

ELŐREGYÁRTOTT ÉPÜLETSZERKEZETEK KÜLÖNLEGES STATIKAI PROBLÉMÁINAK MEGOLDÁSA MATEMATIKAI PROGRAMOZÁSSAL

NÉDLI PÉTER¹, KURUTZNÉ KOVÁCS MÁRTA², VÁSÁRHELYINÉ SZABÓ ANNA³,
GÁSPÁR ZSOLT⁴, A MŰSZ. TUD. KAND.

Rúdszerkezetek képlékenységtani problémái hasonlóan a rugalmasságtani feladatokhoz, megfogalmazhatók és megoldhatók mátrixalgebrai eszközökkel. Ez a megközelítés lehetővé teszi a feladatok számítógéppel történő megoldását, amelyet mintapéldával illusztrálunk.

Az általánosított feltételes kapcsolatú kontinuumok állapotváltozás-vizsgálati alapösszefüggéseit a variációs elvek alapján vezetjük le, majd ismertetjük az érintkezési probléma matematikai programozási vonatkozásait is. Az alapösszefüggések alkalmazását véges dimenziós modellen mutatjuk meg.

A folyási határokat valószínűségi változóknak tekintve figyelembe vehetjük határállapot-vizsgálat és optimális tervezés esetén az anyagminőség ingadozásának hatását. Sztohasztikus képlékenységi feltétel bevezetésével a statikai tételek alapján felírható a feladatok sztohasztikus programozási modellje. Numerikus eredményeket panelszerkezetek számításánál mutatunk be.

A Budapesti Műszaki Egyetem Építőmérnöki Karának Mechanika Tanszékén már hosszabb idő óta foglalkozunk az előre gyártott épületszerkezeti tartórendszerek vizsgálatával. Az első problémakör a merev alapra helyezett, keretvázal vagy panelrendszerrel modellezett merevítőfal vizsgálata volt, amelyet részint a rúdszerkezetek általános elméletére alapozott programmal, részint véges elem programokkal oldottak meg. Később meggyőződtek arról, hogy a talaj engedékenysége a szerkezet erőjátéka szempontjából nem elhanyagolható, továbbá az is befolyásolja a viszonyokat, hogy ha figyelembe veszik a szintek egymás feletti szakaszos építését. Mindezekre a problémákra számítási programokat dolgoztak ki és folyamatosan egyeztetik az eredményeket részben a valóságban megépült panelépületek, illetve toronyházak elmozdulási viszonyaival, részben legújabbban annak a kísérleti épületnek az igénybevételeivel és elmozdulásaival, amelyet az ÉTI szentendrei laboratóriumában eredeti nagyságban megépítettek. — Ezeken a ma már részben nyugvóponton levőnek tekinthető kutatásokon kívül a tanszék a rúdszerkezetű keretvázak és a merevnek tekinthető panelekből összeállított falak kérdései közül négy csoport foglalkoztatja:

¹ Dr. Nédli Péter tudományos munkatárs BME Építőmérnöki Mechanika Tanszék, 1118 Bp. Homoród utca 20.

² Kurutzné Dr. Kovács Márta egyetemi adjunktus BME Építőmérnöki Mechanika Tanszék 1118 Budapest Serleg u. 8.

³ Vásárhelyiné Dr. Szabó Anna, tudományos munkatárs ÉGSZI Bp. Csalogány u. 9., 1126. Bp. Kiss János altbn. u. 34.

⁴ Dr. Gáspár Zsolt tud. főmunkatárs BME Építőmérnöki Mechanika Tanszék 1025 Bp. Kapy u. 40/b.

- a) A rúdszerkezetek képlékenységtani problémáinak mátrixalgebrai eszközökkel történő tárgyalása,
- b) az általánosított feltételes kapcsolatokkal rendelkező szerkezetek állapotváltozási vizsgálata,
- c) a panelszerkezetek határállapotvizsgálata sztochasztikus programozással,
- d) a katasztrófaelmélet alkalmazása rugalmas szerkezetek tökéletlenség-érzékenységének vizsgálatánál.

A négy problémát négy különálló, de egymással szorosan összefüggő fejezetben mutatjuk be, ezek együttesen képezik annak a kutatásnak a beszámolóját, amelyet a tárgyban az 1976—80 évek közti ötéves tervidőszakban végeztünk. Az irodalmi hivatkozásokat mind a négy fejezethez külön adjuk meg.

RÚDSZERKEZETEK KÉPLÉKENYSÉGTANI PROBLÉMÁINAK SZÁMÍTÓGÉPES MÓDSZEREI*

1. Bevezetés

Rúdszerkezetek képlékenységtani problémái, hasonlóan a rugalmasságtani feladatokhoz, megfogalmazhatók és megoldhatók mátrixalgebrai eszközökkel.

Ez a megközelítés lehetővé teszi az idevonatkozó matematikai apparátus hatékony alkalmazását mind elméleti, mind gyakorlati vonatkozásban és a feladatok számítógéppel történő megoldását. A képlékenységtani feladatok memória és gépidő igénye azonban általában jóval nagyobb mint a rugalmas megoldásé.

A jelen dolgozatban lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagú, csomópontjain terhelt rúdszerkezetek:

- képlékeny határállapot vizsgálatát
- a képlékeny határállapoton alapuló optimális tervezését
- beállási határállapotvizsgálatát
- rugalmas képlékeny állapotváltozás vizsgálatát

mutatjuk be az elsődrendű elmélet keretein belül, linearizált képlékenységi feltétel és a képlékenységi feltételhez a plasztikus potenciálmérettel kapcsolódó folyási törvény esetére. A rugalmas képlékeny állapotváltozás témakörében kitérünk a geometriai nemlinearitás figyelembevételére is.

Ezek a problémák matematikailag lineáris programozási, illetve lineáris komplementaritási feladatra vezetnek.

* Dr. Nédli Péter munkája.

2. A képlékenységi feltétel és a folyási törvény rúdszerkezetek esetén

A képlékenységtani összefüggések és fogalmak lényegüket tekintve természetesen rúdszerkezetek esetében sem különböznek a képlékenységtan általánosan ismert összefüggéseitől, de formailag, a mátrixalgebrai tárgyalásmód sajátosságainak megfelelőek.

Ennek megfelelően a szerkezet *képlékenységi feltétele*:

$$\varphi = \mathbf{N}^* \mathbf{s} - \mathbf{k} \leq 0$$

alakú, ahol \mathbf{N}^* : a folyási mátrix

φ : a plasztikus potenciál

\mathbf{s} : a belső erők vektora

\mathbf{k} : a szerkezet teherbírásjellemezőit tartalmazó vektor.

Ez az összefüggés úgy jön létre, hogy a képlékenységi feltételt

— csak a szerkezet egyes pontjaiban (a rudak kezdő és végpontjai) vizsgáljuk,
— egy pontban a sima folyási felületet konvex poliéderrel helyettesítjük.

A szerkezet *folyási törvénye* hasonlóan mátrix összefüggésekkel írható le.

Jelölje J azon indexek halmazát melyekre $\varphi_j = 0$ ($J: \{j | \varphi_j = 0\}$). Ekkor a folyási törvény

$$\underset{[j]}{\dot{\mathbf{p}}} = \underset{[j]}{\mathbf{N}} \underset{[j]}{\dot{\boldsymbol{\lambda}}}, \quad \underset{[j]}{\dot{\boldsymbol{\lambda}}} \geq 0,$$

$$\underset{[j]}{\varphi} \leq 0, \quad \underset{[j]}{\dot{\boldsymbol{\lambda}}}^* \underset{[j]}{\dot{\varphi}} = 0$$

alakú, ahol \mathbf{N} : a folyási mátrix (a képlékenységi mátrix transzponáltja)

\mathbf{p} : a képlékeny alakváltozássebességek vektora

$\dot{\boldsymbol{\lambda}}$: a képlékeny szorzók vektora

$\dot{\varphi}$: a képlékeny potenciálsebességek vektora

(J): azon indexek halmaza, ahol folyás van, mert a folyási törvény csak ezen helyekre vonatkozik.

3. Képlékeny határállapot vizsgálat

Képlékeny határállapoton azt az állapotot értjük, amelyben még teljesülnek az egyensúlyi egyenletek és a képlékenységi feltételek de egyben létezik egy ún. folyási mechanizmus is. Egyparaméteres terhelés esetén ez a következő összefüggésekkel írható le:

— egyensúlyi egyenlet $\mathbf{G}^* \mathbf{s} + m \mathbf{q}_0 = 0$

— képlékenységi feltétel $\mathbf{N}^* \mathbf{s} \leq \mathbf{k}$

— kompatibilitási egyenlet $\mathbf{G} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} \geq 0$

— a lehetséges affín mechanizmusok közül ki kell jelölni egyet $\mathbf{q}_0^* \dot{\mathbf{u}} = 1$.

A még nem szerepelt új jelölések a következők:

G^* : az egyensúlyi mátrix

m : a teherparaméter

q_0 : az alapteher

G : a geometriai mátrix, (az egyensúlyi mátrix transzponáltja)

\hat{u} : az elmozdulássebességek

A fenti összefüggésrendszer ekvivalens a következő duális lineáris programozási feladatpárral.

$$m \geq 0, \quad \begin{bmatrix} G^* & q_0 \\ N^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ m \end{bmatrix} = \max!$$

$$\begin{bmatrix} G & N \\ q_0^* & 0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\lambda} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} 0^* & k^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix} = \min!$$

mely megfelel a statikai, ill. kinematikai tételnek.

Erőmódszer alkalmazásával a kinematikai tételre alapuló összefüggésekből a nem előjelkorlátos \hat{u} ismeretlen kiküszöbölhető és így a feladat a klasszikus $Ax = b, x \geq 0, c^*x = \min!$ alakú lineáris programozási problémára egyszerűsödik, melyre már közvetlen alkalmazható a szimplex algoritmus:

$$\begin{bmatrix} N_s - G_s G_k^{-1} & N_k \\ -q_0^* & G^{-1} N_k \end{bmatrix} \hat{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad k^* \hat{\lambda} = \min!$$

Itt $\begin{bmatrix} G_k \\ G_s \end{bmatrix}$ a szerkezet geometriai mátrixának egy statikailag határozott törzstartó szerinti particionálását jelenti és az N mátrixot ennek megfelelően kell particionálni.

4. A képlékeny határállapoton alapuló optimális tervezés

A minimális súlyú szerkezet meghatározását célul kitűző optimális tervezési feladathoz a képlékeny határállapot vizsgált statikai tételéből kiindulva juthatunk:

$$G^* s = -q$$

$$N^* s - k \leq 0$$

$$l^* k = \min!,$$

ahol a célfüggvény azt fejezi ki, hogy a szerkezet súlyát a teherbírást jellemző adatok lineáris függvényének tekintjük. A feladat ismeretlenjeit a \mathbf{k} és \mathbf{s} vektorok jelentik. Mivel a szerkezetben általában azonos elemek is vannak $\mathbf{k} = \mathbf{M}^* \boldsymbol{\kappa}$ alakban írható és a feladat kevesebb számú ismeretlent tartalmazva a következő lesz:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* \mathbf{s} &= -\mathbf{q} \\ \mathbf{N}^* \mathbf{s} - \mathbf{M}^* \boldsymbol{\kappa} &\leq \mathbf{0} \\ \mathbf{l}^* \boldsymbol{\kappa} &= \min! \end{aligned}$$

A kapott lineáris programozási feladat megoldása a képlékeny határállapotvizsgálat-hoz hasonlóan végezhető.

5. Beállási határállapotvizsgálat

Beállási határállapoton azt az állapotot értjük amelyben a maximális rugalmas igénybevételek és a szerkezetben a képlékeny alakváltozások hatására létrejövő ún. sajátigénybevétel eloszlás együttese még kielégíti a képlékenységi feltételeket és egyidejűleg kialakul egy, a halmazódó képlékeny alakváltozásoknak megfelelő folyási mechanizmus is, amely természetesen nem azonos a képlékeny határállapotban értelmezett folyási mechanizmussal.

A probléma matematikailag szintén lineáris programozási feladatra vezet, mely a következő

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* \mathbf{s} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{N}^* \mathbf{s} + m \mathbf{r}_0 &\leq \mathbf{k} \\ m &= \max! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \mathbf{u} + \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_0^* \boldsymbol{\lambda} = 1 \quad \boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{k}^* \boldsymbol{\lambda} &= \min! \end{aligned}$$

Itt \mathbf{r}_0 a terhelési folyamat során a rugalmas alapon számolt maximális igénybevételeket jelenti az alapteher figyelembevételével: $\mathbf{r}_0 = \max(\mathbf{N}^* \mathbf{s}_{e0})$.

A feladat gyakorlati megoldása analóg a képlékeny határállapot vizsgálatával.

6. Rugalmas-képlékeny állapotváltozás vizsgálat

A rugalmas-képlékeny állapotváltozás vizsgálatával egy ismert állapotban adott teherbességek hatására keletkező állapotjellemző sebességeket tudjuk meghatározni. Az erre vonatkozó összefüggések a következők:

$$J: \{j | \varphi_j = 0\}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \mathbf{G}^* & \cdot \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} & \mathbf{N}_{[j]} \\ \cdot & \mathbf{N}_{[j]}^* & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\lambda}_{[j]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\Phi}_{[j]} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\Phi}_{[j]} \leq \mathbf{0}, \quad \dot{\lambda}_{[j]} \geq \mathbf{0}, \quad \dot{\Phi}_{[j]}^* \dot{\lambda}_{[j]} = 0$$

A fenti összefüggésrendszer egy ún. lineáris komplementer problémát alkot. A nem előjelkorlátos változók mátrixműveletekkel kiküszöbölhetők és a rendszer:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^* \mathbf{y} = 0$$

alakra hozható. Ez a feladat pedig a szimplex algoritmussal megoldható.

A kapott állapotjellemző sebességek addig érvényesek míg a tehersebesség nem változik, ill. míg újabb folyás nem történik. Ekkor a vizsgálatot meg kell ismételni.

