FELSŐ KORLÁT A VÁLTOZÓ KERESZTMETSZETŰ RÚD DINAMIKUS HÚZÁSI MEREVSÉGÉRE

ECSEDI ISTVÁN*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. szeptember 19-én]

E tanulmány tárgya lineárisan rugalmas, izotrop anyagú, változó keresztmetszetű rúd. A változó keresztmetszetű inhomogén anyagú rúd dinamikus húzási merevségére vonatkozó egyenlőtlenségi reláció bizonyítása döntően a Schwarz-egyenlőtlenség és a Rayleigh- hányados minimum tulajdonságának a felhasználásával történik.

Fontosabb jelölések

x, y, z	derékszögű koordináták,
$\varrho = \varrho(z)$	sűrűség,
$E = E(z)$	Young modulus,
t	idő,
ω	terhelés körfrekvenciája,
l	a rúd hossza,
$A = A(z)$	a rúd keresztmetszetének területe,
$\overline{w} = \overline{w}(z, t)$	tengely irányú elmozdulás,
$w = w(z)$	tengely irányú elmozdulási amplitúdó,
R	a rúd dinamikus húzási merevsége,
$H = 1/R$	a rúd dinamikus húzási „hajlékonysága”,
α_1	a longitudinális rezgő mozgást végző rúd *legkisebb* saját körfrekvenciája,
$b = b(z), f = f(z)$	segéd függvények.

Az egyéb mennyiségeket, változókat a szöveg értelmezi.

1. Bevezetés

Az 1. ábra változó keresztmetszetű rudat szemléltet. A rúd keresztmetszeteinek síkjai az xy síkkal párhuzamosak, a rúd tengelye pedig a z tengely.

A rúd végső $z = l$ koordinátával kijelölt keresztmetszetét az időben harmonikusan változó $\overline{F} = F\cos\omega t$ erő terheli.

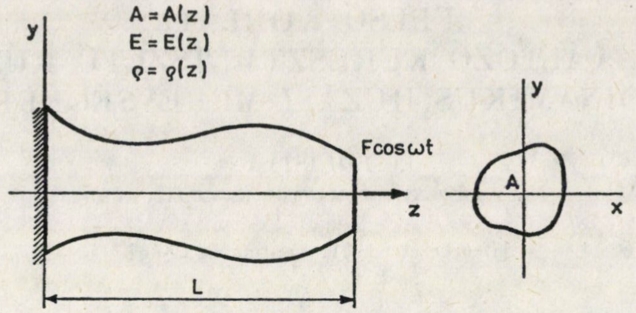
A rúd keresztmetszetek elmozdulását leíró $\overline{w} = \overline{w}(z, t)$ kétváltozós függvényt a következő peremérték feladattal hozhatjuk kapcsolatba ([1], [2]):

$$\varrho A \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(A E \frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right) \qquad \begin{matrix} 0 < z < l, \\ 0 < t < \infty, \end{matrix} \tag{1.1}$$

$$\overline{w}(0, t) = 0 \qquad 0 < t < \infty, \tag{1.2}$$

$$\left[AE\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right]_{z=l} = F\cos\omega t, \ 0 < t < \infty. \tag{1.3}$$

* Dr. Ecsedi István, 3531 Miskolc, Vászonfehérítő út 24 IV/1



1. ábra. Harmonikus gerjesztő erővel terhelt rúd

Az indítási feltételek,

$$\bar{w}(z, 0) \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}\right)_{t=0}$$

alkalmas megválasztásával elérhető, hogy az (1.1), (1.2), (1.3) egyenletek által kijelölt peremérték feladat megoldása

$$\bar{w}(z, t) = w(z) \cos \omega t \tag{1.4}$$

alakú legyen.

A terhelés ω körfrekvenciájával kapcsolatban egyelőre csak azt tételezzük fel, hogy nem egyezik meg az 1. ábrán vázolt rúd szabad rezgéséhez tartozó egyetlen α_i $(i = 1, 2, \ldots)$ saját körfrekvenciával sem.

Az (1.4) alakú megoldás az $\bar{F}$ harmonikus gerjesztőerőhöz tartozó „állandósult'' állapotnak megfelelő mozgást írja le.

A $w = w(z)$ $(o \leq z \leq l)$ elmozdulási-amplitúdóra az (1.4) alakú megoldásnak az (1.1), (1.2), (1.3) egyenletekbe való helyettesítésével a következő peremérték feladatot vezethetjük le:

$$\frac{d}{dz}\left(AE\frac{dw}{dz}\right) + \varrho\omega^2 Aw = 0\,, \quad 0 < z < l\,, \tag{1.5}$$

$$w(0) = 0\,, \tag{1.6}$$

$$\left[AE\frac{dw}{dz}\right]_{z=l} = F\,. \tag{1.7}$$

Tekintsük a

$$b(z) = \frac{w(z)}{F} \quad (0 \leq z \leq l) \tag{1.8}$$

előírással értelmezett egyváltozós függvényt.

Ez a függvény a

$$\frac{d}{dz}\left(AE\frac{db}{dz}\right) + \varrho\omega^2 Ab = 0\,, \quad 0 < z < l\,, \tag{1.9}$$

$$b(0) = 0\,, \tag{1.10}$$

$$\left(AE\frac{db}{dz}\right)_{z=l} = 1 \tag{1.11}$$

kerületérték feladat megoldásával határozható meg. Az (1.8) képletből kiolvasható, hogy

$$F = \frac{1}{b(l)}w(l)\,, \tag{1.12}$$

vagyis az F erő-amplitúdó és $w(l)$ elmozdulás-amplitúdó egymással arányos. Az (1.13)

$$R = \frac{1}{b(l)} = \frac{F}{w(l)} \tag{1.13}$$

előírással értelmezett mennyiségeket *a változó keresztmetszetű rúd dinamikus húzási merevségének* nevezzük.

