

KÖRKERESZTMETSZETŰ VEZETŐBEN FELLÉPŐ ÁRAMKISZORÍTÁSRÓL

FREUD GÉZA

Összefoglalás

A szerző kiszámítja egy homogén, ω körfrekvenciájú, sinusosan változó mágneses térbe helyezett körkeresztmetszetű vezetőben az áramsűrűségeloszlást, ha abban I áram folyik. Ennek segítségével meghatározza a vezető hosszegységében fellépő Joule-veszteséget.

Bevezetés

Mint ismeretes, egyetlen magános körkeresztmetszetű vezetőben fellépő áramkiszorítás számítását *A. Sommerfeld* [3] oldotta meg. Bár *Sommerfeld* számításának számos fontos alkalmazása van, az nem használható fel minden esetben. Ha olyan körvezetőről van szó, amely kevés és egymástól távoleső vezetőkből álló vezeték része, akkor *Sommerfeld* számítása jól használható. Ugyanis ilyen esetben a távolabbi vezetők mágneses tere és az azoktól származó áramkiszorítás a kiválasztott vezetőben elhanyagolható a vezető áramától származó mágneses tér és ennek az árameloszlásra gyakorolt visszahatása mellett. Egészen más viszonyok alakulnak ki, ha nagyszámú vezetőkből álló köteg egyes vezetőit tekintjük.

- Ilyen körülmények közt a többi vezetőben folyó áramok sokkal nagyobb mágneses teret hozhatnak létre, mint a tekintetbe vett vezető által létrehozott mágneses tér saját árama. Ha a vezetőköteg igen sok kis átmérőjű vezetőből áll, feltehető, hogy a többi vezetőben folyó áramok által keltett mágneses tér egyetlen vezető helyén még homogén. A feladat tehát az alábbi módon egyszerűsödik: Egy térben homogén, időben sinusosan változó ω körfrekvenciájú mágneses térbe egy körkeresztmetszetű vezetőt helyezünk, melyben ugyancsak ω körfrekvenciájú sinusos áram folyik. Meghatározandó az árameloszlás a vezetőben. Az árameloszlás ismeretében meg fogjuk határozni a vezető hosszegységére eső Joule-veszteséget.

Az így megfogalmazott probléma a kérdés matematikai oldalát tekintve határesetre egy *Ch. Maneback* [1] által tárgyalt feladatnak: határozzuk meg azt az örvényárameloszlást, amit egy végtelen homogén körkeresztmetszetű vezetőben egy vele párhuzamosan futó vonalszerű áramfonal kelt. A vezetőhengeren kívüli tér vákuum vagy pedig homogén szigetelő. *Ch. Maneback* ezt az elektrodinamikai problémát egy integrálegenlet megoldására vezette vissza. A jelen dolgozat függelékében ismertetjük a Maneback-féle feladat elemi megoldását, amely csak a potenciálmélet általánosan ismert összefüggéseit feltételezi, integrálegenlet megoldását nem teszi szükségessé. Meg-

oldásunk két vonatkozásban többet nyújt, mint *Ch. Manebacké*: Először is minden külön megfontolás nélkül egysapásra megadja az örvényáramok által keltett mágneses teret a vezetőhengeren kívül is. Másodszer minden nehézség nélkül számításba lehet venni a mágneses erővonalak törését a vezetőhenger palástfelületén annak következtében, hogy a vezető anyagának és a vele érintkező szigetelő közegnek (ill. vákuumnak) a mágneses permeabilitása különböző. Amennyiben a vezető ferromágneses anyagból készült, ezáltal az örvényáramok intenzitása tetemesen megnövekedik.