A geometriai nemlinearitás figyelembevétele esetén az [5]-ben rugalmas anyagú szerkezetekre ismertetett módszer és az előző relációk alapján az állapotváltozás összefüggései a következők:

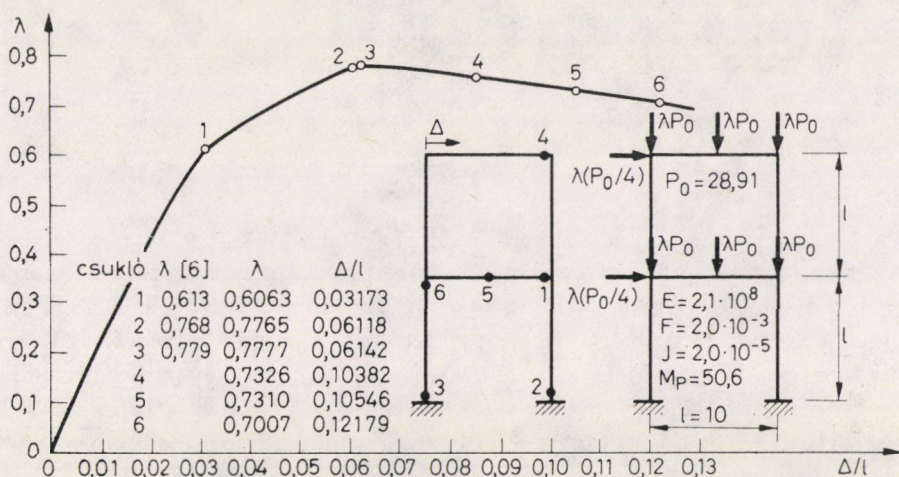
$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}^* & \cdot \\ \mathbf{L} & \mathbf{F} & \mathbf{M}_{[j]} \\ \cdot & \mathbf{N}_{[j]}^* & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\lambda}_{[j]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\Phi}_{[j]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \mathbf{t} \\ \Delta \Phi \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{[j]} &= \mathbf{0}, \\ \dot{\lambda}_{[j]} &= \mathbf{0}, \\ \dot{\Phi}_{[j]}^* \dot{\lambda}_{[j]} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Az általánosított igénybevételeknek és alakváltozásoknak az 5-ben alkalmazott definíciója következtében az egyensúlyi (\mathbf{G}^*) és a kompatibilitási (\mathbf{L}), valamint a képlékenységi (\mathbf{N}^*) és a folyási (\mathbf{M}) mátrixok nem transzponáltjai egymásnak. A \mathbf{D} geometriai merevségi mátrix és az \mathbf{F} hajlékonysági mátrix pedig nem szimmetrikus. $\Delta \mathbf{q}$, $\Delta \mathbf{t}$, $\Delta \Phi$ az egyensúlyi, kompatibilitási és a folyási hibákat jelenti. Az \mathbf{F} mátrix és az $\Delta \mathbf{t}$ vektor csak numerikusan állítható elő. Az állapotváltozási összefüggések által meghatározott lineáris komplementer probléma megoldásával a szerkezetnek a tehernövekmények hatására bekövetkező visszahatása meghatározható. A terhelési folyamat végigkövetése pl. a Newton—Raphson módszer alapján végezhető, a fellépő hibák ($\Delta \mathbf{q}$, $\Delta \mathbf{t}$, $\Delta \Phi$) adott határokon belül való tartásával.

7. Számítógépes tapasztalatok

Mind a négy probléma megoldására számítógépes programot készítettünk síkbeli keretek esetére. A programokat az MTA CDC 3300, ill. a Műszaki Mechanikai Tanszéki Kutatócsoport PDP 11/34 számítógépére írtuk.



1. ábra

Példaként egy az irodalomban [6] kevésbé pontos (másodrendű) módszerrel megoldott síkbeli keretnek a geometriai nemlinearitás figyelembevételével végzett rugalmas-képlékeny állapotváltozásának vizsgálatát mutatjuk be, képlékenységi feltételként a klasszikus képlékeny csukló hipotézis alkalmazásával.

IRODALOM

1. SZABÓ J.—ROLLER B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1971.
2. KALISZKY S.: Képlékenységtan. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
3. G. MAIER: Shakedown theory in perfect elastoplasticity. Meccanica 1969. 3. sz.
4. M. CAPURSO—G. MAIER: Incremental elastoplastic analysis and quadratic optimization. Meccanica, 1970. jún.
5. GÁSPÁR Zs.: Rugalmas rúdszerkezetek nagy elmozdulásának vizsgálata. Kandidátusi értekezés, Budapest, 1976.
6. CORRADI L.: On a stability condition for elastic plastic structures. Meccanica, March 1977.

Computer methods for the plastic analysis of framed structures. — The plastic analysis of framed structures can be formulated and solved by matrix methods similarly to the elastic case. This approach makes possible the computer solution of those problems which are illustrated by a numerical example.

**KONTINUUM ÁLLAPOTVÁLTOZÁS-VIZSGÁLATI
ALAPÖSSZEFÜGGÉSEI
ÁLTALÁNOSÍTOTT FELTÉTELES KAPCSOLATI MEZŐK MELLETT***

Az általánosított feltételes kapcsolatú kontinuumok állapotváltozás-vizsgálati alapösszefüggéseit a variációs elvek alapján vezetjük le, majd ismertetjük az érintkezési probléma matematikai programozási vonatkozásait is. Az állapotváltozás-vizsgálati alapösszefüggések alkalmazását véges dimenziós modellen mutatjuk meg.

Bevezetés

Az alábbiakban tárgyalásra kerülő jelenség a mechanika érintkezési problémái körébe tartozik. Az építési mechanikában vizsgált szerkezeteknél gyakran előfordul, hogy bizonyos hatásokra a szerkezet egyes részein kontaktusok jönnek létre vagy szűnnek meg, ezáltal a szerkezet viselkedése legtöbbször lényegesen megváltozik. Ilyen érintkezési probléma például a súrlódás, amelynek leküzdése után megszűnik a kontaktus, vagy a képlékennyé válás, amelynek során szintén a kapcsolat fellazulásáról beszélhetünk. De érintkezési probléma a talajtól elváló gerenda vagy alaptest viselkedése is, amelynél a hiányzó kontaktus bizonyos hatásokra mégis létrejöhet. Az említett példák alapján érzékelhető, hogy a kapcsolat létrejötte vagy megszűnése mindig valamilyen feltétel függvénye, ezért az ilyen kapcsolatokat feltételes kapcsolatoknak nevezzük.

A feltételes kapcsolatok viselkedése a terhelési folyamat függvénye, figyelembevétele jelentős matematikai nehézségekkel jár. Tekintve azonban a feltételes kapcsolatok egyes típusai között fennálló fizikai és matematikai dualitást, egységes kezelésük a vizsgálatot általánossá és egyben egyszerűbbé teszi.

Az alábbiakban a legáltalánosabb esetből indulunk ki: bemutatjuk a feltételes kapcsolatmezőkkel rendelkező test állapotváltozási alapegyenleteit és az alapösszefüggéseket a variációs elvek alapján, a vonatkozó matematikai programozási problémákat, majd ezek alkalmazását véges szabadságfokú modellre.

Jelöléseinkben a tenzorszámítás szokásos összegzési és deriváltképzési konvencióit alkalmazzuk, ortonormált koordináta-rendszerre vonatkozóan.

1. Az általánosított feltételes kapcsolat

A feltételes kapcsolatok fizikai és matematikai modelljének általánosítását PRAGER [1] után KALISZKY [2] alkotta meg, vizsgálatainkban az általuk megadott összefüggésekre támaszkodunk.

* Kurutzné, Dr. Kovács Márta munkája

A test egy pontjának mechanikai állapotát a pont helyén létrejövő σ_{ij} feszültségtenzor és ε_{ij} alakváltozástenzor jellemzi. Az általánosított feltételes kapcsolat helyén a σ_{ij} feszültségeket az

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij}, \alpha) \leq 0 \quad (1)$$

szilárdsági, és az ε_{ij} alakváltozásokat az

$$f(\varepsilon_{ij}, \beta) \leq 0 \quad (2)$$

geometriai feltétel korlátozza. Az összefüggésekben α anyagi, β pedig szerkezeti állandó, és minthogy értékük a testben pontról pontra változik, skalármezők elemei (pl. α lehet folyási határ, β pedig illesztési hézag). A tenzorok skalárfüggvényeként megadott \mathcal{F} az ún. *folyási függvény*, f pedig az ún. *záródási függvény*.

A továbbiakban feltételezzük, hogy az

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij}, \alpha) = 0, \quad \text{illetve} \quad f(\varepsilon_{ij}, \beta) = 0 \quad (3)$$

függvényeket a σ_{ij} feszültség-, illetve az ε_{ij} alakváltozásterben egy-egy zárt, konvex hiperfelület ábrázolja. A hiperfelületek által határolt hipertér a feltételes kapcsolat kezdeti állapotának megfelelő origót is magában foglalja.

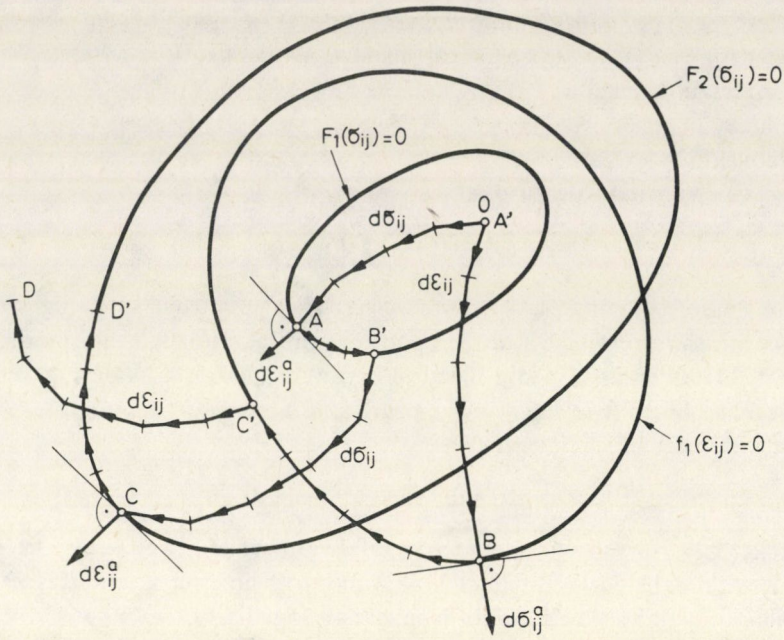
A szilárdsági és geometriai korlátozásokat egy általánosított feltételes kapcsolat esetén közös feltételbe is foglalhatjuk:

$$g\{\mathcal{F}_k(\sigma_{ij}, \alpha_k), f_l(\varepsilon_{ij}, \beta_l)\} \leq 0 \quad (4)$$

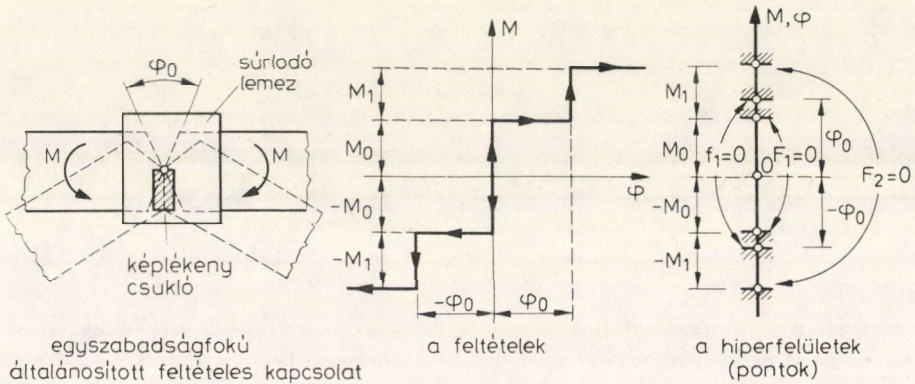
$$k = 1, 2, \dots, m; \quad l = 1, 2, \dots, n;$$

ahol m és n a kapcsolatra előírt szilárdsági, illetve geometriai feltételek száma, tehát g az általános *aktivizálódási függvény*. Ha valamennyi $g=0$ feltételt a σ_{ij} , ε_{ij} koaxiális koordináta-rendszerben ábrázoljuk, akkor a kapcsolatra előírt feltételek számának megfelelő $m+n$ elemből álló konvex hiperfelület-sereget kapunk, az 1. ábrának megfelelően. Az egyes hiperfelületek egymáshoz viszonyított helyzetében jut kifejezésre a kapcsolatra előírt feltételek precedenciája. Az 1. ábrán a $g=0$ feltételeket ábrázoltuk $m=2$ és $n=1$ mellett, vagyis azt az esetet, amikor a test egy pontjában — a vizsgált kapcsolatban — két szilárdsági feltétel közrefog egy geometriai feltételt. A 2. ábrán a fenti általánosított feltételes kapcsolatnak egy egyszerű, egyszabadságfokú változatát tüntettük fel a megfelelő feltételekkel és hiperfelületekkel együtt, amely utóbbiak — a koaxialitásnak és az egytengelyű állapotnak megfelelően — csupán egy-egy pontpárként ábrázolhatók.

Az állapotváltozás vizsgálatokor az egyes állapotjellemezőknek a terhelési folyamat során bekövetkező változását kell követnünk. Hogy kölcsönösen egyértelmű összefüggést adhassunk meg a terhelés és az egyes állapotjellemezők között, valamennyit az idő függvényének kell tekintenünk, és az állapotváltozást az egyes állapotjellemezők sebességével kell leírnunk. Idő változó alatt azonban bármilyen más,



1. ábra



2. ábra

monoton változó paramétert, például teherintenzitást is érthetünk, ily módon a sebesség és növekmény fogalma tárgyalásunkban azonos szerepet tölt be.

Így az \mathcal{F} , illetve f aktivizálódási függvényeknek megfelelően értelmezzük azok sebességét az ún. aktivizálódási potenciálssebességeket:

$$\dot{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \mathcal{F}_{ij} \dot{\sigma}_{ij}, \quad \text{ill.} \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} = f_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (5)$$

ahol \mathcal{F}_{ij} és f_{ij} az \mathcal{F} ill. f skalárfüggvény tenzor szerinti gradiensei, maguk is másodrendű tenzorok, így \mathcal{F} és f skalármennyiségek.

