end{vmatrix} > 0, \quad H_3 = \begin{vmatrix} b & d & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 0 & b & d \end{vmatrix} > 0.$$

E berendezés tehát a stabilitás és a rugalmas üzem biztosítása mellett a másolást minőségileg is javítani tudja.

c) *Hasonló minőségű másolás* érhető el akkor is, ha az előbbi sztatikus erősítésre is képes izodrom-csatolást pl. a II. szervómotor és a szerszámkés közé helyezzük, vagy pedig a II. szervómotort egyszerű izodrom vissza-csatolással sőtöljük.\*

d) *További, még tökéletesebb berendezések tárgyalása* meghaladja e cikk kereteit. Másrészt az utóbbi, vagy még bonyolultabb berendezéseket a magasabbrendű differenciálegyenletek miatt több oldalról és legcélszerűbben az ú. n. *frekvencia módszerrel* kell vizsgálni. E tekintetben a már említett »*Automatikus szabályozások matematikai vizsgálata (Különös tekintettel a másoló szerszámgépekre)*« c. készülő cikkemre utalok.

## 12. §

Befejezésül köszönetemet fejezem ki az akadémiai Mechanikai Automatizálási Szakbizottság elnökének, *Ritter Endre* főmérnöknek, Intézetünk igazgatójának, *Rényi Alfréd* professzornak és *Kovács K. Pál* professzornak — értékes tanácsaikért, nemkülönben *Pál Sándor*, *Kemenes Tibor*, *Korodi Albert*, *Meszlényi Marió*, *Frigyes Andor*, *Török Vilmos*, *Szöts Géza* kartársaknak — hasznos észrevételeikért.

## IRODALOM

[1] *V. L. Losszievskij*: Automatikus szabályozás alapelvei a technikai folyamatokban. — Nehézipari Könyv- és Folyóiratkiadó Vállalat, Budapest, 1951; fordítás.

[2] *Соколов-Дружинский*: Автоматическое копирование на металлорежущих станках. Москва, 1949.

[3] *M. B. Tumarkin*: A másoló szerszámgépek hidraulikus rendszerének pontossága emeléséről. — Sztanki i Insztrument, 1951. évi 10. sz.; fordítás.

[4] *М. А. Айзерман*: Теория автоматического регулирования двигателей. — Гостефиздат, 1952, Москва.

\* Л. Айзерман cit. [4], 146. — L. Török Vilmos alábbi cikkét.

[5] *James—Nichols—Philips: Theory of Servomechanism.* — Massachusetts Institute, New-York, 1947.

[6] А. И. Лурье: Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — Гостехиздат, 1951, Москва.

[7] *V. A. Lescsenko: Az olaj folyása a hidraulikus rendszerek vezérolatgyűjteményében.* — Sztanki i Insztrument, 1952. évf. 3. sz.; fordítás.

[8] Диткин—Кузнецов: Справочник по операционному исчислению. — Гостехиздат, 1951, Москва.

[9] *F. Fazekas: Mathematische Untersuchung der automatischen Kopiereinrichtung »Hydrofix«.* — Budapest, 1953. A Mintagépgyár közleménye a cseh-magyar műszaki dokumentáció-csere keretében.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ КОПИРОВАНИЯ ОДНОГО ВЕНГЕРСКОГО КОПИРОВАЛЬНОГО СТАНКА

Ф. Фазекаш

### Резюме

Машиностроительный завод «Mintagépgyár» недавно выпустил автоматическое копировальное устройство под названием Гидрофикс, работающее по гидравлическому принципу и монтирующееся на токарный станок.

В данной статье автор занимается математическим исследованием происходящего в Гидрофиксе копировального процесса. Используя общеизвестные в литературе упрощающие условия, автор производит расчеты, дающие качественные информации о некоторых простых (в первую очередь линейных, лишенных зазора) моделях устройства.

В дальнейшем рассматриваются вопросы об, имеющие большое практическое значение: о величине погрешности копирования, об ее грубой и более точной оценке, об асимптотическом поведении; о типе накопления и уменьшения таких погрешностей, и выводы иллюстрируются конкретными шаблонами меридиальных кривых. Автор затрагивает также вопросы о прелиминарной наладке шаблонов, о косой заправке резцы и т. д.

В заключение автор, для сравнения и в интересах отечественных исследований, знакомит с описанным в статье [3] советского автора Турмакина двухступенчатым, гидравлическим копировальным аппаратом и некоторыми рекомендуемыми разновидностями его.

## MATHEMATISCHE UNTERSUCHUNG DER GENAUIGKEIT EINER UNGARISCHEN KOPIEREINRICHTUNG

F. FAZEKAS

### Zusammenfassung

Die Modellmaschinenfabrik hat unter dem Namen Hydrofix eine hydraulisch arbeitende, auf Drehbänke montierbare, automatische Kopiereinrichtung herausgebracht.

Verfasser unterwirft die Kopiervorgänge, die sich im Hydrofix abspielen, einer mathematischen Untersuchung. Es werden in bezug auf einige einfache (vornehmlich lineare, seitenspielfreie) mathematische Modelle der Einrichtung — unter den in der Literatur üblichen vereinfachenden Voraussetzungen — gewisse Rechnungen durchgeführt, die im grossen und ganzen ein Bild über die Arbeitsweise des Apparates geben.

Des weiteren behandelt Verfasser Fragen der Grösse, der Abschätzung, des asymptotischen Verhaltens und der Superposition des Kopierfehlers und veranschaulicht seine Feststellungen an konkreten Schablonen-Meridiankurven. Besondere Fragen werden noch gestreift, wie z. B. jene der Verbesserung von Schablonen, der schiefen Messereinstellung u. s. w.

Schliesslich folgt, zur Unterstützung der ungarischen Forschung und um eine Vergleichsbasis zu schaffen, die Besprechung des zweistufigen, hydraulischen Kopierapparates, den in einem Aufsatz der sowjetische Verfasser Turmakin [3] beschreibt, samt einigen möglichen Varianten zu demselben.