Visszatérve arra az esetre, amikor a külső mágneses teret a vezető környezetében homogénnek feltételezzük, ezt az előbbiből határátmenettel úgy származtathatjuk, hogy az áramfonalnak a vezetőhenger tengelyétől miért R távolságát minden határon túl növeljük, miközben az áramfonalban az I áramintenzitás úgy növekedik, hogy az I/R hányados állandó maradjon. Mint várható, a határeset közvetlen tárgyalása egyszerűbb és áttekinthetőbb, mint az általánosabb eseté. Ugyanakkor megvan az az előnye, hogy kombinálni lehet a mágneses térerősség közvetlen kísérleti meghatározásával és akkor is minden nehézség nélkül használható, ha az egyes áramfonalak által keltett mágneses teret erősen mágneseződő anyagok (pl. vas) jelenléte jelentékenyen módosítja. Ilyen vonatkozásban pl. a közölt módon kiszámítható a járulékos veszteség körkeresztmetszetű vezetővel tekercselt kismotorok hornyaiban. *R. Richter* (Archiv f. Elektrotechnik 4 1915, 15.) erre az esetre közelítő képletet állít fel.¹ Ennek során feltételezi, hogy a vezetőben indukált örvényáramok tere az erővonalak lefutását nem módosítja, ez a közelítés nyilván csak egészen kis frekvenciáknál jogosult. Ugyancsak számítható a járulékos veszteség körkeresztmetszetű transzformátor tekercselésében. Ebben az esetben a közölt közelítés mellett elhanyagoljuk a vezető görbületét; a mágneses térerősség akár számítással, akár modellkísérlettel meghatározható. Hasonló módon tárgyalható több más, a műszaki gyakorlatban előforduló elrendezés is.

Az árameloszlás számítása

A feladatban szereplő elektromágneses tér két tér szuperpozíciójának fogható fel. Az első tér az I áram által átfolyt vezető saját tere, ha a külső mágneses tér nem hat. A második, erre szuperponálódó elektromágneses teret úgy származtatjuk, hogy az időben sinusosan változó homogén külső mágneses térbe belehelyeztük a körkeresztmetszetű vezetőt. A vezetőben a külső tér hatására örvényáramok indukálódnak, de a vezető hosszabani eredő áram nem folyik.

Az I amplitúdójú áram által átfolyt vezetőben kialakuló árameloszlást, ha a külső tér nem hat, az

$$(1) \quad i(r) = \frac{Ip}{2\pi a} \frac{J_0(pr)}{J_1(pa)} \quad \text{ahol} \quad p = \frac{\sqrt{-2}}{\delta}$$

(lásd *Simonyi* [1], 3c. 31. képlet, 235. o.) összefüggés szolgáltatja. Ebben a képletben a jelenti a vezetőhenger sugarát, $i(r)$ az áramsűrűség komplex

Fényes Tamás kollégánk megállapította, hogy *Richter* eredeti képlete téves, az egy π 4 tényezővel szorozandó.

amplitúdóját a vezető tengelyétől r távolságban, j a képzetes egység, δ a behatolási mélység, amely a

$$(2) \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_2 \gamma}}$$

képlet segítségével számítható, ahol μ_2 a vezető homogén anyagának abszolút mágneses permeabilitása és γ a vezető anyagának fajlagos vezetőképessége (lásd *Simonyi* [1] 3c. 42. képlet, 236.). $J_0(x)$, ill. $J_1(x)$ a nulladrendű, ill. elsőrendű elsőfajú Bessel-függvény. Erre szuperponálódnak a külső mágneses tér által keltett örvényáramok.

A vezető belsejében fellépő tér előállítása vektorpotenciállal

Először is a vezető belsejében létesülő mágneses teret vektorpotenciál segítségével állítjuk elő. A Maxwell-egyenletek, a szereplő fizikai mennyiségeket MKS egységben kifejezve:

$$(3) \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} H &= i + \frac{\partial D}{\partial t} \\ \operatorname{rot} E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{ahol } D = \epsilon_2 E \text{ és } B = \mu_2 H$$

és az Ohm-törvény differenciális alakja:

$$(4) \quad i = \gamma E.$$

A második Maxwell-egyenlet teljesül, ha

$$(5) \quad B = \operatorname{rot} A \text{ és } E = -\frac{\partial A}{\partial t}.$$

A mágneses tér vektorpotenciálja. Feltételezzük, hogy μ_2 állandó. Az első Maxwell-egyenlet is kielégül, ha a vektorpotenciál a (helyettesítéssel nyert)

$$(6) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} A = -\mu_2 \frac{\partial A}{\partial t} - \epsilon_2 \mu_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

parciális differenciálegyenletnek tesz eleget. Miután a vezető belsejében töltés nem halmozódhat fel, $\operatorname{div} D = 0$, ami teljesül, ha kiegészítésképpen kikötjük, hogy

$$(7) \quad \operatorname{div} A = 0.$$

A másik kiegészítő egyenlet, t. i. $\text{div } B = 0$ szintén teljesül, mert a mágneses teret vektorpotenciállal állítottuk elő. (6) és (7)-ből, ha felhasználjuk a vektoranalízisből ismert

$$\text{rot rot } A = \text{grad div } A - \Delta A$$

összefüggést, kapjuk :

$$(8) \quad \Delta A - \mu_2 \gamma \frac{\partial A}{\partial t} - \varepsilon \mu_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0.$$

