

PÁRHUZAMOS VEZETÉKEKBŐL ÁLLÓ RENDSZER ELEKTROMOS TULAJDONSÁGAINAK LEÍRÁSÁRA SZOLGÁLÓ PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA A MATRIX-SZÁMÍTÁS SEGÍTSÉGÉVEL

LOVASS-NAGY VIKTOR

Összefoglalás

Jelen dolgozat a matrix-számítás néhány újabb eredményének felhasználásával vizsgálja feszültség-hullámok tovaterjedését tetszősszerűnti számú párhuzamos vezetékből álló rendszerben. Az egyes vezetékekben kialakuló feszültség- és áramerősség-eloszlást a hely és idő függvényeként leíró parciális differenciálegyenletrendszerből levezetett egyetlen matrixdifferenciálegyenlet (a skalár telegráf-egyenlet vezetékrendszerekre általánosított analogonja) általános megoldása után szerző külön tárgyalja azon esetet, mikor a vezetékrendszert alkotó vezetékek egy »nullvezeték« köré írt körhengeren aequidistans módon helyezkednek el, továbbá a vezetékek anyagi állandói és méretei azonosak; ez esetben a megoldás a ciklikus matrixok néhány tulajdonságának felhasználásával történik. Végül — példaként — szerző bemutatja a levezetett eredményeknek a háromfázisú távvezetékre való alkalmazását.

Jelen dolgozat célja, hogy a matrix-számítás néhány újabb eredményének [1] felhasználásával vizsgálja tetszősszerűnti számú párhuzamos vezetékből álló rendszerek elektromos állapotának leírására szolgáló lineáris parciális differenciálegyenletrendszer megoldását. Hasonló vizsgálatokat végeztek pl. *S. O. Rice* [2], továbbá *H. J. v. Bayer* és *R. Knechtli* [3]; jelen dolgozat a matrix-számítás lehetőségeinek fokozottabb kihasználására törekedve, az idézett szerzők által vizsgált eseteknél általánosabban felvetett probléma gyakorlati számítására is alkalmas megoldását kívánja szolgáltatni.

Jelöljük valamely, n darab párhuzamos vezetékből plusz egy nullvezetékből álló vezetékrendszer (hosszegységre vonatkoztatott) elektromos állandóit a következőképpen:

R_k = a k -edik vezeték ohmikus ellenállása,

L_{kk} = a k -edik vezeték és a nullvezeték alkotta hurok öninduktivitása,

L_{kl} = a k -edik vezeték-nullvezeték hurok és l -edik vezeték-nullvezeték hurok kölcsönös induktivitása,

C_{kk} = a k -edik vezeték és a nullvezeték közötti kapacitás,

C_{kl} = a k -edik és l -edik vezeték közötti kapacitás,

G_{kk} = a k -edik vezeték és a nullvezeték közötti levezetés,

G_{kl} = a k -edik és l -edik vezeték közötti levezetés.

Jelöljük továbbá a k -adik vezetékben folyó áramot i_k -val, a vezeték valamely pontjában a nullvezetékhez viszonyított feszültséget pedig u_k -val. Ily módon a vezetékrendszer matrix-alakban felírt differenciálegyenleteiben szereplő matrixok a következők:

a) *Oszlop-matrixok:*

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

b) *Quadratikus matrixok:*

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n C_{1k} & -C_{12} & \dots & -C_{1n} \\ -C_{21} & \sum_{k=1}^n C_{2k} & \dots & -C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -C_{n1} & -C_{n2} & \dots & \sum_{k=1}^n C_{nk} \end{bmatrix};$$

$$L_{ik} = L_{ki} \quad C_{ik} = C_{ki}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n G_{1k} & -G_{12} & \dots & -G_{1n} \\ -G_{21} & \sum_{k=1}^n G_{2k} & \dots & -G_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G_{n1} & -G_{n2} & \dots & \sum_{k=1}^n G_{nk} \end{bmatrix};$$

$$G_{ik} = G_{ki}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_n \end{bmatrix} = \langle R_1 R_2 \dots R_n \rangle \quad (\text{diagonál-matrix})$$