Amint az az 1. ábrán is látható, a kapcsolat szilárdsági értelmű aktivizálódása során $\dot{\varepsilon}_{ij}^a$ alakváltozás-növekmények, geometriai értelmű aktivizálódása során $\dot{\sigma}_{ij}^a$ feszültségnövekmények lépnek fel:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^a = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \mathcal{F}_{ij}, \quad \text{ill.} \quad \dot{\sigma}_{ij}^a = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} = \dot{\lambda} f_{ij} \quad (6)$$

ahol $\dot{\lambda}$ és $\dot{\lambda}$ nemnegatív skalárok, az aktivizálódási állapotjellemzők *szorzósebességei*. A (6) összefüggés az *aktivizálódási törvény*, amely szerint az aktivizálódási függvény az aktivizálódási állapotjellemző-növekmények potenciálfüggvénye. Ez a *normalitási törvénynek* felel meg, hiszen az $\mathcal{F} = 0$ illetve $f = 0$ hiperfelületek külső normálisát az \mathcal{F} ill. f függvények \mathcal{F}_{ij} illetve f_{ij} gradiense adja meg, így (6) geometriailag azt fejezi ki, hogy $\dot{\varepsilon}_{ij}^a$ az $\mathcal{F} = 0$, $\dot{\sigma}_{ij}^a$ az $f = 0$ felület külső normálisának irányába mutat. Az *ortogonalitási törvénynek* megfelelően viszont az aktivizálódási állapotjellemző és duálisának sebességvektorai skalárszorzata zérus:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^a \dot{\sigma}_{ij} = 0, \quad \text{illetve} \quad \dot{\sigma}_{ij}^a \dot{\varepsilon}_{ij} = 0, \quad (7)$$

vagyis (5) és (6) értelmében:

$$\dot{\lambda} \mathcal{F} = 0, \quad \text{illetve} \quad \dot{\lambda} f = 0. \quad (8)$$

Az általánosított feltételes kapcsolat viselkedése tehát az aktív és tehermentesülő állapotot magában foglalóan így jellemezhető:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \leq 0 \quad \text{és} \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \text{de} \quad \mathcal{F} \dot{\lambda} = 0, \\ \text{illetve} \\ f \leq 0 \quad \text{és} \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \text{de} \quad f \dot{\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

2. A feltételes kapcsolatú test vizsgálata

Egyetlen kapcsolat viselkedésének leírása után vizsgáljuk meg a feltételes kapcsolatokkal rendelkező kontinuum viselkedését. Az inhomogén test anyagának szilárdság tulajdonságai az időtől függetlenek, az anyag izotrop, lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny, az elmozdulások kicsinyek. A teher egyparaméteres, monoton növekvő (csökkenő), kvázistatikus.

Az összefüggések levezetése során a legáltalánosabb variációs elvből, a Hu-Washizu-féle [3] energiafunkcionálból indulunk ki és arra törekszünk, hogy az aktivizálódási törvénnyel kapcsolatos fenti összefüggéseket is a variációs elvek alapján fogalmazhassuk meg. Ezért kiindulásként az aktivizálódási törvénnyel kapcsolatosan csak a triviális feltételezésekre szorítkozunk.

Legyen a vizsgált test a háromdimenziós tér egy V résztartománya a megfelelő S határfelülettel. Ismeretes, hogy a szilárd test egy pontjának mechanikai állapotvál-

tozását az állapotjellemző sebességek határozzák meg. Ha e pont feltételes kapcsolat, akkor e pont mechanikai viselkedését az állapotjellemzőkre, illetve azok sebességeire vonatkozó (1), (2), ill. (4) feltételek szabályozzák. Tételizzük fel, hogy a vizsgált test bármely pontja feltételes kapcsolat lehet, így a kontinuum mechanikai állapotának jellemzéséhez az állapotjellemző-sebességekhez tartozó tenzormezőkön kívül az általánosított feltételmezők ismerete is szükséges. A továbbiakban \mathcal{F} és f az általánosított feltételmezőt, vagyis tenzorok skalárfüggvénymezőit jelöli.

A V tartományon értelmezett feszültség-, illetve alakváltozás-sebesség mezők (6) értelmében:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij}^a, \quad \text{illetve} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^a \quad (10)$$

ahol $\dot{\sigma}_{ij}^e$ és $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ az aktivizálódás által pillanatnyilag nem érintett — rugalmas — sebességek tenzora. Az aktivizálódási szorzósebességek $\dot{\lambda}$, illetve $\dot{\lambda}$ skalármezőire vonatkozóan feltételezzük, hogy

$$\dot{\lambda} \in V_{\mathcal{F}}, \quad \text{illetve} \quad \dot{\lambda} \in V_f \quad (11)$$

ahol $V_{\mathcal{F}}$, illetve V_f a V tartomány azon részét jelenti, ahol $\mathcal{F} = 0$, illetve $f = 0$, továbbá

$$V_{\mathcal{F}} \cap V_f = 0 \quad (12)$$

azaz $V_{\mathcal{F}}$ és V_f diszjunkt tartományok.

A V tartományban értelmezzük még a g_i térfogati erőrendszert, amelyről feltételezzük, hogy $\dot{g}_i \neq 0$, továbbá az \dot{u}_i elmozdulássebesség-mezőket.

A V tartomány S határfelületén az alábbi függvényeket definiáljuk, ha

$$S = S_u + S_\sigma \quad \text{és} \quad S_u \cap S_\sigma = 0, \quad (13)$$

$\dot{p}_i \in S_\sigma$ az S határfelület S_σ részén előírt tehersebességvektor; $\dot{v}_i \in S_u$ az S felület S_u részén előírt elmozdulássebesség-vektor; $\dot{r}_i \in S_u$ az S felület S_u részén keletkező reakciósebesség-vektor.

A V tartományon definiáljuk továbbá az $\dot{A}(\dot{\varepsilon}_{ij})$ alakváltozási és a $\dot{B}(\dot{\sigma}_{ij})$ komplementer alakváltozási teljesítménysűrűség függvényét az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} \dot{B}(\dot{\sigma}_{ij}) &= \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{A}(\dot{\varepsilon}_{ij}) \quad \text{és} \\ \dot{\sigma}_{ij} &= \frac{\partial \dot{A}}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}, \quad \text{illetve} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \dot{B}}{\partial \dot{\sigma}_{ij}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Itt

$$\begin{aligned} \dot{A}(\dot{\varepsilon}_{ij}) &= \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^e a_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{\lambda} f_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e \\ \dot{B}(\dot{\sigma}_{ij}) &= \dot{\varepsilon}_{ij}^e \dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} F_{ij} \cdot \dot{\sigma}_{ij}^e - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^e a_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij} &= a_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{\lambda} f_{ij} \quad \text{és} \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\lambda} \cdot F_{ij}\end{aligned}$$

s ezáltal az anyagtörvényt rögzítettük.

A lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny anyagú általánosított feltételes kapcsolatú test alapösszefüggéseinek levezetésénél induljunk ki a Hu-Washizu-elvből [3], [4], hiszen a lineárisan rugalmas testekre érvényes energiatételek a lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny testekre is érvényesek, ha azokat nem egy meghatározott állapothoz tartozó energiára, hanem az állapotváltozást jellemző energiasebességekre vonatkoztatjuk [5]:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_{HW} &= \int_V \dot{A}(\dot{\varepsilon}_{ij}) dV - \int_V \dot{g}_i \dot{u}_i dV - \int_{S_\sigma} \dot{p}_i \dot{u}_i dS - \\ &- \int_V \left[\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \right] \dot{\sigma}_{ij} dV - \\ &- \int_{S_u} (\dot{u}_i - \dot{v}_i) \dot{r}_i dS\end{aligned}\quad (15)$$

amelyben az első tag az alakváltozási energia, a második és harmadik tag a belső és külső erők potenciális energiája, a negyedik és ötödik tag a diszlokációs energia sebessége. Figyelembe véve a (10) összefüggéseket, a 6-mezős $\dot{\pi}_{HW}$ funkcionál:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_{HW}(\dot{\sigma}_{ij}^e, \dot{\varepsilon}_{ij}^e, \dot{u}_i, \dot{r}_i, \dot{\lambda}, \dot{\lambda}) &= \int_V \dot{A}(\dot{\varepsilon}_{ij}) dV - \int_V \dot{g}_i \dot{u}_i dV - \\ &- \int_{S_\sigma} \dot{p}_i \dot{u}_i dS - \int_V \left[\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\lambda} \mathcal{F}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \right] (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij}) dV - \\ &- \int_{S_u} (\dot{u}_i - \dot{v}_i) \dot{r}_i dS\end{aligned}\quad (16)$$

A funkcionálban szereplő $\dot{\sigma}_{ij}^e$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$, \dot{u}_i , \dot{r}_i , $\dot{\lambda}$, $\dot{\lambda}$ független mezők, így a V tartomány (vagy annak bizonyos résztartományai) felett szabadon variálhatók, hiszen csak a (6) és (10) feltételt vettük figyelembe és nem írtuk elő az egyes mezők (7), (8), ill. (9) szerinti függőségét. Képezzük tehát $\dot{\pi}_{HW}$ első variációját, hogy a stacionaritási feltételekhez jussunk:

$$\delta \dot{\pi}_{HW} = \delta_\sigma \dot{\pi}_{HW} + \delta_\varepsilon \dot{\pi}_{HW} + \delta_u \dot{\pi}_{HW} + \delta_r \dot{\pi}_{HW} + \delta_\lambda \dot{\pi}_{HW} + \delta_\lambda \dot{\pi}_{HW}$$

$$\delta_\varepsilon \dot{\pi}_{HW} = \int_V (a_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e - \dot{\sigma}_{ij}^e) \delta \dot{\varepsilon}_{ij}^e dV = 0$$

$$\begin{aligned} \delta_j \dot{\pi}_{HW} &= - \int_V \left[\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \lambda \mathcal{F}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \right] \delta \sigma_{ij}^e dV = 0 \\ \delta_i^v \dot{\pi}_{HW} &= - \int_V [\dot{\sigma}_{ij,j}^e + \lambda f_{ij,j} + \dot{g}_i] \delta \dot{u}_i dV = 0 \\ \delta_\lambda \dot{\pi}_{HW} &= - \int_V [(\dot{\sigma}_{ij}^e + \lambda f_{ij}) \mathcal{F}_{ij}] \delta \lambda dV = 0 \\ \delta_i \dot{\pi}_{HW} &= - \int_V \left[\lambda \mathcal{F}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) f_{ij} \right] \delta \dot{\lambda} dV = 0 \\ \delta_i^S \dot{\pi}_{HW} &= - \int_{S_\sigma} [\dot{p}_i - (\dot{\sigma}_{ij}^e + \lambda f_{ij}) n_j] \delta \dot{u}_i dS - \\ &\quad - \int_{S_u} [\dot{r}_i - (\dot{\sigma}_{ij}^e + \lambda f_{ij}) n_j] \delta \dot{u}_i dS = 0, \\ \delta_i \dot{\pi}_{HW} &= - \int_{S_u} (\dot{u}_i - \dot{v}_i) \delta \dot{r}_i dS = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

ahol $a_{ijkl} = a_{kijl}$ az anyagállandók negyedrendű szimmetrikus izotrop tenzora. Amint az (17)-ből nyilvánvaló, a $\delta_i \dot{\pi}_{HW} = 0$ stacionaritási feltételek a lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagú, általánosított feltételes kapcsolatú test *állapotváltozási alapegyenleteivel* egyenértékűek.

Tekintsük rendre az alapegyenleteket.

Az anyagegyenlet:

$$a_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e = \dot{\sigma}_{ij}^e \quad V\text{-ben.} \tag{18}$$

A kompatibilitási egyenlet:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \lambda \mathcal{F}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = 0 \quad V\text{-ben.} \tag{19}$$

Az egyensúlyi egyenlet:

$$(\dot{\sigma}_{ij}^e + \lambda f_{ij})_{,j} + \dot{g}_i = 0 \quad V\text{-ben} \tag{20}$$

A peremfeltételek:

$$\dot{p}_i = (\dot{\sigma}_{ij}^e + \lambda f_{ij}) n_j \quad S_\sigma\text{-n} \quad (\text{a})$$

$$\dot{r}_i = (\dot{\sigma}_{ij}^e + \lambda f_{ij}) n_j \quad S_u\text{-n} \quad (\text{b}) \tag{21}$$

$$\dot{u}_i = \dot{v}_i \quad S_u\text{-n} \quad (\text{c})$$

ahol n_j az S normálisa.

A (17) variációs egyenlőségekből megkapjuk az *aktivizálódási törvénynek* megfelelő *mellékfeltételeket* is, ha tekintetbe vesszük, hogy λ csupán $V_\mathcal{F}$ és $\dot{\lambda}$ csupán V_f

felett variálható szabadon, továbbá, hogy $V_{\mathcal{F}} \cap V_f = 0$:

$$\sigma_{ij}^e \mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F} \leq 0 \quad \text{és} \quad \lambda \geq 0 \quad V_{\mathcal{F}}\text{-ben} \quad \text{és} \quad \mathcal{F} \lambda = 0 \quad V\text{-ben}, \quad (a)$$

illetve

$$\varepsilon_{ij}^e f_{ij} = f' \leq 0 \quad \text{és} \quad \lambda \geq 0 \quad V_f\text{-ben} \quad \text{és} \quad f' \lambda = 0 \quad V\text{-ben}. \quad (b)$$

E fontos összefüggéspár az aktivizálódási feltételeknek megfelelő hiperfelületekkel kapcsolatos ortogonalitási törvényt írja le, vagyis azt, hogy aktív állapotban — amikor λ , ill. λ szabadon variálhatók — az aktivizálódási állapotjellemző és duálisának sebességvektorai ortogonálisak. Másképp fogalmazva, aktív állapotban a potenciálsebesség zérus. Ekkor $\delta \lambda \dot{\pi}_{HW} \leq 0$, ill. $\delta \lambda \dot{\pi}_{HW} \leq 0$ V_f -ben ill. $V_{\mathcal{F}}$ -ben, mert itt λ és λ csak az aktív állapot fennmaradása ($\mathcal{F} = 0$, ill. $f' = 0$) mellett variálhatók szabadon, és a tehermentesülésnek ($\mathcal{F} < 0$, ill. $f' < 0$) megfelelően nem lehetnek tetszőlegesek, hanem ekkor a $\delta \lambda \geq 0$ ill. $\delta \lambda \geq 0$ értékeket kell felvenniük. A tehermentesülést is magában foglaló $\mathcal{F} \leq 0$, ill. $f' \leq 0$ feltételek figyelembevétele *matematikai programozási feladathoz* vezet [6].

A σ_{ij}^e , λ , $\dot{\pi}_i$ mezők *statikailag lehetségesek* (egyensúlyiak), ha eleget tesznek a (20) és (21.a.b) egyensúlyi feltételeknek, és *statikailag elérhetőek* is, ha még a (22.a) feltételeket is kielégítik.

Az ε_{ij}^e , λ , \dot{u}_i mezők *kinematikailag lehetségesek* (kompatibilisek), ha eleget tesznek a (19) és (21.c) kompatibilitási feltételeknek, és *kinematikailag elégségesek* is, ha még a (22.b) feltételeket is kielégítik.

A σ_{ij}^e , λ , $\dot{\pi}_i$, ε_{ij}^e , λ , \dot{u}_i mezők *ténylegesek*, ha a megfelelők statikailag elérhetőek, ill. kinematikailag elégségesek és a (18) anyagegyenlet által megszabott kapcsolatban állnak egymással. Minthogy a $\delta \pi_{HW} = 0$ feltétel csak az összes egyenlet kielégülésével érhető el, a $\dot{\pi}_{HW}$ energiasebesség-funkcionált a tényleges mezők teszik stacionáriussá.

Megmutattuk, hogy a Hu-Washizu elvből kiindulva nemcsak az állapotváltozás-vizsgálat alapegyenleteit kaptuk meg, hanem az aktivizálódási törvénnyel kapcsolatos — korábban ismertetett — mellékfeltételekhez is eljutottunk.