Közelebbről meg akarjuk vizsgálni az olyan megoldásokat, amelyek a z koordináta irányában terjedő haladó hullámokat állítanak elő :

$$(9) \quad A = A_0 e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z\right)}$$

ahol λ a vezető mentén terjedő hullám hullámhossza. Ha (8)-ba behelyettesítjük (9)-et és (2)-őt is számításba vesszük, kapjuk, hogy

$$(10) \quad \Delta A_0 - \left(\frac{2\gamma}{\delta^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right) A_0 = 0.$$

Fenti egyenletben

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}$$

az olyan szigetelőközegben terjedő ω körfrekvenciájú síkhullám hullámhossza, amely szigetelőközeg abszolút dielektromos állandója ε_2 és abszolút mágneses permeabilitása μ_2 , vagyis ugyanakkora, mint a tekintetbevett vezetőé. A további számításokat nagy mértékben egyszerűsíti, hogy a szokásos vezetőanyagokra a legalacsonyabb frekvenciától egészen a mikrohullámú frekvenciáig is érvényes, hogy

$$\delta \ll \lambda \quad \text{és} \quad \delta \ll \lambda.$$

Ilyen módon (10) helyett jó közelítéssel a numerikus számítások szempontjából sokkal jobban kezelhető

$$(11) \quad \Delta A_0 - \frac{2j}{\delta^2} A_0 = 0$$

egyenletre szorítkozunk. A $\frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ tag elhanyagolása azt jelenti, hogy az eltolási áramot a vezetési áramhoz képest elhanyagoljuk, vagyis a folyamatot a vezetőn belül kvázistacionáriusként kezeljük. A $\frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ tag elhanyagolása azt jelenti, hogy az elektromágneses tér hullámszerű terjedését nem vesszük számításba. Elegendő tehát a teret egy a vezető tengelyére merőleges síkban vizsgálnunk.

A vektorpotenciál meghatározása

Áttérünk a konkrét feladat tárgyalására. A mágneses teret olyan vektorpotenciálból származtatjuk, amely a tér minden helyén a vezetőhenger tengelyével párhuzamos, és előjeles értéke A_0 . A vezetőkön belül legyen

$$(12) \quad A_0 = c_1 J_1 \left(\sqrt{\frac{2j}{\delta}} r \right) \cos \varphi,$$

ahol (r, φ) a vezetőhengerre merőleges síkban mért polárkoordináták, és a polárkoordinátarendszer kezdőpontja a vezetőhenger középvonalának dőféspontja a síkon.

A mágneses tér A_0^* vektorpotenciálja a vezető hengeren kívül az

$$\Delta A_0^* = 0$$

egyenletnek tesz eleget; ennek megfelelően vegyük fel (a henger tengelyével párhuzamos) vektorpotenciált,

$$(13) \quad A_0^* = B_1 r \cos \varphi + c_2 \frac{\cos \varphi}{r}.$$

alakban. Fenti kifejezést derékszögű koordinátákra átírva,

$$A_0^* = B_1 x + c_2 \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Ebből pedig a B mágneses indukcióvektorkomponenseit a $B = \text{rot } A$ összefüggésből számítva:

$$B_x = \frac{\partial A_0^*}{\partial y} = - \frac{2c_2 xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$B_y = - \frac{\partial A_0^*}{\partial x} = - B_1 + \frac{2c_2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{c_2}{x^2 + y^2}$$

Ebből azonnal leolvasható, hogy a vezetőtől nagy távolságban a mágneses tér homogén és a mágneses indukció értéke B_1 a tér $-y$ irányú.