A k -adik vezeték mentén az áramerősség, továbbá a feszültség változását leíró egyenletek a következők [4]:

$$(1) \quad -\frac{\partial i_k}{\partial x} = G_{k1}(u_k - u_1) + \dots + G_{kk}u_k + \dots + G_{kn}(u_k - u_n) + \\ + C_{k1} \frac{\partial}{\partial t}(u_k - u_1) + \dots + C_{kk} \frac{\partial}{\partial t} u_k + \dots + C_{kn} \frac{\partial}{\partial t}(u_k - u_n)$$

$$(2) \quad -\frac{\partial u_k}{\partial x} = R_{k1}i_k + L_{k1} \frac{\partial i_1}{\partial t} + \dots + L_{kk} \frac{\partial i_k}{\partial t} + \dots + L_{kn} \frac{\partial i_n}{\partial t}$$

Ezeket az egyenleteket valamennyi vezetékre képezve két (külön-külön n darab elsőrendű egyenletből álló) differenciálegyenletrendszert nyerünk, melyek — a fenti jelölések felhasználásával — matrix-alakban a következőképpen írhatók:

$$(1a) \quad -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

$$(2a) \quad -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}$$



1. ábra

A (2a) egyenletet x szerint differenciálva és $\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}$ helyébe az (1a) egyenletből adódó kifejezést helyettesítve (a matrix-szorzatokban ügyelve a tényezők helyes sorrendjére) nyerjük, hogy:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \mathbf{LC} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + (\mathbf{RC} + \mathbf{LG}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{RG}\mathbf{u}$$

(Ez a matrix-egyenlet szolgáltatja a skalár »telegráf-egyenletnek« vezetékrendszerre való általánosítását.) Minthogy — ismeretes módon [5] — »állóhullám« alakú megoldások segítségével a »telegráf-egyenlet« tetszés szerinti »haladó« hullám alakú megoldása is előállítható, elegendő a (3) egyenlet »állóhullám« alakú megoldásainak keresésére szorítkoznunk. Amint igazolható, a (3) egyenlet »állóhullám« alakú megoldása:

$$(4) \quad \mathbf{u} = e^{-\Gamma x} \mathbf{v}_0 e^{j\omega t}$$

ahol

$$\Gamma = [(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L})(\mathbf{G} + j\omega\mathbf{C})]^{1/2}$$

Vizsgáljuk a továbbiakban a következő esetet: A vezetérendszer elrendezése történjék az 1. sz. ábra szerint, tehát a vezetékrendszert alkotó n darab vezetékek egy »nullvezeték« köré írt körhengeren aequidistans módon helyezkedik el; továbbá a vezetékek anyagi állandói és méretei azonosak.

Ez esetben a (3) egyenletben szereplő matrixok mind ciklikusak [6]; ugyanis

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = \dots = R_k = \dots = R_n = R \\ L_{1,k} &= L_{2,k+1} = \dots = L_{k,2k-1} = \dots = L_{n,n+k-1} = L_{k-1} \\ C_{1,k} &= C_{2,k+1} = \dots = C_{k,2k-1} = \dots = C_{n,n+k-1} = C_{k-1} \\ G_{1,k} &= G_{2,k+1} = \dots = G_{k,2k-1} = \dots = G_{n,n+k-1} = G_{k-1} \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

tehát a ciklikus matrixoknál szokásos jelölésekkel:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R(R, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{L} &= L(L_0, L_1, \dots, L_{n-1}) \\ \mathbf{C} &= C\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} C_\nu, -C_1, -C_2, \dots, -C_{n-1}\right) \\ \mathbf{G} &= G\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} G_\nu, -G_1, -G_2, \dots, -G_{n-1}\right) \end{aligned}$$

továbbá, bevezetve az $l_\nu = j\omega L_\nu$, $c_\nu = -(G_\nu + j\omega C_\nu)$ rövidítéseket, és megjegyezve, hogy:

$$\begin{aligned} l_{\nu+n} &= l_{\nu-n} = l_\nu = l_{-\nu} \\ c_{\nu+n} &= c_{\nu-n} = c_\nu = c_{-\nu} \end{aligned}$$

és

$$l_n = l_0; \quad c_n = c_0$$

nyerjük, hogy az $(\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L})(\mathbf{G} + j\omega \mathbf{C})$ szorzat-matrix is ciklikus, éspedig

$$\begin{aligned} &(\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L})(\mathbf{G} + j\omega \mathbf{C}) = \\ &= \left\{ \left[-R \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu - l_0 c_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (l_{n-\nu} - l_0) c_\nu \right], \right. \\ &\left[Rc_1 - l_1 c_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (l_{n-\nu+1} - l_1) c_\nu \right], \dots, \left[Rc_k - l_k c_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (l_{n-\nu+k} - l_k) c_\nu \right], \dots \\ &\dots, \left[Rc_{n-1} - l_{n-1} c_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (l_{n-\nu+(n-1)} - l_{n-1}) c_\nu \right] \right\}. \end{aligned}$$