A továbbiakban tekintsük át az állapotváltozásvizsgálat *matematikai programozási problémaként* való megfogalmazását.

E célból a (16) $\dot{\pi}_{HW}$ funkcionál független mezői közül némelyeket függőségbe hozunk egymással az alapegyenletek megfelelőinek kielégítése útján, miáltal $\dot{\pi}_{HW}$ funkcionálban a független mezők száma csökken, de a mellékfeltételek száma nő.

Tekintsük először az anyagegyenlet melletti kompatibilis, sőt, kinematikailag elégséges mezőket, ezáltal a 6 mezős $\dot{\pi}_{HW}$ funkcionál a 2 mezős $\dot{\pi}_p(\varepsilon_{ij}^e, \lambda)$, vagy a $\dot{\pi}_p(\dot{u}_i, \lambda)$ a potenciális energiasebesség funkcionáljára egyszerűsödik a (18), (19), (21.c) és (22.b) feltételek kielégítése révén. Leegyszerűsített geometriai értelmezésben ez azt jelenti, hogy keressük a $\dot{\pi}_{HW}$ funkcionálnak megfelelő „felület” extrémális pontját a (18), (19), (21.c) és (22.b) mellékfeltételeknek megfelelő „metszévonalak” mentén. Kiterjesztve az összefüggéseket a tehermentesítés esetére is, az állapotváltozás-

vizsgálat alapösszefüggéseit a *potenciális energiasebesség minimumának tétele* alapján tehát így foglалhatjuk össze:

$$\begin{aligned} \pi_p &= \int_V \dot{A}(\dot{\epsilon}_{ij}) dV - \int_V \dot{g}_i \dot{u}_i dV - \int_{S_\sigma} \dot{p}_i \dot{u}_i dS = \min! \quad V\text{-ben,} \\ a_{ijkl} \dot{\epsilon}_k^e - \dot{\sigma}_{ij}^e &= 0 \quad V\text{-ben} \\ \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\lambda} \mathcal{F}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) &= 0 \quad V\text{-ben} \\ \dot{u}_i - \dot{v}_i &= 0 \quad S_u\text{-n,} \\ \dot{\lambda} \geq 0, \quad f' = f_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^e \leq 0, \quad f' \dot{\lambda} &= 0 \quad V\text{-ben,} \\ \dot{\lambda} \geq 0 \quad V\text{-ben.} \end{aligned} \tag{23}$$

Egy lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagú, általánosított feltételes kapcsolatú test kinematikailag lehetséges és az aktivizálódási törvényt kielégítő, tehát kinematikailag elégséges alakváltozás-sebességmezői közül az a tényleges, amely a potenciális energia sebességét minimummá teszi. Minthogy a potenciális energia sebességének a kifejezése az ismeretlen állapotjellemző mezők kvadratikusan függvénye, és ezen mezőkre egyenlőtlenségi mellékfeltételek is érvényesek, a (23) feladat kvadratikusan programozási problémára vezet.

Tekintsük most az anyagegyenlet melletti egyensúlyi, sőt, statikailag elérhető mezőket, vagyis követeljük meg a (18), (20), (21.a.b) és (22.a) feltételek teljesülését. A (16) 6 mezős π_{HW} funkcionál, így ismét 2 mezőre egyszerűsödik: $\dot{\pi}(\dot{\sigma}_{ij}^e, \dot{\lambda}) = -\dot{\pi}_c$, ahol $\dot{\pi}_c$ a hagyományosan értelmezett komplementer energia sebessége. Kiterjesztve az összefüggéseket a tehermentesítés esetére is, az állapotváltozás-vizsgálat alapösszefüggéseit a *komplementer energiasebesség minimumának tétele* alapján tehát így foglалhatjuk össze:

$$\begin{aligned} -\dot{\pi}_c &= \max! \quad \text{vagyis} \\ \dot{\pi}_c &= \int_V \dot{B}(\dot{\sigma}_{ij}) dV - \int_{S_u} \dot{v}_i \dot{r}_i dS = \min! \quad V\text{-ben,} \\ a_{ijkl} \dot{\epsilon}_k^e - \dot{\sigma}_{ij}^e &= 0 \quad V\text{-ben,} \\ \dot{\sigma}_{ij,j}^e + \dot{\lambda} f_{ij,j} + \dot{g}_i &= 0 \quad V\text{-ben,} \\ \dot{p}_i - (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij}) n_j &= 0 \quad S_\sigma\text{-n,} \\ \dot{r}_i - (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij}) n_j &= 0 \quad S_u\text{-n,} \\ \dot{\lambda} \geq 0, \quad \mathcal{F}' = \mathcal{F}_{ij} \dot{\sigma}_{ij}^e \leq 0, \quad \mathcal{F}' \dot{\lambda} &= 0 \quad V\text{-ben,} \\ \dot{\lambda} \geq 0 \quad V\text{-ben.} \end{aligned} \tag{24}$$

Egy lineárisan rugalmas tökéletesen képlékeny anyagú, általánosított feltételes kapcsolatú test statikailag lehetséges és az aktivizálódási törvényt kielégítő, tehát statikailag elérhető feszültségsebesség-mezői közül az a tényleges, amely a kiegészítő potenciális energia sebességét minimummá teszi.

A komplementer energia sebességének kifejezése az ismeretlen állapotjellemező mezők kvadratikusan függvénye, így a (24) feladat szintén kvadratikusan programozási feladatra vezet.

A fenti két energiatételt leegyszerűsített geometriai értelmezésben a következőképpen foglalhatjuk össze: a π_{WH} funkcionálnak a tényleges mezők felett nyeregpontja van, ez a pont egyben a kinematikailag elégséges (azaz a szilárdságilag aktív, ill. tehermentesülő kompatibilis) mezők feletti minimumot, a statikailag elérhető (azaz a geometriailag aktív, ill. tehermentesülő egyensúlyi) mezők feletti maximumot reprezentálja.

Megemlítjük még, hogy a Hu-Washizu-elv alapján jó néhány különböző variációs elv vezethető le, amelyek természetesen valamennyien a π_{HW} ugyanazon nyeregpontját jelölik ki, de más-más bázisban, így más-más jellegű extrémummal.

Írjuk most fel a Hu-Washizu-féle funkcionált tisztán az aktivizálódási állapotjellemező-sebességek függvényében. Ez egy hibrid elvhez vezet, minthogy itt az anyagegyenlet által leírt kapcsolatban levő egyensúlyi, illetve kompatibilis mezőket feltételezünk, és ahol az ismeretlen mezők az aktivizálódási állapotjellemező mezők feszültségi és alakváltozási jellegű szorzósebességei. Ez a (18), (19), (20), (21) feltételek érvényességét jelenti. Így a 2 mezős ún. *aktivizálódási energiasebesség* funkcionáljához jutunk, és az alapösszefüggések így foglalhatók össze:

$$\begin{aligned} \pi_{\text{akk}}(\dot{\lambda}, \dot{\lambda}) &= \int_V \dot{\lambda} (\dot{\epsilon}_{ij}) dV - \int_V (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij}) (\dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\lambda} \mathcal{F}_{ij}) dV = \text{extr!} & V\text{-ben,} \\ a_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e - \dot{\sigma}_{ij}^e &= 0 & V\text{-ben,} \\ \dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij} + \dot{g}_i &= 0 & V\text{-ben,} \\ \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\lambda} \mathcal{F}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) &= 0 & V\text{-ben,} \\ \dot{p}_i - (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij}) n_j &= 0 & S_\sigma\text{-n,} \\ \dot{r}_i - (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij}) n_j &= 0 & S_u\text{-n,} \\ \dot{u}_i - \dot{v}_i &= 0 & S_u\text{-n,} \\ \left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &\geq 0 \\ \dot{\lambda} &\leq 0 \end{aligned} \right\} & V\text{-ben} \end{aligned} \tag{25}$$

Egy lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagú, általánosított feltételes kapcsolatú test statikailag és kinematikailag lehetséges, az anyagegyenletet is kielégítő

aktivizálódási állapotjellemző-sebességei közül az a tényleges vagyis statikailag elérhető és kinematikailag elégséges, amely az aktivizálódási állapotjellemző sebességmezők függvényében felírt energiasebességet stacionáriussá teszi.

3. Alkalmazás véges szabadságfokú modellre

Kontinuumfeladatunk véges szabadságfokú modelljét úgy képzeljük el, mint véges méretű elemek illeszkedő összességét, ahol az egyes elemek érintkező felületeinek bizonyos pontjaiban folytonossági követelményeket elégitünk ki. E pontok a csomópontok. Az állapotjellemzőket tehát e csomópontokra vonatkoztatott véges méretű vektorokkal jellemezhetjük. Célszerűen ugyanezen pontokra vonatkoztatjuk az aktivizálódási feltételeket is. Az aktivizálódási feltételeknek megfelelő hiperfelületeket konvex poliédersereggént vesszük fel, ezáltal a feltételeket linearizáljuk. Ennek megfelelően a *linearizált feltételek* az alábbiak lesznek:

$$\mathcal{F} = \mathbf{N}\sigma - \alpha \leq 0,$$

illetve

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}\varepsilon - \beta \leq 0$$

ahol \mathbf{N} és \mathbf{M} az ún. gradiens hipermátrixok:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma}, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon} \quad (26)$$

vagyis az aktivizálódási hiperfelületeknek megfelelő konvex poliédereket alkotó síkok normálvektorait — függvényeket — tartalmazó hipermátrixok, továbbá α és β ugyanezen síkok origótól való távolságát — skalárokat — tartalmazó hipervektorok.

Az aktivizálódási törvény véges szabadságfokú modellre érvényes alakja:

$$\dot{\varepsilon}^a = \mathbf{\Lambda}^* \mathbf{N}, \quad \text{ill.} \quad \dot{\sigma}^a = \mathbf{\lambda}^* \mathbf{M} \quad (27)$$

az aktivizálódási potenciálssebességek pedig:

$$\mathcal{F} = \mathbf{N}\dot{\sigma}^e, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{f} = \mathbf{M}\dot{\varepsilon}^e \quad (28)$$

Az állapotjellemző-sebességek így

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \dot{\sigma}^e + \dot{\sigma}^a \\ \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^a \end{aligned} \quad (29)$$

Az alábbiakban a legegyszerűbb véges szabadságfokú rendszerre, a rúdszerkezetre alkalmazva mutatjuk be az állapotváltozás-vizsgálat alapösszefüggéseit.

Tekintetbe véve [7] alapján a rúdszerkezet alapegyenletét

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (30)$$

amely megadja az összefüggést a szerkezet adott \mathbf{q} erő- és \mathbf{t} kinematikai terhei, valamint a keletkező \mathbf{u} elmozdulásai és \mathbf{s} belső erői között, a kapcsolati feltételek az alábbi alakot ölthetik.

Legyen az i -edik kapcsolati helyre vonatkozó *szilárdsági* feltétel az alábbi linearizált képlékenységi feltétel [8]:

$$\mathcal{F}_i = \mathbf{N}_i \mathbf{s}_i^j - \mathbf{k}_i \leq \mathbf{0} \quad (31)$$

ahol \mathbf{s}_i^j az i -edik kapcsolati helyhez tartozó \mathbf{s}_i belső erők közül a korlátozás alá tartozókat jelöli. \mathbf{N}_i mátrix rögzíti az utóbbiak kombinációit azáltal, hogy a konvex poliéder egyes hipersíkjaihoz tartozó normális egységvektorokat tartalmazza. A \mathbf{k}_i vektor a hipersíkoknak az origótól való távolságát adja meg. Például, ha $\mathbf{N}_i = \mathbf{E}$, vagyis az identitás mátrixa, akkor a hipersíkok normálisai éppen a koordinátatengelyek, így a feltétel csupán a keletkező igénybevételeknek a törőigénybevételekkel való numerikus összehasonlítását írja elő.

Legyen az i -edik kapcsolati helyre vonatkozó *geometriai* feltétel a relatív elmozdulásokra vonatkozó alábbi linearizált alak:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{t}_i^j - \mathbf{l}_i \leq \mathbf{0} \quad (32)$$

ahol \mathbf{t}_i^j az i -edik kapcsolati helyen fellépő \mathbf{t}_i relatív elmozdulások közül a korlátozás alá tartozókat jelöli. \mathbf{M}_i írja elő ezek kombinációit az adott \mathbf{l}_i konstansokhoz viszonyítva.

Tekintsük a kapcsolatok aktivizálódása során az \mathbf{s}^a illetve \mathbf{t}^a növekményvektorokat:

$$\mathbf{s}^a = \lambda^* \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{t}} = \lambda^* \mathbf{M} \quad \text{és} \quad \mathbf{t}^a = \Lambda^* \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{s}} = \Lambda^* \mathbf{N} \quad (33)$$

ahol λ az ún. szilárdsági és Λ a geometriai szorzósebesség, a keletkező belső erő, illetve relatív elmozduláskomponensek kombinációira vonatkozóan. Egyszabadságfokú kapcsolatnál magával a növekménnyel egyenlő.

A terhelési folyamat során az állapotjellemzők \mathbf{q} , \mathbf{t} , \mathbf{u} , \mathbf{s} , λ és Λ sebességei (növekményei) közötti összefüggések az általánosított feltételes kapcsolatok aktivizálódásának folyamatában:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^* & \mathbf{0} & \mathbf{G}^* \mathbf{M} \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} & \mathbf{N}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M} \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \\ \Lambda \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t} \\ \mathcal{F} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (34)$$

továbbá

$$\begin{bmatrix} \Lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad \text{és} \quad [\Lambda \ \lambda] \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} = 0 \quad (34.a)$$

Megállapítható, hogy mind az egyensúlyi, mint a kompatibilitási egyenletek kiegészültek a megfelelő aktivizálódási igénybevétel-, illetve relatív elmozdulássebességekkel.

Küszöböljük ki a (34) egyenletrendszerből a nem előjelkorlátos \dot{u} és \dot{s} ismeretleneket. Ekkor az alábbi egyenletet nyerjük:

$$\begin{bmatrix} -NF^{-1}GK^{-1}G^*F^{-1}N^* + \\ + NF^{-1}N^* \\ - \\ -MGK^{-1}G^*M^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ - \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N[F^{-1}GK^{-1}(\dot{q} - G^*F^{-1}\dot{t}) + F^{-1}\dot{t}] \\ -MGK^{-1}(\dot{q} - G^*F^{-1}\dot{t}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{f} \\ \dot{t} \end{bmatrix} = 0$$

amelyet egyszerűbb alakra hozva:

$$D\dot{x} + \dot{d} - y = 0$$

ahol

$$\dot{x} \geq 0, \quad \dot{y} \leq 0 \quad \text{és} \quad \dot{x}^* \dot{y} = 0$$

Ez a feladat megfelel az alábbi lineáris komplementer problémának:

$$LC: \{D\dot{x} - \dot{y} + \dot{d} = 0, \quad \dot{x} \geq 0, \quad \dot{y} \leq 0, \quad \dot{x}^* \dot{y} = 0\}$$

amely egyenértékű a következő kvadratikus programozási feladat primál-duál feladatpárjával:

$$Q1: \min \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^* D \dot{x} + \dot{d}^* \dot{x} \mid \dot{x} \geq 0 \right\}$$

$$Q2: \min \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^* D \dot{x} \mid D \dot{x} + \dot{d} \leq 0, \quad \dot{x} \geq 0 \right\}$$

A lineáris komplementer problémával ekvivalens lineáris programozási feladat megoldását a szimplex algoritmussal egyenértékű eljárás alapján végeztük, amelynek részleteiről, fizikai háttéréről, továbbá számos numerikus eredményről és számítástechnikai tapasztalatról a [9], [10], [11], [12], [13] dolgozatokban számoltunk be.