A (12), ill. (13)-ban szereplő c_1 és c_2 állandókat abból a feltételből határozzuk meg, hogy a vezető hatására a mágneses indukcióvektor normális komponense és a mágneses térerősségvektor tangenciális komponense folytonosan megy át:

$$\left(\frac{\partial A_0}{\partial \varphi} \right)_{r=a} = \left(\frac{\partial A_0^*}{\partial \varphi} \right)_{r=a}$$

és

$$\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial A_0}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A_0^*}{\partial r} \right)_{r=a},$$

ahol μ_1 a vezetőn kívüli homogén közeg abszolút mágneses permeabilitása. Fenti  sszef gg sekbe A_0  s A_0^* (12)  s (13) alatti kifejezését helyettesítve, c_1 és c_2 meghatározására az alábbi k tismeretlen  el f k  egyenletrendszerre jutunk :

$$\begin{aligned} c_1 J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) - c_2 \frac{1}{a} &= B_1 a \\ c_1 \frac{\sqrt{-2j}}{\mu_2 \delta} J_1' \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) + c_2 \frac{1}{\mu_1 a^2} &= \frac{B_1}{\mu_1} \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$c_1 = \frac{2\mu_2 a B_1}{\mu_2 J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) + \mu_1 \frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} J_1' \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right)},$$

ill. a $J_1'(x) = -\frac{1}{x} J_1(x) + J_0(x)$ összefüggés felhasználásával

$$(14) \quad c_1 = \frac{2\mu_2 a B_1}{\mu_1 \frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} I_0 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) + (\mu_2 - \mu_1) J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right)},$$

 s hasonló kifejezést nyerünk c_2 -re ; ez utóbbira azonban nem lesz szükségünk. A kit z tt feladatot meg is oldottuk : az örvényáramok s r s g nek eloszlása a vezető belsejében

$$i = \gamma E = -\gamma \frac{\partial A_1}{\partial t} = -j \omega \gamma A_0$$

azaz (12)  s (14) felhasználásával :

$$(15) \quad i = \frac{2j \omega \gamma \mu_2 a B_1 J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) \cos \varphi}{\mu_1 \frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} J_0 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) + (\mu_2 - \mu_1) J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right)}.$$

A wattveszt s számítása

Tekintettel (1)  s (15)-re, a vezetőben fellépő eredő áramsűrűség komplex amplitúdója, amely a vezető saját áramának és a külső mágneses tér  tal indukált  rv ny ramnak az eredője,

$$(16) \quad i = b_0 J_0 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) + b_1 J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) \cos \varphi$$

alakú. A (16) képlet az áramsűrűség komplex amplitúdóját szolgáltatja. Tehát az időegység alatt a vezető hosszegységében hővé átalakuló effektív teljesítmény:

$$(17) \quad W = \frac{1}{2\gamma} \int |i|^2 df = \\ = \frac{1}{2\gamma} \left\{ |b_0|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left| J_0 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) \right|^2 r dr d\varphi + \right. \\ \left. + |b_1|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left| J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) \right|^2 \cos^2 \varphi r dr d\varphi \right\}.$$

Ebben a kifejezésben az a figyelemreméltó, hogy az összes veszteség két tagra bontható: az első tag tartalmazza a vezető saját áramától származó veszteséget, figyelembevéve a sugárirányú áramkiszorítást, ami független a külső mágneses tértől, a második tag viszont a külső mágneses tértől származó örvényáramok okozta wattveszteséget tartalmazza, és ez utóbbi független a vezetőben folyó áram intenzitásától.

A (17)-ben szereplő integrálokat az alábbi képlet segítségével számíthatjuk (lásd *Simonyi* [2] 15.13 képlet 102.):

$$\int_0^a x J_n(\alpha x) J_n(\beta x) dx = \frac{a}{\beta^2 - \alpha^2} [\alpha J_n(\beta a) J'_n(\alpha a) - \beta J_n(\alpha a) J'_n(\beta a)],$$

ahol a mi konkrét esetünkben $\alpha = \frac{\sqrt{-2j}}{\delta}$; $\beta = \frac{\sqrt{2j}}{\delta}$ és $n = 0, 1$. Vezessük be az $x = \frac{\sqrt{2}}{\delta} a$ jelölést; akkor a vezető saját áramától származó veszteség

$$(18) \quad W_1 = J_{eff}^2 R_0 g(x),$$

ahol $R_0 = \frac{1}{\gamma a^{2\pi}}$ a vezető hosszegységére eső egyenáramú ellenállás és

$$(19) \quad g(x) = \frac{x}{2} \frac{\operatorname{Im} \{ \sqrt{-j} J_0(\sqrt{j} x) J'_0(\sqrt{-j} x) \}}{|J_1(\sqrt{-j} x)|^2}.$$