Mint hogy valamely $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ n -edrendű ciklikus matrix sajátértékei [6]:

$$\lambda_k = a_0 + a_1 \omega_k + a_2 \omega_k^2 + \dots + a_{n-1} \omega_k^{n-1}$$

ahol:

$$\omega_k = e^{j\varphi_k}; \quad \varphi_k = \frac{2k\pi}{n}$$

tehát az $(R + j\omega L)(G + j\omega C)$ matrix saját-értékeit a

$$\begin{aligned} \lambda_k = & -c_0 \sum_{\nu=0}^{n-1} l_\nu \omega_k^\nu - R \left[c_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} c_\nu (1 - \omega_k^\nu) \right] + \\ & + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} c_\nu (l_{n-\nu+\mu} - l_\mu) \omega_k^\mu \end{aligned}$$

képlet szolgáltatja.

Ha a vezetékek száma (n) páratlan egész szám, akkor:

$$l_1 = l_{n-1}, \quad l_2 = l_{n-2}, \dots, \quad l_\nu = l_{n-\nu}, \dots, \quad l_{\frac{n-1}{2}} = l_{\frac{n+1}{2}}$$

$$c_1 = c_{n-1}, \quad c_2 = c_{n-2}, \dots, \quad c_\nu = c_{n-\nu}, \dots, \quad c_{\frac{n-1}{2}} = c_{\frac{n+1}{2}}$$

ez esetben tehát az $\omega_k^\nu + \omega_k^{n-\nu} = 2 \cos \nu \varphi_k$ összefüggés felhasználásával azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \lambda_k = & -c_0 \left\{ R + l_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} l_\nu \cos \nu \varphi_k \right\} - 2R \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} c_k (1 - \cos \nu \varphi_k) + \\ & + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} c_\nu \left\{ (l_\nu - l_0) + \sum_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} (l_{n-\mu+\nu} - 2l_\mu + l_{\mu+\nu}) \cos \mu \varphi_k \right\}. \end{aligned}$$

Ha a vezetékek száma (n) páros egész szám, akkor:

$$l_1 = l_{n-1}, \quad l_2 = l_{n-2}, \dots, \quad l_{\frac{n}{2}-1} = l_{\frac{n}{2}+1}$$

$$c_1 = c_{n-1}, \quad c_2 = c_{n-2}, \dots, \quad c_{\frac{n}{2}-1} = c_{\frac{n}{2}+1}$$

ez esetben tehát az ω_k -ra vonatkozó fenti összefüggés felhasználásával :

$$\begin{aligned} \lambda_k = & -c_0 \left\{ R + l_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} l_\nu \cos \nu \varphi_k \right\} - 2R \sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} c_k (1 - \cos \nu \varphi_k) + \\ & + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} c_\nu (l_\nu - l_0) + 2 \sum_{\mu=1}^{\frac{n}{2}-1} (l_{n-\mu+\nu} - 2l_\mu + l_{\mu+\nu}) \cos \mu \varphi_k - \\ & - Rc_n \left(1 - \omega_k^{\frac{n}{2}} \right) + \\ & + \omega_k^{\frac{n}{2}} \left\{ -c_0 l_n + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} c_\nu (l_{\frac{n}{2}-\nu} - l_n) + c_n (l_0 - l_{\frac{n}{2}}) \right\}. \end{aligned}$$

Nyilván :

$$\omega_k^{\frac{n}{2}} = e^{j \frac{n}{2} \varphi_k} = e^{jk\pi} = \begin{cases} +1, & \text{ha } k = 0, 2, 4, \dots \\ -1, & \text{ha } k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Mint hogy valamely $\mathbf{C}$ ciklikus matrix adott $f(\mathbf{C})$ analitikus függvény

$$f(\mathbf{C}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \bar{\omega}_k \bar{\omega}_k^2 \dots \bar{\omega}_k^{n-1}]$$

alakban állítható elő [8], tehát :

$$e^{-\Gamma x} = e^{-V(\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L})(\mathbf{G} + j\omega \mathbf{C})x} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-V \lambda_k x} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \bar{\omega}_k \bar{\omega}_k^2 \dots \bar{\omega}_k^{n-1}].$$