IRODALOM

1. PRAGER, W.: On ideal locking materials, Trans. Soc. Rheol. 1. (1967).
2. KALISZKY, S.: The Analysis of Structures with Conditional Joints, J. Struct. Mech., 6(2). 195—210. (1978).
3. WASHIZU, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, (1968).

4. SCHARLE, P.: An Example for Constructing the Variational (Energetic) Error Principle, *Acta Technica*. Tom. 86. No. 3—4. 395—400. (1978).
5. KALISZKY, S.: Képlékenységtan. Akadémiai Kiadó, Budapest, (1975).
6. KALISZKY, S., NÉDLI, P.: Analysis of Elasto-Plastic Structures by Mathematical Programming. *Acta Technica* Tom. 83. (3—4) 205—212. (1976).
7. SZABÓ, J., ROLLER, B.: Anwendung der Matrizenrechnung auf stabwerke. Akadémiai Kiadó, Budapest, (1978).
8. NÉDLI, P.: Lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagú rüdszerkezetek számítása matematikai programozással. Egyetemi doktori értekezés (1976).
9. KURUTZ, M.: Analysis of Plastic Load Capacity of Plane Frameworks by Kinematic Loading, *Periodica Polytechnica*. Vol. 18. (1—2) 71—81. (1974).
10. KURUTZ, M.: Feltételes kapcsolatokat tartalmazó szerkezetek gépi számítása kinematikai terhekkel. *Magyar Építőipar*. XXIV. évf. 7—8. sz. 455—461. (1975).
11. KURUTZ, M.: State Change Analysis of Structures with Generalized Conditional Joints. *Periodica Polytechnica* Vol. 25. No. 3—4. 169—189. (1981).
12. KURUTZ, M.: Általánosított feltételes kapcsolatokkal rendelkező szerkezetek állapotváltozás-vizsgálata. *Műszaki Tudomány* (megjelenés alatt).
13. KURUTZ, M.: State Change Analysis of Elasto-Plastic Structures with Generalized Conditional Joints. *ZAMM* (megjelenés alatt).
14. CAPURSO, M.: Extremum Theorems for the Solution of the Rate Problem in Elastic-Plastic Fracturing Structures, *J. Struct. Mech.* 7 (4) 411—434 (1979).
15. PANAGIOTOPOULOS, P., TALASLIDIS, D.: A Linear Analysis Approach to the Solution of Certain Classes of Variational Inequality Problems in Structural Analysis. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 16. 991—1005. (1980).

Basis relations of state change analysis of continua with generalized conditional joint field. — The basic relations of the state change analysis of continua with generalized conditional joints, obtained from the variational principles, and the mathematical programming relations of the contact problem are presented. The applications of the basic relations are illustrated on discret models.

DISZKRÉT MODELLEKKEL LEÍRHATÓ TARTÓSZERKEZETEK KÉPLÉKENY HATÁRÁLLAPOT-VIZSGÁLATA ÉS OPTIMÁLIS TERVEZÉSE SZTOHASZTIKUS PROGRAMOZÁSSAL*

1. Bevezetés

Az anyag- és energiatakarékosság miatt egyre nagyobb jelentősége van az anyagminőség megbízhatóságának. Ebben a dolgozatban képlékeny határállapot-vizsgálat és optimális tervezés esetén azt vizsgáljuk, hogy az anyagminőség ingadozása milyen hatással van a szerkezetekre. A folyási határértékeket valószínűségi változóknak tekintjük, így szükségessé vált egy sztohasztikus képlékenységi feltétel bevezetése. A feladatokat sztohasztikus programokkal oldjuk meg.

* Vásárhelyiné dr. Szabó Anna munkája.

2. Képlékenységi feltétel sztohasztikus feladatok esetén

Szerkezeti elemek (ill. keresztmetszetek) vizsgálatánál csak véges számú pontban szoktuk a feszültségeket számítani, és feltételezzük, hogy az elemeknek csak ezen kitüntetett pontjai játszanak szerepet a képlékenységi feltételeknél.

Feltételezzük továbbá:

- Egy keresztmetszet ezen pontjaiban a folyási határértékek nem független valószínűségi változók.
- A folyási határok együttes eloszlása normális, a várható értékek, szórások és a változók közötti korrelációk értékei ismertek.

Egy elem képlékenységi feltételei determinisztikus esetben:

$$\begin{aligned} \tau_{a1}^f &\leq \tau_1 \leq \tau_{f1}^f \\ \tau_{a2}^f &\leq \tau_2 \leq \tau_{f2}^f \\ \tau_{a3}^f &\leq \tau_3 \leq \tau_{f3}^f \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \tau_{an}^f &\leq \tau_n \leq \tau_{fn}^f \end{aligned} \quad (1)$$

ahol $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ az egyes elemeket reprezentáló pontok maximális nyíró feszültségei.

Legyen egy elem megbízhatóságának valószínűségi szintje adott (p), vagyis legalább p valószínűséggel az elem teherviselő.

Írjuk fel annak a valószínűségét, hogy az anyagi pontra jellemző folyási függvény értéke nem lehet pozitív:

$$\begin{aligned} g(\tau, \tau_f) &= P(\tau_{a1}^f \leq \tau_1, \tau_{a2}^f \leq \tau_2, \tau_{a3}^f \leq \tau_3 \dots \\ &-\tau_{f1}^f \leq -\tau_1, -\tau_{f2}^f \leq -\tau_2 \dots, -\tau_{fn}^f \leq -\tau_n) \geq p \end{aligned} \quad (2)$$

Mint látható, a (2) összefüggés definíciószerűen az eloszlásfüggvény értéke, a főnyírófeszültség értékeitől függő helyen. A b) feltételben normális eloszlást tételeztünk fel, a (2) standardizált változókkal egyszerűbb alakra hozható.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{ai}^f - E(\tau_{ai}^f)}{D(\tau_{ai}^f)} &= \xi_i & \frac{-\tau_{fi}^f + E(\tau_{fi}^f)}{D(\tau_{fi}^f)} &= \eta_i, \\ \frac{\tau_i - E(\tau_{ai}^f)}{D(\tau_{ai}^f)} &= x_i, & \frac{-\tau_i + E(\tau_{fi}^f)}{D(\tau_{fi}^f)} &= y_i. \end{aligned}$$

A fenti jelölésekkel (2) a következő alakra hozható:

$$P(\xi_i \leq x_i, \eta_i \leq y_i, i = 1, \dots, n) \geq p \quad (3)$$

A standard normális eloszlásfüggvény (Φ) szokásos jelölésével (3) a következő formában is írható:

$$\Phi^{(0,1,R)}(\hat{x}_i, i = 1, \dots, 2n) \geq p \quad (4)$$

ahol az \hat{x} vektorban az x és y vektort foglaltuk össze. Így egy normális eloszlásfüggvény értékét kell számolnunk. Ez matematikailag lehetséges, de igen számításigényes. Ezért a gyakorlat szempontjából megfelelőbb, ha feltételezzük, hogy az alsó és felső folyási határok értéke független valószínűségi változók. Ekkor a (4) összefüggés a független valószínűségi változók szorzatára vonatkozó tétel értelmében a következőképp írható:

$$\Phi^{(0,1,R)}(x_i, i = 1, \dots, n) \Phi^{(0,1,R)}(y_i, i = 1, \dots, n) \geq p \quad (5)$$

illetve

$$P(\xi_i \leq x_i, i = 1, \dots, n) P(\eta_i \leq y_i, i = 1, \dots, n) \geq p \quad (6)$$

PRÉKOPA [1] munkájának 3. fejezet 18. tételében bizonyítja, hogy (6) konvex felületet alkot.

3. Képlékeny határállapot-vizsgálat

A képlékenységtan legrégebben használt, legalaposabban ismert területe a képlékeny határállapot-vizsgálat. Feladata a szerkezetek teherbírási kapacitásának meghatározása, arányosan növekvő terhelés mellett. Ez a fejezet először a 3.1 pontban ismerteti a determinisztikus feladatok esetén a határállapot-problémák megoldását lineáris programozással. A 3.2 részben a folyási határok értékeiről tételezzük fel, hogy valószínűségi változók.

3.1 Képlékeny határállapot-vizsgálat determinisztikus feladatok esetén

Határállapot-vizsgálat esetén keressük azt a maximális teherparaméter értéket, amely mellett a szerkezet még éppen nem válik labilissá — még éppen nem lépnek fel korlátlan képlékeny alakváltozások. Ekkor a képlékeny alakváltozások mellett a szerkezet rugalmas alakváltozásai nem játszanak szerepet, ezért elegendő a vizsgálatot merev-ideálisan képlékeny anyagú szerkezeten elvégezni. Ha a teher egyparaméteres, és a paraméter monoton növekvő, akkor csak egyszer alakulhat ki határállapot, és ezt a teherparaméter szélső értéke jellemzi.

A képlékeny határállapot-vizsgálat két alapvető tétele a statikai és a kinematikai tétel. Ezek alapján felírható az a lineáris programozási feladatpár, amellyel a feladatok megoldhatók. A továbbiakban a statikai tételre lesz szükségünk. A statikai tétel értelmében a törőintenzitás a statikailag lehetséges teherintenzitások maximuma. Statikailag lehetséges az a teherintenzitás, amelyhez található olyan belső erőeloszlás, amely kielégíti az egyensúlyi egyenleteket és a képlékenységi feltételeket.

Ennek alapján felírható a feladat lineáris programozás primál feladatának megfelelő megfogalmazása:

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \alpha \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (7/a)$$

$$\mathbf{k}_a \leq \mathbf{N}^* \mathbf{s} \leq \mathbf{k}_f \quad (7/b) \quad (7)$$

$$\alpha \rightarrow \max. \quad (7/c)$$

3.2 Képlékeny határállapot-vizsgálat abban az esetben, ha a folyási határok valószínűségi változók

A határállapot-vizsgálat a (7) összefüggésekkel leírt statikai tétel alapján végezhető el.

A szerkezet egyensúlyi egyenletei (7/a) változatlanok maradnak. A (7/b) képlékenységi feltétel helyett most a 2. fejezetben levezetett sztohasztikus képlékenységi feltételt használjuk. A (7/c) célfüggvény változatlan. Így a sztohasztikus programozási feladat a következőképp írható fel:

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \alpha \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (8/a)$$

$$P^i(\mathbf{k}_a^i \leq \mathbf{N} \mathbf{s}^i \leq \mathbf{k}_f^i) \geq p^i \quad i = 1 \dots n \quad (8/b) \quad (8)$$

$$(-\alpha) \rightarrow \min. \quad (8/c)$$

Bővítsük az ismeretlen belső erők vektorát a teherparaméterrel, a geometriai mátrix transzponáltját pedig a tehervektorral.

$$\hat{\mathbf{G}}^* = [\mathbf{G}^* \quad \mathbf{q}]; \quad \hat{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Ekkor a feladat egyszerűbb formában írható fel:

$$\hat{\mathbf{G}}^* \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (9/a)$$

$$P^i(\mathbf{k}_a^i \leq \mathbf{N} \mathbf{s}^i \leq \mathbf{k}_f^i) \geq p^i \quad i = 1 \dots n \quad (9/b) \quad (9)$$

$$(-\hat{s}_{m+1}) \rightarrow \min. \quad (9/c)$$

Ez a feladat megfelel Prékopa valószínűségi változókkal korlátozott M1 jelű sztohasztikus programozási modelljének [1].

4. Optimális tervezés

A szerkezettervezés célja a szerkezeti elemek szükséges képlékeny teherbírási értékeinek meghatározása oly módon, hogy a szerkezet statikai szempontból megfelelő legyen, ugyanakkor eleget tegyen gazdasági vagy egyéb optimum-kritériumoknak.

Csak a minimális súlyra való optimális feladattal foglalkozunk, s felhasználjuk azt az általánosan elfogadott közelítést, hogy a szerkezet súlya felírható a teherbírás-jellemzők lineáris kombinációjaként.

4.1 Optimális tervezés determinisztikus feladatok esetén

A klasszikus, minimális súlyú szerkezetek optimális tervezési feladata esetén adottnak tekintjük a terheket, a szerkezet geometriáját (geometriai mátrixát) a képlékenységi feltételeket (képlékenységi mátrixát) és keressük a szerkezet teherbírását jellemző értékeket (folyási határok értékeit) úgy, hogy az egyensúlyi egyenletek és a képlékenységi feltételek teljesüljenek, a teherbírás-jellemzők lineáris kombinációja minimális legyen. Vagyis a lineáris programozási primál feladat a következőképp állítható fel.

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (10/a)$$

$$\mathbf{N}^* \mathbf{s} - \mathbf{k} \leq \mathbf{0} \quad (10/b) \quad (10)$$

$$\mathbf{l}^* \mathbf{k} \rightarrow \min. \quad (10/c)$$

Ez megfelel az optimális tervezés statikai tételének, melynek értelmében annak a szerkezetnek a súlya, amelyhez található egy, az egyensúlyi és képlékenységi feltételeket kielégítő belsőerő-eloszlás, nagyobb vagy egyenlő, mint a minimális súly.

4.2 Optimális tervezés abban az esetben, ha a folyási határok értékei valószínűségi változók

A determinisztikus feladat megfogalmazásától ez a sztohasztikus feladat annyiban tér el, hogy most a folyási határok várható értékeit keressük. A szórások és a korrelációk értékeit ismertnek tételezzük fel. Az optimális tervezési feladatunk kiindulópontját a (10) összefüggésekkel leírt statikai tétel jelenti.