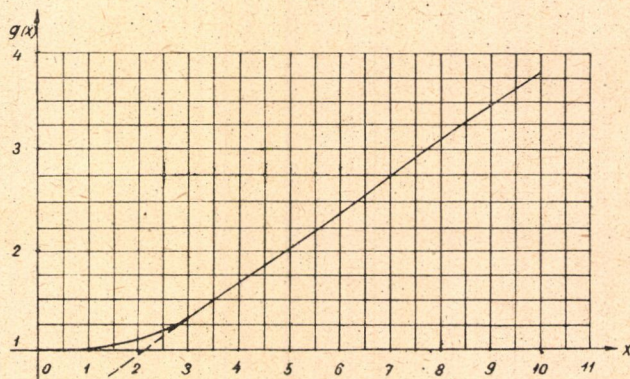
A külső mágneses tér okozta további wattveszteség, ha $\mu_1 = \mu_2$ (ami lényegében réz- vagy alumíniumvezető esetében teljesül)

$$(20) \quad W_2 = \frac{H_1^2}{\gamma} h(x),$$

ahol $H_1 = B_1/\mu_1$, a külső homogén mágneses térerősség amplitúdója és

$$(21) \quad h(x) = 2\pi x \frac{\operatorname{Im} \left\{ \sqrt{-j} J_1(\sqrt{j}x) J_1'(\sqrt{-j}x) \right\}}{|J_0(\sqrt{-j}x)|^2}.$$

A $g(x)$ értéke természetesen R/R_0 , ahol R a körvezető már *Sommerfeld* által számított váltóáramú ohmos ellenállása. x nagy értékeire a Bessel-függ-



I. ábra

vények nagy argumentumra érvényes aszimptotikus előállításából az alábbi közelítő képletek adódnak:

$$(22) \quad g(x) \sim \frac{x}{2\sqrt{2}} \frac{1 + \frac{2\sqrt{2}}{16x} + \frac{18}{128x^2} - \frac{27\sqrt{2}}{1024x^3} - \frac{135}{16384x^4}}{1 - \frac{6\sqrt{2}}{16x} + \frac{18}{128x^2} + \frac{45\sqrt{2}}{1024x^3} + \frac{225}{16384x^4}} \sim$$

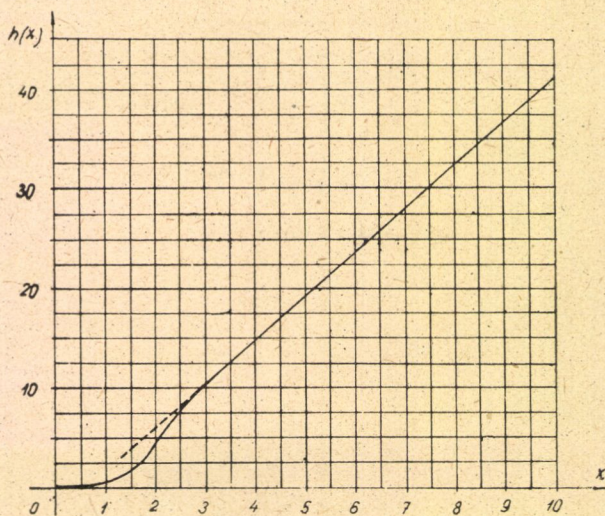
$$\sim \frac{x}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{x} + \frac{3}{8} \frac{1}{x^2} - \frac{243}{2048} \frac{1}{x^4} + \dots \right\}.$$

$$(23) \quad h(x) \sim \sqrt{2} \pi x \frac{1 - \frac{6\sqrt{2}}{16x} - \frac{30}{128x^2} - \frac{15\sqrt{2}}{1024x^3} - \frac{135}{16384x^4}}{1 + \frac{2\sqrt{2}}{16x} + \frac{2}{128x^2} + \frac{9\sqrt{2}}{1024x^3} + \frac{81}{16384x^4}} \sim$$

$$\sim \pi \sqrt{2} x \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^2} - \frac{11}{4096} \frac{1}{x^4} + \dots \right\}.$$