Például $n = 3$ esetén :

$$\lambda_k = -c_0 \left[R + l_0 + 2l_1 \cos \frac{2k\tau}{3} \right] - \\ - 2c_1 [R + (l_0 - l_1)] \left[1 - \cos \frac{2k\tau}{3} \right] \quad (k = 1, 2, 3)$$

tehát :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -(c_0 + 3c_1) (R + l_0 - l_1) = \\ = [G_0 + 3G_1 + j\omega (C_0 + 3C_1)] [R + j\omega (L_0 - L_1)]$$

és

$$\lambda_3 = -c_0 (R + l_0 + 2l_1) = [G_0 + j\omega C_0] [R + j\omega (L_0 + 2L_1)].$$

Ily módon adódik, hogy :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = R (G_0 + 3G_1) - \omega^2 (C_0 + 3C_1) (L_0 - L_1) + \\ + j\omega [R (C_0 + 3C_1) + (G_0 + 3G_1) (L_0 - L_1)]$$

és

$$\lambda_3 = RG_0 - \omega^2 C_0 (L_0 + 2L_1) + j\omega [RC_0 + G_0 (L_0 + 2L_1)].$$

Minthogy pedig :¹

$$\mathbf{U} = \frac{1}{3} \left\{ e^{-j\sqrt{\lambda_1}x} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} [1 \ \bar{\varepsilon} \ \varepsilon] + e^{-j\sqrt{\lambda_2}x} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon \end{bmatrix} [1 \ \varepsilon \ \bar{\varepsilon}] + \right. \\ \left. + e^{-j\sqrt{\lambda_3}x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] \right\} u_0 e^{j\omega t} = \\ = \frac{1}{3} \left\{ e^{-j\sqrt{\lambda_1}x} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} [1 \ \bar{\varepsilon} \ \varepsilon] + \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon \end{bmatrix} [1 \ \varepsilon \ \bar{\varepsilon}] + e^{-j\sqrt{\lambda_3}x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] \right\} u_0 e^{j\omega t},$$

¹ Az ú. n. »harmadik egység-gyökök« szokott jelölésével :

$$\omega_1 = \varepsilon, \omega_2 = \bar{\varepsilon}, \omega_3 = 1 \\ \text{és ily módon :} \\ \omega_1^2 = \bar{\varepsilon}, \omega_2^2 = \varepsilon, \omega_3^2 = 1$$

következésképpen :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{3} \left\{ 3e^{-\gamma \bar{\lambda}_1 x} \mathbf{E} + [e^{-\gamma \bar{\lambda}_2 x} - e^{-\gamma \bar{\lambda}_3 x}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] \right\} u_0 e^{j\omega t}$$

mert :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} [1 \ \bar{\varepsilon} \ \varepsilon] + \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} [1 \ \varepsilon \ \bar{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{\varepsilon} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} & \varepsilon^2 \\ \bar{\varepsilon} & \bar{\varepsilon}^2 & \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \bar{\varepsilon} \\ \bar{\varepsilon} & \bar{\varepsilon} \cdot \varepsilon & \bar{\varepsilon}^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{E} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1]$$

Ha például — speciális esetként — feltesszük, hogy

$$u_0 = U_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix},$$

akkor :

$$\mathbf{U} = U_0 e^{-\gamma [R(G_0+3G_1) - \omega^2(C_0+3C_1)(L_0-L_1) + j\omega\{R(C_0+3C_1) + (G_0+3G_1)(L_0-L_1)\} x]} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} e^{j\omega t}$$

minthogy

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (1 + \varepsilon + \bar{\varepsilon}) = 0$$

Úgynevezet »ideális vezeték« esetében (ha t. i. $\mathbf{R} = 0$, valamint $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}_1 = 0$) azt nyerjük, hogy :

$$\mathbf{U} = U_0 e^{\mp \omega \sqrt{(C_0+3C_1)(L_0-L_1)} x} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} e^{j\omega t};$$

Tehát az egyes vezetékben keletkező feszültségek leírására az alábbi függvények adódnak :

$$U_1 = U_0 e^{\mp \omega \sqrt{(C_0+3C_1)(L_0-L_1)} x + j\omega t}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} (-1 + j\sqrt{3}) U_0 e^{\mp \omega t} \overline{(C_0 + 3C_1)(L_0 - L_1)} x + j\omega t$$

$$U_3 = \frac{1}{2} (-1 - j\sqrt{3}) U_0 e^{\mp \omega t} \overline{(C_0 + 3C_1)(L_0 - L_1)} x + j\omega t.$$

Hasonlóképpen képezhetők az egyes vezetékben fellépő feszültségeket leíró függvények az általános ($R \neq 0$, $G_0 \neq 0$; $G_1 \neq 0$) esetben is.