A szerkezet (10/a) egyensúlyi egyenletei változatlanok maradnak. A (10/b) képlékenységi feltétel helyett a 2. fejezetben bevezetett sztohasztikus képlékenységi feltételt használjuk. A célfüggvény felírásakor a következő gondolatmenetet kövessük: A szerkezet súlya annál kisebb, minél jobban megközelítik a belső erők a folyási határok értékeit. Ezt az eltérést — a valószínűségi változójú folyási határértékek és a belső erők közti különbséget — mint büntető függvényt tekintjük. Feltételezzük, hogy az eltéréstől a büntetés lineárisan függ. A büntetések összegének várható értékét az alsó folyási határ esetén a következőképp írhatjuk fel:

$$P_e^{(1)} = \sum_{i=1}^m (N_i s_i - E(k_{ai})) \int_{-\infty}^{N_i s_i} (N_i s_i - v) dF_i^{k_{ai}}(v). \quad (11)$$

Analóg módon a felső folyási határtól való eltérés esetén a büntetés a következő alakú:

$$P_e^{(2)} = \sum_{i=1}^m (E(k_{fi}) - N_i s_i) \int_{N_i s_i}^{\infty} (v - N_i s_i) dF_i^{k_{fi}}(v). \quad (12)$$

Így a célfüggvény (11) és (12) összegeként felírható. A Stieltjes-integrálokat a sűrűségfüggvények segítségével Riemann-integrálokká átalakítva és parciálisan integrálva (11) és (12) egyszerűbb alakban írható, kihasználva azt, hogy $vF(v) \rightarrow 0$, ha $v \rightarrow -\infty$, illetve $v(1-F(v)) \rightarrow 0$, ha $v \rightarrow \infty$.

$$P_e^{(1)} = \sum_{i=1}^m (N_i s_i - E(k_{ai})) \int_{-\infty}^{N_i s_i} F_i^{k_{ai}}(v) dv, \quad (13)$$

illetve

$$P_e^{(2)} = \sum_{i=1}^m (-N_i s_i + E(k_{fi})) \int_{-\infty}^{N_i s_i} (1 - F_i^{k_{fi}}(v)) dv. \quad (14)$$

Végül a sztohasztikus programozási feladat a következő:

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (15/a)$$

$$P^j(k_{ai}^j \leq N s_i \leq k_{fi}^j) \geq p^j \quad j = 1 \dots n \quad (15/b)$$

(15)

$$P_e^{(1)} + P_e^{(2)} = \sum_{i=1}^m (N_j s_j - E(k_{aj})) \int_{-\infty}^{N_j s_j} F_j^{k_{aj}}(v) dv +$$

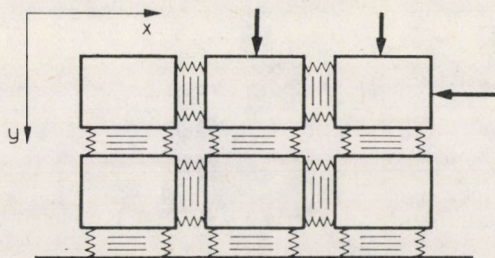
$$+ \sum_{j=1}^m (E(k_{fj}) - N_j s_j) \int_{-\infty}^{N_j s_j} (1 - F_j^{k_{fj}}(v)) dv \rightarrow \min. \quad (15/c)$$

Ez a feladat Prékopa M11-es modelljének felel meg [1].

5. Numerikus tapasztalatok panelszerkezetek számításánál

A 3., illetve 4. fejezetben ismertetett eljárásokat panelszerkezetek számításánál mutatjuk be. A szerkezeteket a merev tárcsa modellel közelítettük [2]. Ekkor a paneleket olyan merev testeknek tekintjük, melyeket élei mentén három ideálisan képlékeny rugó kapcsol össze az 1. ábra szerint. A rugók közül kettő a húzást-nyomást, egy pedig a nyírást veszi fel.

Ha két panelél csatlakozását mint egy keresztmetszetet fogjuk fel, ahol a képlékenységi feltételeket a rugóknál számítjuk, határállapot-vizsgálat esetén a (8) optimális tervezéskor a (15) összefüggésekkel felírt sztohasztikus programozási feladatot kell megoldanunk.



1. ábra

5.1 Panelszerkezetek határállapot-vizsgálata

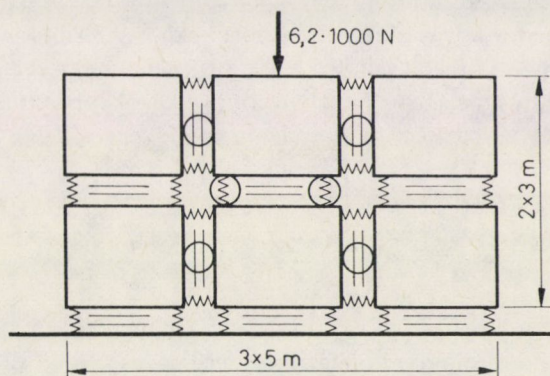
Azt vizsgáltuk, hogy az egy panelél mentén levő három rugó közötti korreláció, majd a szórásértékek hogyan befolyásolják a törőteher értékét.

a) Korrelációs mátrix hatása a törőparaméter értékére és a folyási mechanizmus kialakulására

Determinisztikus folyási határnak a várható értéket tekintettük (2. ábra). Sztohasztikus esetekben a szórások értékeit nem változtattuk, az egyes korrelációs mátrixokat az ábrák mellett tüntetjük fel. A korrelációs mátrix sorai illetve oszlopai rendre a bal oldali, jobb oldali húzási rugóra, bal oldali húzási rugókra és a nyírási rugókra vonatkoznak.

A folyási határok várható értékei és szórásai a vízszintes panelélek mentén

	várható érték	szórás
nyomás:	$-2080,0 \text{ N/cm}^2$	25,5
húzás:	$820,0 \text{ N/cm}^2$	25,5
nyírás:	$\pm 1470,0 \text{ N/cm}^2$	25,5



2. ábra

Függőleges panelélek mentén:

	várható érték	szórás
nyomás:	$-2000,0 \text{ N/cm}^2$	18,0
húzás:	$820,0 \text{ N/cm}^2$	18,0
nyírás:	$\pm 1020,0 \text{ N/cm}^2$	14,0

Az előírt biztonság (p) minden esetben 95%. Egy panelélen belül körrel jelöljük azt a rugót, ahol a folyás bekövetkezett (3. ábra).

A korrelációs mátrix változásával a törőparaméter értéke is változott, az eltérés elérte a 26%-ot is. Vagyis a minőség egyenletessége előnyösen befolyásolja a szerkezet viselkedését.

A folyási mechanizmusok igen változatos képet mutatnak. Sztohasztikus esetben még ilyen egyszerű tartó és teher esetén se megjósolható, hogy határállapotban milyen törési kép alakul ki. Érdeemes rámutatni, hogy sztohasztikus esetben sokkal több helyen alakul ki folyás, mint a determinisztikus számításokban.

b) Szórás hatása a törőparaméter értékére

Számításokat végeztünk különböző szórások esetére. Az előbbi feladatban a 4-es korrelációs mátrixot használtuk, a várható értékek változatlanok voltak. Ekkor a következő törőparaméterértékek és folyásmechanizmusok alakultak ki (4. ábra).

Mint látható, a törőparaméter értéke rohamosan növekszik a szórások csökkenésével. Vagyis az anyag minőségének állandósága igen előnyösen befolyásolja a szerkezet viselkedését. Érdeemes rámutatni, hogy a gyakorlatban előforduló szórásértékek esetén (függőleges éleknél 25—30, vízszintes éleknél 30—35) a feladatnak nem volt lehetséges megoldása, vagyis teljesen megjósolhatatlan a szerkezet viselkedése.

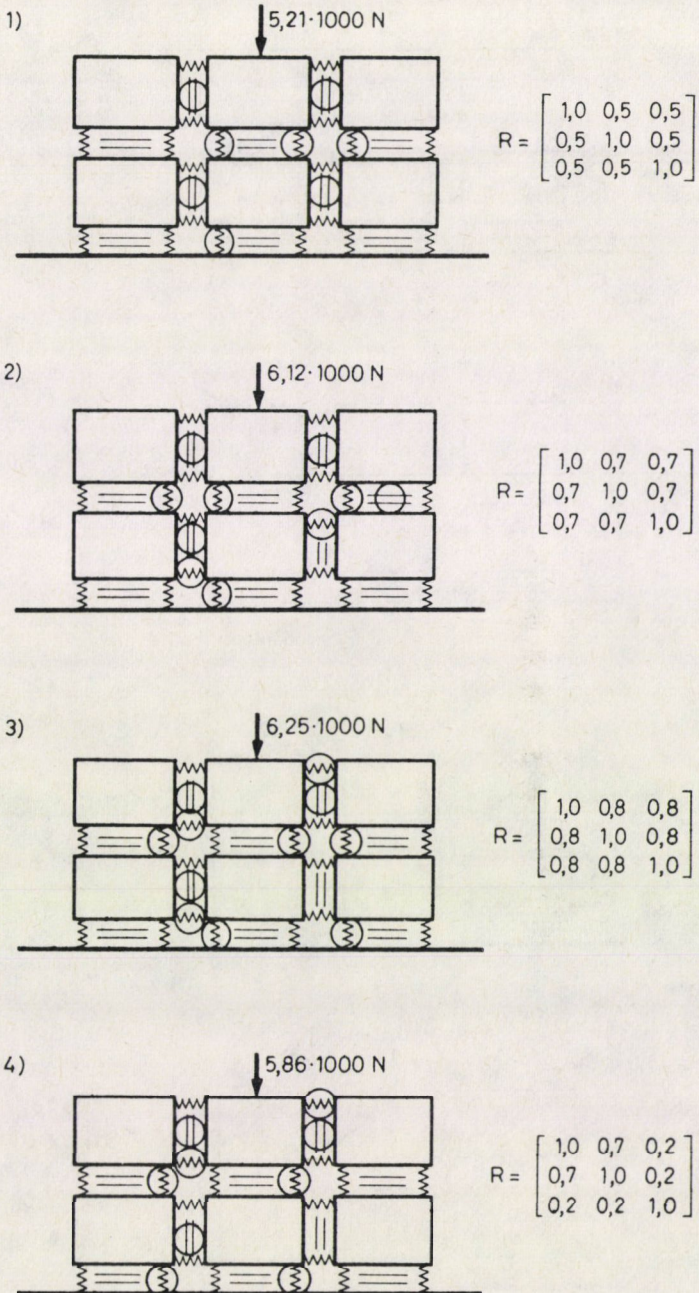
5.2 Panelszerkezetek optimális tervezése

A bemutatott eljárással a következő feladatot oldottuk meg determinisztikus és sztohasztikus esetben (5. ábra).

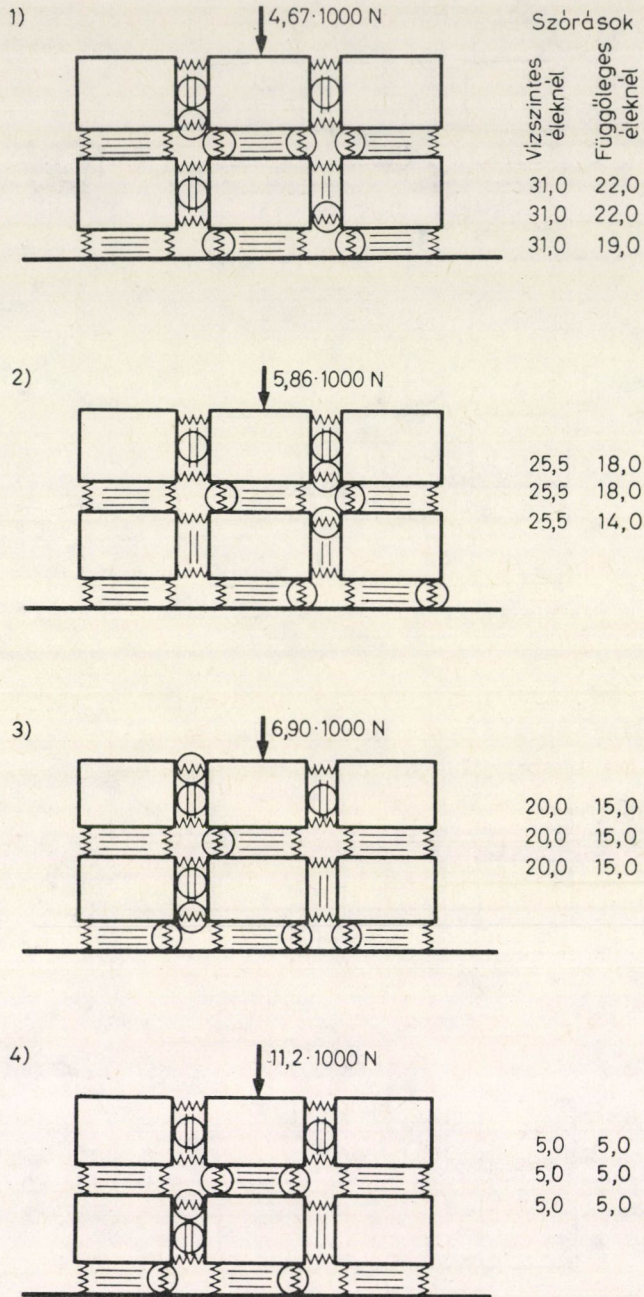
Sztohasztikus esetben a folyási határok szórásértéke a vízszintes élek mentén 25,5, függőleges élek mentén 18,0 volt minden egyes rugónál. Az egy él mentén levő rugók folyási határai közötti korrelációs mátrixot a következőképp vettük fel:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,7 & 1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 1 \end{bmatrix}$$

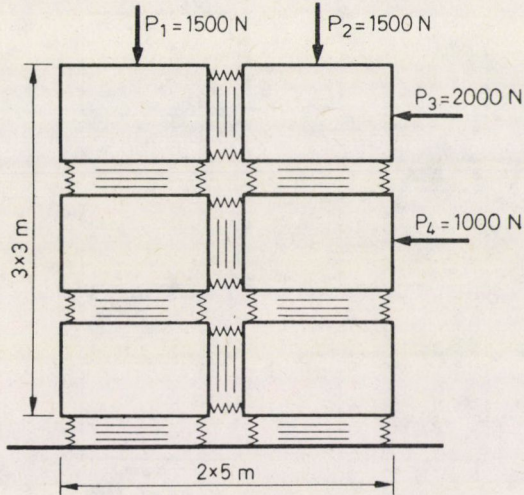
Mind determinisztikus, mind sztohasztikus feladat esetén a súlyozó faktort (I) egységnyinek vettük.