Vasvezeték esetén csak azt az esetet tárgyalhatjuk, amikor a vezetőkön átfolyó áram igen kicsi, tehát a H_1 nem túl nagy és így a vasanyag permeábi-

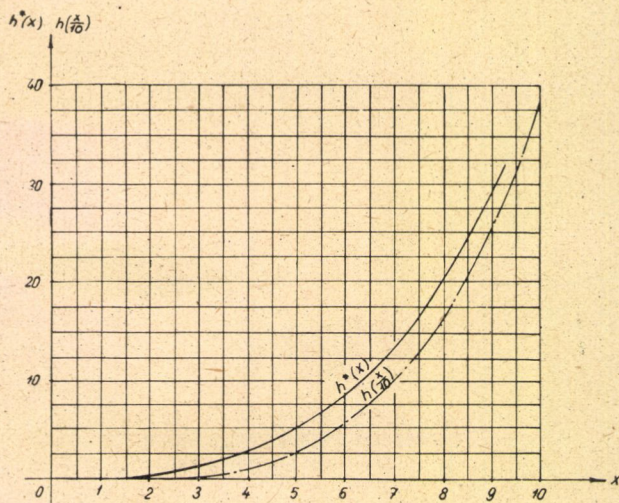
litása egyenlőnek vehető annak kezdeti permeabilitásával. Ennek értékét az irodalmi adatok alapján 101-gyel vettük egyenlőnek, így $\mu_1 = 1$ mellett



2. ábra

$\mu_2 - \mu_1 = 100$ kerek számnak adódik. Ilyen feltételek mellett a külső mágneses térből származó járulékos veszteség

$$(24) \quad W_2^* = \frac{B^2}{\gamma} h^*(x),$$



3. ábra

Tekintettel δ -nak μ -tól való függésére, $h^*(x)$ és $h(x/10)$ az azonos vezetősugarhoz tartozó értékek.

ahol $h^*(x)$ -et a III. ábrán tüntettük fel. Egyben közöljük a $h^*(x)$ -re a Bessel-függvények aszimptotikájából nagy x értékekre adódó közelítő képletet, tetszőleges μ_1 és μ_2 esetén:

$$h^*(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2} \Phi} \left[1 - \frac{6\sqrt{2}}{16x} - \frac{30}{128x^2} - \frac{15\sqrt{2}}{1024x^3} - \frac{135}{16384x^4} \right], \text{ ahol}$$

$$\Phi = \mu_1^2 \left[x^2 - 7\sqrt{2}x + \frac{49}{64} + \frac{36 - 33\sqrt{2}}{512x} + \frac{3249}{16384x^2} + \frac{885\sqrt{2}}{16384x^3} + \frac{225}{16384x^4} \right] +$$

$$+ \mu_2^2 \left[1 - \frac{6\sqrt{2}}{16x} + \frac{18}{128x^2} + \frac{45\sqrt{2}}{1024x^3} + \frac{225}{16384x^4} \right] +$$

$$+ \mu_1 \mu_2 \left[\sqrt{2}x - \frac{7}{4} + \frac{57\sqrt{2}}{64x} - \frac{171}{512x^2} - \frac{1575\sqrt{2}}{16384x^3} \right].$$

Véges távolságban futó áramfonal által keltett örvényáram számítása

Az a sugarú vezetőtől R távolságban I intenzitású áramfonal van. Az ábra szerint vegyük fel az (r, φ) polárkoordinátarendszert. Akkor az áramfonalból származó vektorpotenciál

$$(25) \quad \frac{\mu_1 I}{2\pi} \log \frac{1}{R} = \frac{\mu_1 I}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \log \left(\frac{R - re^{i\varphi}}{R} \right) \right\} =$$

$$= - \frac{\mu_1 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r^n}{R^n} \cos n\varphi$$

tehát $A_n r^n \cos n\varphi$ alakú tagokból tehető össze, ahol

$$(26) \quad A_n = - \frac{\mu_1 I}{2\pi} \frac{1}{n R^n}.$$

Az a sugarú vezetőhengeren belül az áramfonalból és az örvényáramokból származó eredő mágneses tér vektorpotenciálja, amely kielégíti a (11) parciális differenciálegyenletet, előállítható az alábbi ortogonális sörfejtés alakjában:

$$(27) \quad A^* = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n2} J_n \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) \cos n\varphi,$$

ahol $J_n(z)$ az n -edrendű Bessel-függvény.