(A számításaink kiindulásaként felírt (1) és (2) egyenleteket arra az esetre képeztük, amikor a nullvezeték árammentes, tehát

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0.$$

Amennyiben $\sum_{k=1}^n i_k \neq 0$, a (2) egyenlet a következőképpen módosul:

$$-\frac{\partial u_k}{\partial x} = R_k i_k + \sum_{k=1}^n i_k R_0 +$$

$$+ L_{k1} \frac{\partial i_1}{\partial t} + \dots + L_{kk} \frac{\partial i_k}{\partial t} + \dots + L_{kn} \frac{\partial i_n}{\partial t}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 + R_0 & R_0 & R_0 & \dots & R_0 \\ R_0 & R_2 + R_0 & R_0 & \dots & R_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_0 & R_0 & R_0 & \dots & R_n + R_0 \end{bmatrix}$$

egyébként a további tárgyalásmód analóg a $\sum_{k=1}^n i_k = 0$ esettel).

IRODALOM

[1] *Egerváry J.*: Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei, III. kötet, 4. szám.

[2] *S. O. Rice*: Steady state solutions of transmission line equations. The Bell System Technical Journal, Vol. XX., No. 2.

[3] *H. J. v. Baeyer* und *R. Knechli*: Über die Behandlung von Mehrleitersystemen mit transversal elektromagnetischen Wellen bei hohen Frequenzen. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. Vol. III. Fasc. 4.

[4] Lásd pld.: *A. G. Webster—G. Szegő*: Partielle Differentialgleichungen der Mathematischen Physik, Berlin 1930., Teubner kiadás; 53. o.

[5] Lásd pld. *A. G. Webster—G. Szegő* idézett munkáját.

[6] Lásd *Egerváry J.* idézett munkáját.

[7] Lásd *Egerváry J.* idézett munkáját.

[8] Lásd *Egerváry J.* idézett munkáját.

РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ МАТРИЦ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, СЛУЖАЩЕЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДОВ

В. Ловашш-Надь

Резюме

Настоящая работа, используя некоторые новейшие результаты теории матриц, исследует распространение бросков напряжения в электросети, состоящей из произвольного числа проводов. После нахождения общего решения матричного дифференциального уравнения (аналогичного скалярному телеграфному уравнению и являющегося обобщением последнего), выведенного из системы уравнений с частными производными, задающей распределение напряжения и силы тока в отдельных проводах как функций места и времени, автор занимается случаем, когда образующие электросеть провода располагаются эквидистантно на поверхности круглого цилиндра, описанного вокруг нейтрали и когда размеры, а также материальные постоянные проводов являются одинаковыми. В таком случае решение производится с помощью некоторых свойств циклических матриц. В заключение автор в качестве примера дает применение выведенных результатов для трехфазных дальних линий.

LÖSUNG, MIT HILFE DES MATRIZENKALKÜLS, EINES PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEMS, DAS ZUR BESCHREIBUNG DER ELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN IN EINEM AUS PARALLELELEITERN BESTEHENDEN SYSTEM DIENT

V. LOVASS-NAGY

Zusammenfassung

Unter Anwendung einiger neueren Ergebnisse des Matrizenkalküls wird in vorliegender Abhandlung die Fortpflanzung der Spannungswellen in einem System untersucht, das aus einer beliebigen Anzahl paralleler Leitern besteht. Vorerst wird eine allgemeine Lösung der einzigen Matrixdifferentialgleichung gegeben, die aus dem, die in den einzelnen Leitern entstehenden Spannungs- und Stromstärkeverteilungen als Funktionen von Ort und Zeit beschreibenden, partiellen Differentialgleichungssystem abgeleitet wurde und eine Verallgemeinerung der skalaren Telegraphengleichung ist. Sodann behandelt Verfasser gesondert den Fall, in dem die Leiter des Systems auf einer Kreiszylinderfläche, die um einen »Null-Leiter« geschrieben ist, equidistant verteilt und die Materialkonstanten und Abmessungen der Leiter gleich sind. In diesem Falle erfolgt die Lösung durch Anwendung einiger Eigenschaften der zyklischen Matrizen.

Zum Schluss wird — als Beispiel — die Anwendung der erhaltenen Ergebnisse bei Drehstromleitung dargestellt.