3. ábra



4. ábra

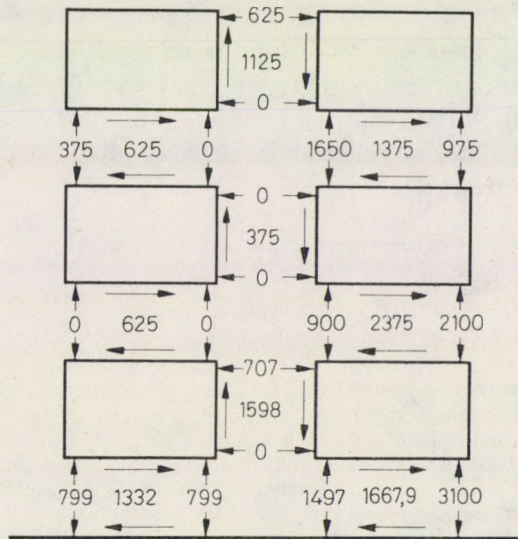


5. ábra

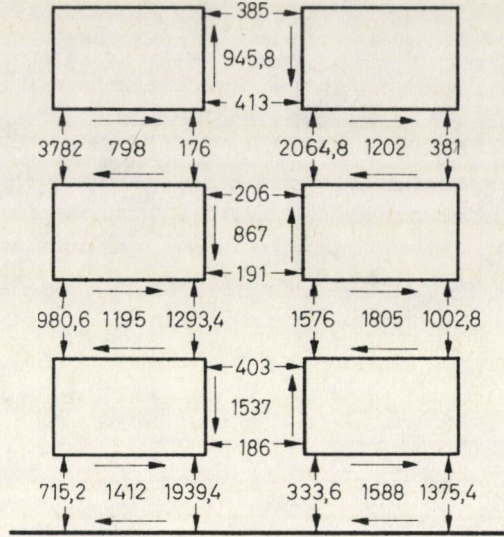
Determinisztikus feladat megoldása (6. ábra).

A célfüggvény értéke — vagyis a folyási határok értékeinek összege — 2462,62.

Sztohasztikus feladat esetén (7. ábra) a folyási határok értékeinek összege 2535,28. Az eredmények azt mutatják, hogy különböző rugók folyási határértékei között a különbség lényegesen alacsonyabb sztohasztikus esetben (187,88), mint



6. ábra



7. ábra

determinisztikus esetben (310,07), vagyis a szerkezet egyenletesebben „kívánja” az anyagot. Igaz ugyan, hogy a Σk érték valamivel magasabb volt sztohasztikus esetben, mint determinisztikus esetben, de a gyakorlatban olyan szerkezetet nem lehet építeni, ahol a folyási határ értéke nulla, így legalább egy él mentén — de általában nagyobb egységekre bontva a szerkezetet — azonos minőségű anyagot szoktak használni. Ekkor azonban a sztohasztikus feladat megoldása kedvezőbb, mert a legmagasabb folyási határérték itt 206,48, míg determinisztikus esetben 310,07.

A feladatok megoldásához a módosított Lagrange-módszert használtuk fel [3]. A háromdimenziós normális eloszlásfüggvény függvényértékét a Hilton-féle transzformáció segítségével állítottuk elő [4], gradiensét Szántai módszerével határoztuk meg [5]. Az egyes feladatok megoldásához szükséges gépidő-igény erősen függött a korreláció- és szórásértékektől is.

Jelölések

A jelek a latin, majd a görög abc alfabetikus sorrendjében a következők:

a	panel x irányú mérete
b	panel y irányú mérete
$D(\xi)$	ξ szórásnégyzete
$E(\xi)$	ξ várható értéke
$f_j^{k_{ai}}(v), f_j^{k_{fi}}(v)$	i -edik csomópont k_{ai} alsó, illetve k_{fi} felső folyási határának sűrűségfüggvénye (j =dimenziószám)
$F_j^{k_{ai}}(v), F_j^{k_{fi}}(v)$	i -edik csomópont k_{ai} alsó, illetve k_{fi} felső folyási határának eloszlásfüggvénye (j =dimenziószám)

$g(\tau, k)$	folyási függvény
G	geometriai mátrix
i, j	indexek
k_{ai}, k_{fi}	i -edik csomópont alsó, illetve felső folyási határa
l_i	lineáris kombinációban az i -edik együttható
m	belső erők száma
n	csomópont-szám vagy belső panelélek száma
N	képlékenységi mátrix
p_i	i -edik előírt valószínűségi érték
P	valószínűség
q	tehervektor
r	panelek száma
R	korrelációs mátrix
s	belső erők vektora
x, y	koordináta-rendszer
α	teherparaméter
ξ_i, η_i	valószínűségi változók
τ	nyírófeszültség
τ^f	tiszta nyírás esetén a folyási határ értéke
τ_{ai}^f, τ_{fi}^f	i -edik alsó, illetve felső folyási határ értéke
τ_{\max}	maximális nyírófeszültség
Φ	standard normális eloszlás-függvény
$\dot{\cdot}$	idő szerinti derivált
x	transzponálás

IRODALOM

1. PRÉKOPA A.: Sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról. Matematikai doktori értekezés, Budapest, 1970.
2. KALISZKY S.—WOLF K.: Analysis of Panel Buildings by the Use of Rigid Panel Models. Periodica Polyt. Vol. 23, No 2, Budapest, 1979. (89—100).
3. HIMMELBLAU, D.: Applied Nonlinear Programming McGraw-Hill, 1972.
4. MILTON, R. C.: Computer Evaluation of the Multivariate Normal Integral. Technometrics, Vol. 14, No 4, 1972. (881—888).
5. SZÁNTAI T.: Egy eljárás a többdimenziós normális eloszlásfüggvény és gradiense értékek meghatározására. Alk. Mat. Lapok, Budapest, 1976/2 (27—39).

Collapse load analysis and optimal design of discretised structures by stochastic programming. —

In the case of plastic collapse load analysis and optimal design the effects of uncertainties of material quality can be taken into consideration if the yield conditions are random variables. The stochastic programming models of the above problems can be solved on the base of statistical theorems introducing the stochastic yield condition. Numerical results are presented for panel structures.

Plastische Grenzstand-Untersuchung und optimale Planung diskreter modelierbarer Tragwerke

Untersuchung und optimaler Planung beachtet werden indem man die Fließgrenze als Wahrscheinlichkeitsveränderlichen betrachtet. Mit der Einführung stochastischer plastischer Bedingungen können die stochastischen Programmierungsmodelle dargestellt werden. Numerische Ergebnisse werden mit Panelkonstruktionsberechnungen vorgezeigt.

Анализ и оптимальное проектирование конструкций в пластичном состоянии с помощью дискретной модели и стохастического программирования. — Счита́я пределы текучести вероятностными перемспными, можем учесть влияние изменения качества материала при анализе предельного состояния и при оптимальном проектировании. Записав вероятностное условие пластичности, на основании статических теорем можно записать модель стохастического программирования. Численные результаты демонстрируются на примере расчета панельных копстрыкций.

A KATASZTRÓFAELMÉLET ALKALMAZÁSA RUGALMAS SZERKEZETEK TÖKÉLETLENSÉG-ÉRZÉKENYSÉGÉNEK VIZSGÁLATÁNÁL*

Az elliptikus és a hiperbolikus köldök katasztrófa kanonikus alakja esetén az elágazási halmaz egyenletei ismertek. A szerkezet teljes potenciális energiájának függvénye e kanonikus alakra transzformálható az ilyen típusú katasztrófa pontok környezetében. E transzformációk felhasználásával algoritmust adunk a tökéletlen szerkezetek kritikus terhének számítására. A katasztrófaelmélet eredményeit felhasználva megadjuk a kritikus tökéletlenségi tartományokat. E tartományokat azok a tökéletlenségek alkotják, melyeknél a kritikus teher paramétere egy előírt értéknel kisebb. Ha a tökéletlenségek sűrűségfüggvénye ismert, akkor a kritikus tökéletlenségi tartományok segítségével ki lehet a stabilitásvesztés valószínűségét is számolni.

Bevezetés

KOITER (1945) kidolgozta a rugalmas kontinuumok általános stabilitáselméletét, majd ezt THOMPSON és HUNT (1973) kiterjesztette diszkrét rendszerekre is. Mindkét elmélet a szerkezet teljes potenciális energiafüggvényét használja fel ahhoz, hogy meghatározza az adott teherhez tartozó egyensúlyi helyzetet, az egyparaméteresnek tekintett teher kritikus értékét, az egyensúlyi utak számát és elhelyezkedését a kritikus pont környezetében, valamint a tökéletlenség-érzékenységi összefüggéseket. Ez utóbbiak mutatják meg, hogy egy tökéletlen (a tervezettől eltérő) szerkezet kritikus terhe mennyire tér el a tervezett szerkezet kritikus terhétől, melyek a legveszélyesebb tökéletlenségek.

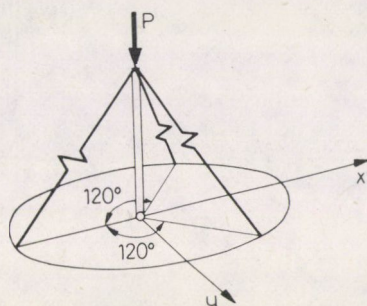
Az elemi katasztrófaelmélet (THOM 1972, ZEEMAN 1977, POSTON és STEWART 1978) is gradiens potenciálisfüggvények szingularitásaival foglalkozik. A szingularitásokat osztályozza, megadja az univerzális szétnyitásokat (az ehhez szükséges paraméterek számát, helyét) és az elágazási halmazokat (azokat a paraméterértékeket, melyeknél a függvénynek szingularitása van).

A rugalmas stabilitás elméletének és a katasztrófaelméletnek a kapcsolatát THOMPSON és HUNT (1975) mutatta ki. Azóta számos cikk foglalkozott e közös területtel. E cikk célja, hogy egy rövid áttekintést adjak saját, e témakörben kifejtett tevékenységemről.

* Dr. Gáspár Zsolt munkája.

Modellek

Az egyes stabilitásvesztési típusok szemléltetésére, vizsgálatára nagyon hasznosak az egyszerű modellek. THOMPSON és HUNT (1973) így mutatja be a határpontot és a nemszimmetrikus elágazási pontot (rác katasztrófákat), a stabil és instabil szimmetrikus elágazási pontot (a csúcs és a duális csúcs katasztrófát), sőt, az Augusti-moddal még a kettős csúcs katasztrófa egy típusát is. Az ellenhajlású elágazási pontra (elliptikus köldök katasztrófa) egy három rugóval megtámasztott merev rúd nyújt modellt (1. ábra), az egyhajlású elágazási pontra (hiperbolikus köldök katasztrófa) egy



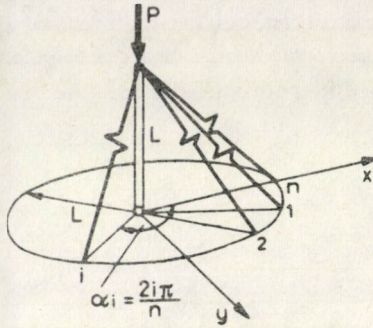
1. ábra

merevített lemez (THOMPSON és HUNT 1975). Újabb típusok bemutatására az egy rúdból és három rugóból álló szerkezetet általánosítottuk, mégpedig két irányban.

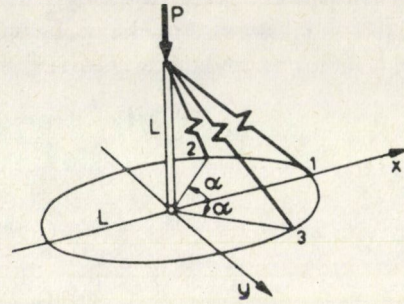
Az első esetben (GÁSPÁR 1977) megtartottuk a rugók szimmetrikus elhelyezkedését, de a rugók számát (n) növeltük (2. ábra). $n=3$ az eredeti esetet adja, $n=4$ az Augusti-moddal megfelelő csúcs katasztrófát. $n > 4$ esetén a kettős csúcs katasztrófa egy elfajuló esete (POSTON és STEWART 1976, 136. oldal, $(x^2 + y^2)^2$ típusú esete) jön létre, és a triviális egyensúlyi utat mindig n másodlagos egyensúlyi út metszi. Ezzel kimutattuk, hogy kettős csúcs katasztrófa esetén tetszőleges számú másodlagos egyensúlyi út létrehozható. Megjegyezzük, hogy SAMUELS és STEVENS (1982) később bebizonyította, hogy a kettős csúcs katasztrófánál ezen elfajuló eset kivételével a másodlagos egyensúlyi utak száma mindig 2 vagy 4.

A szerkezet második általánosításánál (THOMPSON és GÁSPÁR 1977) három rugó maradt, de az elhelyezkedésüket folyamatosan változtattuk (3. ábra). Ekkor a kettős kritikus pont biztosításához a rugók merevségét is változtatni kellett. Az α paraméter folyamatos változása során rendre a következő szingularitások jönnek létre: egyenhajlású (a három másodlagos egyensúlyi út a szimmetriasíkra vetítve egy irányban hajlik), háromszoros út (a három út egyesül, legalábbis az elágazásnál közös az érintőjük), egyhajlású (csak egy másodlagos egyensúlyi út marad), szimbolikus köldök (az eddig meglévő másodlagos egyensúlyi úttól távol megjelenik egy kétszeres út, illetve az elágazásnál közös érintővel rendelkező két út), ellenhajlású (a három

másodlagos egyensúlyi út a szimmetriasíkra vetítve különböző irányban hajlik), parabolikus köldök (az elágazásnál az egyik út érintője vízszintes) és végül újra egyenhajlású elágazási pont. Megmutattuk, hogy az egy szimmetriasíkkal rendelkező rendszereket jellemző pontok hogyan helyezkednek el a (transzformált) paramétertérben Zeeman köldökszerű karperecéhez (ZEEMAN 1977) viszonyítva.



2. ábra



3. ábra

Megjegyezzük, hogy ezeket a vizsgálatokat SAMUELS (1979) nemszimmetrikus szerkezetekre is általánosította. Modellünket is még két irányban általánosították. HUNT, REAY és YOSHIMURA (1979) a rugók merevségét változtatva a majdnem egybeeső kritikus pontok esetét vizsgálta, SAMUELS (1980) pedig a rugók elhelyezkedésében még meglévő szimmetriát is megszünteti.

Tökéletlenség-érzékenységi felületek

Egyszeres kritikus pontnál az egyetlen „fő tökéletlenség” függvényében felírható a kritikus teher változása, és adott szerkezetnél a tökéletlenség-érzékenységi görbe könnyen felrajzolható (THOMPSON és HUNT 1975). Kétszeres kritikus pontnál a tökéletlenség-érzékenység még a legegyszerűbb esetekben is (elliptikus és hiperbolikus köldök) csak bonyolult felületekkel ábrázolható (THOMPSON és HUNT 1975, HUNT 1977). Új szerkezetnél új felületet kell rajzolni, analizálni. A katasztrófaelmélet bebizonyította, hogy az azonos típusú katasztrófák elágazási halmazai diffeomorfak. Ezért javasoltuk (GÁSPÁR 1983a) — amit THOMPSON, TAN és LIM (1978) ábrái is sugallnak —, hogy az elliptikus és hiperbolikus köldök katasztrófák esetén csak egy-egy kanonikus alakra rajzoljuk fel az elágazási halmazt (ezek egyenletét POSTON és STEWART (1978) megadja), és az egyes szerkezeteknél a koordináta-rendszert transzformáljuk. Itt és a továbbiakban is elhagyjuk az elágazási halmazok azon részeit, melyek két oldalán a minimumpontok száma megegyezik, hiszen a teherparamétert

változtatva ezen felületeken való áthaladáskor a stabil egyensúlyi helyzet nem változik meg.