Ugyanakkor a vezetőhengerben folyó örvényáramok által keltett járulékos mágneses tér vektorpotenciálját a vezetőn kívül vegyük fel

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n1} \frac{\cos n\varphi}{r^n}.$$

alakban, ahol a kifejtés minden tagja kielégíti a Laplace-egyenletet. Tehát a vektorpotenciál a vezetőkön kívül

$$(28) \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n + c_{n1} \frac{1}{r^n} \right) \cos n\varphi.$$

A határfeltételek az $r = a$ sugarú hengerpáláston

$$(29) \quad (A)_{r=a} = (A^*)_{r=a}$$

és

$$(30) \quad \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial A^*}{\partial r} \right)_{r=a}$$

(27), (28), (29) és (30) c_{n1} és c_{n2} meghatározására az alábbi lineáris egyenlet-rendszerre vezet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^n} c_{n1} - J_n(\sqrt{-j}x) c_{n2} &= -A_n a^n \\ \frac{n}{\mu_0 a^{n+1}} c_{n1} + \frac{1}{\mu_1 a} \left(-n J_n(\sqrt{-j}x) + \sqrt{-j}x J_n'(\sqrt{-j}x) \right) c_{n2} &= \frac{A_n}{\mu_0} n a^{n-1}. \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$(31) \quad c_{n1} = \frac{-\mu_1 I}{2\pi} \cdot \frac{a^{2n} - n \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_n(\sqrt{-j}x) + \sqrt{-j}x J_{n-1}(\sqrt{-j}x)}{n R^n \left(\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_n(\sqrt{-j}x) + \sqrt{-j}x J_{n-1}(\sqrt{-j}x) \right)}$$

és

$$(32) \quad c_{n2} = \frac{I \mu_2}{\pi R^n} \frac{a^n}{n \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_n(\sqrt{-j}x) - \sqrt{-j}x J_{n-1}(\sqrt{-j}x)}$$

A vektorpotenciált a vezetőkön kívül tehát a (26), (28) és (31) képletek, míg a vezetőkön belül a (27) és (32) képletek szolgáltatják. A vektorpotenciál ismeretében az $i = -j \omega \gamma A^*$ összefüggésből megkaphatjuk az örvényáramok sűrűségeloszlását

$$(33) \quad i = \frac{-j \omega \gamma \mu_2 I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{R} \right)^n \frac{J_n \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) \cos n\varphi}{n \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_n(\sqrt{-j}x) - \sqrt{-j}x J_{n-1}(\sqrt{-j}x)}$$

Ha $\mu_1 = \mu_2$, ez átmegy a *Maneback* által számított képletbe.

Munkatársamnak, *Szilvay Gézánnának* ezúton is köszönetet mondok a kézirat gondos átnézése, valamint a részletszámítások elvégzése terén nyújtott értékes segítségéért.

IRODALOM

- [1] *Ch. Maneback*: An integral equation for skineffect in parallel conductors. Journal of Math. and Phys. MIT. 1922. 123. o.
[2] *Simonyi Károly*: Elméleti Villamosságtan. Egyetemi Tankönyv. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
[3] *A. Sommerfeld*: Elektromagnetische Schwingungen. (Franck—Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik c. könyv. V. fejezete) (21) 2§.

О ВЫТЕСНЕНИИ ТОКА, ВОЗНИКАЮЩЕМ В ПРОВОДНИКЕ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Г. Фрейд

Резюме

Определяется распределение и плотности тока в проводнике круглого сечения, помещенном в однородном синусоидально изменяющемся магнитном поле (частоты). С помощью этого определяются джоулевые потери, возникающие в проводнике на единицу измерения.

ÜBER DIE STROMVERDRÄNGUNG IN LEITERN MIT KREISFÖRMIGEM QUERSCHNITT

G. FREUD

Zusammenfassung

In einem homogenen, magnetischen Wechselfeld wird ein stromdurchflossener Leiter hineingesetzt. Es wird die Stromverteilung und der Joulesche Verlust der Längeneinheit berechnet.