Bebizonyosodott, hogy a tökéletlenségek tengelye egyenes marad és a teherparaméter tengelye mindig egy rögzített síkban fekvő parabola. A szerkezet változtatásánál a parabola egyetlen paramétere változik. GÁSPÁR (1983a) megadja az egyes alosztályokhoz tartozó paramétertartományokat és algoritmust ad az adott tökéletlenségekhez tartozó kritikus teher számítására.

Kritikus tökéletlenségi tartomány

Határozzuk meg azokat a tökéletlenségeket, melyek hatására a kritikus teher egy előírt értéknél kisebb. Az e tökéletlenségek által alkotott tartományt nevezzük kritikus tökéletlenségi tartománynak. E tartományok határvonalai nem mindig az elágazási halmazok szintvonalai, hiszen a tökéletlenség-érzékenységi felület többértékű függvény is lehet. Azt tapasztaltuk, hogy a gyakorlatban legfontosabb eseteknél elegendő csupán egy kritikus tökéletlenségi tartomány meghatározása, és a teherparaméter függvényében megadható egy jól meghatározott, szemléletes változási szabály (GÁSPÁR 1983b).

Első lépésként a potenciális energiafüggvényből az irodalomnak megfelelően a passzív változókat kell kiküszöbölni. Az aktív rész vizsgált esetei a következők.

A ránc katasztrófánál a határpont

$$V = c_1 x^3 + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 x - \lambda(c_2 x^2 + c_3 x)$$

és a nemszimmetrikus elágazási pont

$$V = c_1 x^3 + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 x - \lambda(c_2 x^2 + \varepsilon_3 x).$$

A

$$V = c_1 x^4 + \varepsilon_1 x^3 + \varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_3 x - \lambda(c_2 x^2 + \varepsilon_4 x)$$

alakú csúcs katasztrófánál három esetet vizsgálunk (az instabil szimmetrikus elágazást és a stabil szimmetrikus elágazást az elsődleges vagy másodlagos egyensúlyi útból kiindulva).

Az elliptikus és hiperbolikus köldök katasztrófáknál a potenciális energiafüggvény általános alakja:

$$V = c_1 y^3 + c_2 x^2 y - \lambda(c_3 x^2 + c_4 y^2) + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y.$$

A fenti képletekben x , y az aktív koordináták, λ a teherparaméter, ε_i -k a tökéletlenségek, c_j -k a konstansok, a tökéletes szerkezeteknél $\lambda = 0$, $\varepsilon_i = 0$ és $c_j \neq 0$.

A következő lépés a fenti függvények kanonikus alakra való transzformálása, az ehhez szükséges képleteket, valamint a kanonikus alakokhoz tartozó kritikus tökéletlenségi tartományok egyenleteit és a változási szabályokat GÁSPÁR (1983b) megadja.

Példaként bemutatjuk az elliptikus köldök katasztrófa esetét. Az elágazási halmaz szintvonala mindig egy háromszögű hipociklois, melynek paraméteres (Θ) alakja

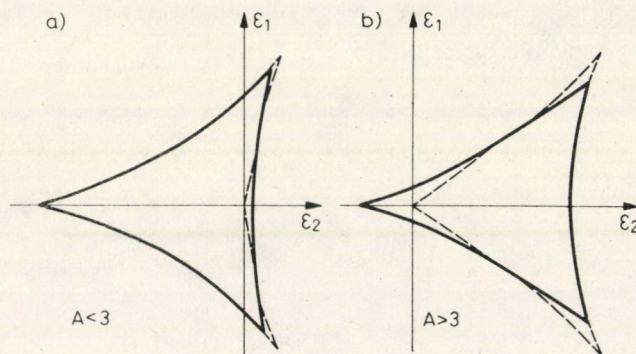
$$\varepsilon_1 = B(A/3)^{1/2} (\sin 2\Theta - 2 \cos \Theta)\lambda^2$$

$$\varepsilon_2 = (C + B(\cos 2\Theta - 2 \sin \Theta))\lambda^2,$$

ahol

$$A = -\frac{c_2 c_4}{c_1 c_3}, \quad B = \frac{(A+3)^2}{12A^2}, \quad C = \frac{(A-3)(A+1)}{4A^2}.$$

Minden pontnak az origótól mért távolsága λ négyzetével arányosan változik, így általában a háromszögű hipocikloisok metszik egymást. Minden tökéletlenségnél a legkisebb kritikus teher a mértékadó, ezért a háromszögű hipocikloisoknak két csúcsát a 4. ábra szerint az origóból induló érintőkkel le kell vágni. A kritikus tökéletlenségi tartomány a határvonalon kívül fekvő terület, tehát $\lambda \leq 0$ esetén az egész tökéletlenségi sík.

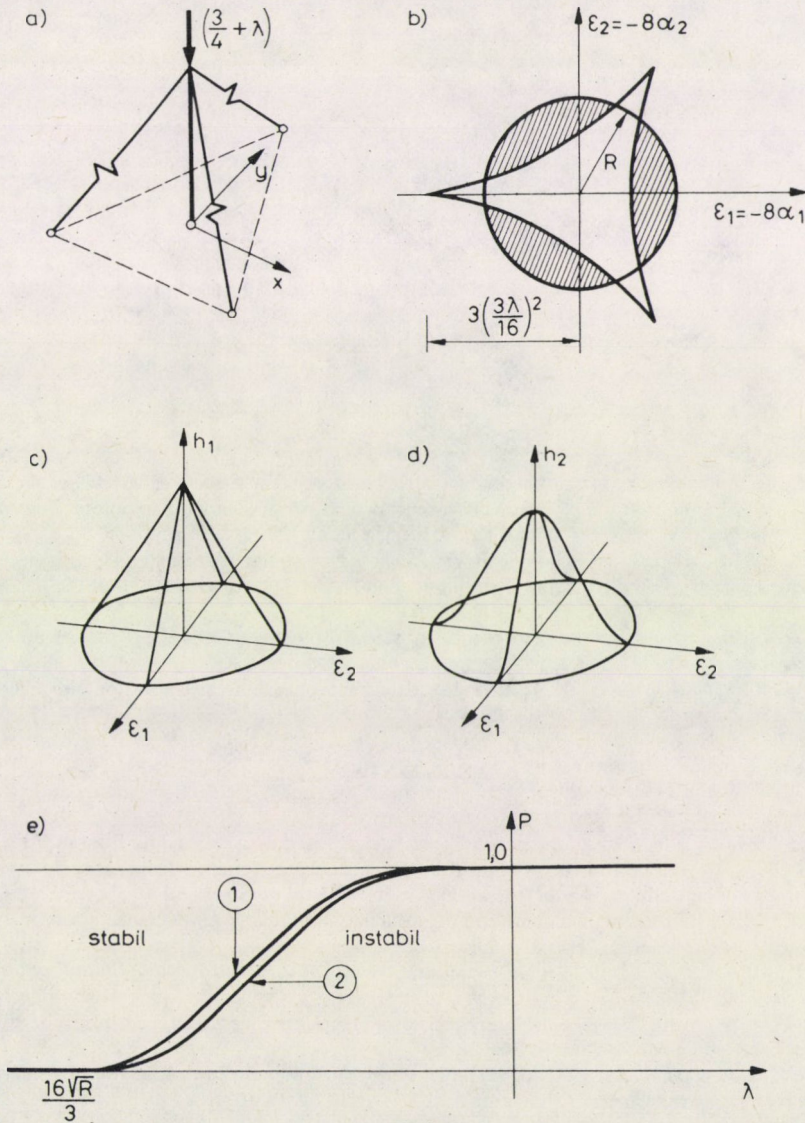


4. ábra

A stabilitásvesztés valószínűsége

A tervezett és a valóságos szerkezet eltérése adott határok közé kell, hogy essék, különben a szerkezetet nem megfelelőnek (selejtnek) tekintjük. Ezek a korlátozott tökéletlenségek a tökéletlenségi paraméterek síkjában egy területtel adhatók meg (megengedett tökéletlenségi tartomány). A szerkezet biztos elbír stabilitásvesztés nélkül egy adott terhet, ha e teherhez tartozó kritikus tökéletlenségi tartománynak és a megengedett tökéletlenségi tartománynak nincs közös pontja. Ha közös területük is van és ismerjük a tökéletlenségek valószínűségi sűrűségfüggvényét, akkor a stabilitásvesztés valószínűségét a sűrűségfüggvénynek a közös területen vett határozott integrálja adja. Ezeket az értékeket néhány teherparaméter esetén kiszámolva a valószínűségfüggvény felrajzolható (GÁSPÁR 1983c).

Példa. A vizsgált modell egy egységnyi hosszú merev rúdból és három körülötte szimmetrikusan elhelyezkedő, 45° hajlásszögű, egységnyi merevségű rugóból áll, amit egy függőleges erő terhel (5/a. ábra). A szerkezet bármely helyzete egyértelműen megadható a rúd tetejének koordinátaival (x, y). A tökéletes szerkezeteknél terheletlen esetben a rúd függőleges, tökéletlen szerkezetnél $x = \alpha_1, y = \alpha_2$. A rugókat terheletlen állapotban mindig feszültségmentesnek tételezzük fel.



5. ábra

E szerkezet speciális esete a (GÁSPÁR 1977) által vizsgált szerkezetnek. Annak alapján az energiafüggvény:

$$V = \frac{3}{32} \left(y^3 - 3x^2y - \frac{16}{3} \lambda(x^2 + y^2) - 8\alpha_1x - 8\alpha_2y \right).$$

Ennek az $\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda = 0$ pontban elliptikus köldök katasztrófa pontja van.

Az 5/b. ábra mutatja a megengedett és a kritikus tökéletlenségi tartományt, közös részük vonalkázott. Két sűrűségfüggvényt vizsgáltunk (5/c, d ábra):

$$h_1 = \frac{3(R - \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2})}{R^3\pi}$$

$$h_2 = \frac{10}{3\pi} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{3(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}{R^4} + \frac{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^3}{R^5} \right).$$

Mindkét esetre az 5/e. ábra mutatja a teherparaméter függvényében a stabilitásvesztés valószínűségét.

IRODALOM

- GÁSPÁR, Zs., 1977: Buckling models for higher catastrophes. *Journal of Structural Mechanics*, **5**, 357—68.
- GÁSPÁR, Zs., 1983a: Computation of imperfection-sensitivity at two-fold branching points. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **63**, megjelenés alatt.
- GÁSPÁR, Zs., 1983b: Critical imperfection territories. *Journal of Structural Mechanics*, **11**, megjelenés alatt.
- GÁSPÁR, Zs., 1983c: Probability of the instability of imperfect structures. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **63**, megjelenés alatt.
- HUNT, G. W., 1977: Imperfection-sensitivity of semi-symmetric branching. *Proceedings of the Royal Society of London*, Ser. A. 357, 193—211.
- HUNT, G. W., REAY, N. A., YOSHIMURA, T., 1979: Local diffeomorphisms in the bifurcational manifestations of the umbilic catastrophes. *Proceedings of the Royal Society of London*, Ser. A. 369, 47—65.
- KOITER, W. T., 1945: *On the stability of elastic equilibrium*. Dissertation, Delft, Holland: (English translation: NASA Technical Translations F10, 1—833, 1967).
- POSTON, T., STEWART, I. N., 1976: Taylor expansions and catastrophes. *Research Notes in Mathematics* **7**, London: Pitman Publishing.
- POSTON, T., STEWART, I. N., 1978: *Catastrophe Theory and its Applications*. London: Pitman Publishing.
- SAMUELS, P., 1979: The relationship between postbuckling behavior at coincident branching points and the geometry of an umbilic point of the energy surface. *Journal of Structural Mechanics*, **7**, 297—324.
- SAMUELS, P., 1980: Bifurcation and limit point instability of dual eigenvalue third order systems. *International Journal of Solids Structures*, **16**, 743—56.
- SAMUELS, P., STEVENS J., 1982: Instability of dual eigenvalue fourth order systems. *Journal of Structural Mechanics*, **10**, 209—225.
- THOM, R., 1975: *Structural Stability and Morphogenesis*. (Translated from the French edition by D. H. Fowler) Reading Massachusetts: Benjamin.
- THOMPSON, J. M. T., GÁSPÁR, Zs., 1977: A buckling model for the set of umbilic catastrophes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **82**, 497—507.

- THOMPSON, J. M. T., HUNT, G. W., 1973: *A General Theory of Elastic Stability*. London: Wiley.
- THOMPSON, J. M. T., HUNT, G. W., 1975: Towards a unified bifurcation theory. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 26, 581—604.
- THOMPSON, J. M. T., TAN, J. K. Y., LIM, K. C., 1978: On the topological classification of postbuckling phenomena. *Journal of Structural Mechanics*, 6, 383—414.
- ZEEMAN, E. C., (1977): *Catastrophe Theory: selected papers (1972—1977)*. Reading Massachusetts: Addison-Wesley.

Imperfection-sensitivity of elastic structures using the catastrophe theory. —The equations of the bifurcation sets at the canonical forms of the elliptic and hyperbolic umbilic catastrophes are known. The total potential energy function can be transformed into these forms in the neighbourhoods of these types of catastrophes. Using these transformations algorithms are given to compute the critical loads of imperfect systems.

Using the results of the catastrophe theory critical imperfection territories can be given. These territories include imperfections resulting in a smaller parameter of the critical load than a prescribed value.

If the density functions of the imperfections are known, then the probability of the instability can be computed by the help of the critical imperfection territory, as well.

Die Anwendung der Katastrophentheorie bei der Imperfektion-Sensibilität der elastischen Tragwerke.

—Im Falle der kanonischen Form von elliptischen und hyperbolischen Umbilikkatastrophen sind die Gleichungen der Verzweigungsmengen wohl bekannt. In der Umgebung von solcher Katastrophenpunkten kann die Funktion der gesamten potentiellen Energie auf diese kanonische Gestalt transformiert werden. Mittels Verwendung dieser Transformationen liefern wir ein Algorithm für die Berechnung der kritischen Last von Tragwerken mit Imperfektionen.

Wenden wir die Resultaten der Katastrophentheorie an, so beschreiben wir die Bereiche der kritischen Imperfektionen. Diese Bereiche werden durch diejenigen Imperfektionen gestaltet, bei welchen der kritische Lastparameter kleiner als ein vorgegebener Wert ist. Ist die Dichtefunktion der Imperfektionen bekannt, so kann man auch die Wahrscheinlichkeit des Stabilitätsverlustes mit Hilfe der kritischen Imperfektionsbereichen berechnen.