A dinamikus húzási „hajlékonyságot" pedig a

$$H = \frac{1}{R} \tag{1.14}$$

képlettel értelmezzük.

Az (1.14) képlet alapján belátható, hogy az R mennyiség a rúd anyagának, hosszának, alakjának és az ω körfrekvenciának a függvénye, továbbá, hogy R pontos (szigorú) értékének meghatározásához az (1.9), (1.10), (1.11) egyenletek által kijelölt kerületérték feladatot kell megoldanunk. Azonban az (1.9) változó együtthatójú másodrendű közönséges differenciálegyenlet zárt alakú megoldását igen gyakran nem ismerjük, emiatt nagy jelentősége van olyan egyenlőtlenségi relációknak, amelyek R becslését segítik elő.

E tanulmány elsődleges célja olyan egyenlőtlenségi reláció levezetése, melynek alkalmazásával R számára, az (1.9), (1.10), (1.11) egyenletek által kijelölt peremérték feladat megoldásának ismerete nélkül is *felső* korlátot tudunk képezni.

A következőkben a $H = b(l)$ mennyiség számítására alkalmas újabb képletet vezetünk le. Az (1.9) egyenlet alapján azt írhatjuk, hogy

$$b\frac{d}{dz}\left(AE\frac{db}{dz}\right) + \omega^2\varrho Ab^2 = \frac{d}{dz}\left(AEb\frac{db}{dz}\right) - AE\left(\frac{db}{dz}\right)^2 + \omega^2\varrho Ab^2 = 0. \tag{1.15}$$

Az (1.15) egyenletből integrálással az

$$\int_0^l AE\left(\frac{db}{dz}\right)^2 dz - \omega^2\int_0^l \varrho\, Ab^2 = dz = \left\{AE\, b\,\frac{db}{dz}\right\}_{z=0}^{z=l} \tag{1.16}$$

egyenletet kapjuk. A fenti egyenlet és (1.14), (1.13) képletek, valamint az (1.10), (1.11) peremfeltételek kombinálásával levezethetjük a

$$H = \int_0^l AE\left(\frac{db}{dz}\right)^2 dz - \omega^2\int_0^l \varrho\, Ab^2\, dz \tag{1.17}$$

képletet.

A Rayleigh-hányados minimum tulajdonságának a felhasználásával kimutatjuk, hogy H pozitív, ha

$$\omega^2 < \alpha_1^2 .$$

A Rayleigh-hányados minimum tulajdonságából kifolyólag az

$$\alpha_1^2 \leq \frac{\int_0^l AE\left(\frac{dg}{db}\right)^2 dz}{\int_0^l A\varrho\, g^2\, dz} \tag{1.18}$$

egyenlőtlenség fennáll, bármely a $0 \leq z \leq l$ zárt intervallumban folytonos, a $0 < z < l$ nyitott intervallumban szakaszonként folytonosan differenciálható a $g(0) = 0$ homogén peremfeltételt kielégítő nem azonosan zérus egyváltozós függvényre. Az (1.18) egyenlőtlenségi relációban az egyenlőség jele csak akkor érvényes, ha $g = g(z)$ a rúd *legkisebb* α_1 saját körfrekvenciához tartozó saját függvényét jelöli.

Az (1.18) egyenlőtlenségi reláció közvetlen következménye az (1.19) egyenlőtlenség:

$$\int_0^l AE\left(\frac{dg}{dz}\right)^2 dz - \omega^2\int_0^l A\varrho\, g^2\, dz > 0\,, \tag{1.19}$$

hiszen

$$\omega^2 < \alpha_1^2 .$$

Legyen $g = b(z)$. Ekkor az 1.19) alapján a

$$H = \int_0^l AE\left(\frac{db}{dz}\right)^2 dz - \omega^2\int_0^l A\varrho b^2\, dz > 0\,, \tag{1.20}$$

összefüggést írhatjuk, ui.

$$\left(AE\frac{db}{dz}\right)_{z=l} \neq 0. \tag{1.21}$$

2. Felső korlát

Tétel: Legyen $\omega^2 < \alpha_1^2$. Legyen továbbá $f = f(z)$ a $0 \leq z \leq l$ zárt intervallumban folytonos, a $0 < z < l$ nyílt intervallumban pedig szakaszonként folytonosan differenciálható, az

$$f(0) = 0 \tag{2.1}$$

$$f(l) \neq 0 \tag{2.2}$$

feltételeket kielégítő egyváltozós függvény. Ebben az esetben azt állítjuk, hogy fennáll az

$$R \leq \frac{\int_0^l AE\left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l \varrho A f^2\, dz}{[f(l)]^2} \tag{2.3}$$

egyenlőtlenségi reláció.

Bizonyítás: Mivel

$$\int_0^l AE\left(\frac{dg}{dz}\right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l \varrho A g^2\, dz > 0\,, \tag{2.4}$$

a Schwarz-féle egyenlőtlenség alapján azt írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^l AE\left(\frac{db}{dz}\right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l \varrho\, A b^2\, dz\right) \cdot \\ &\left(\int_0^l AE\left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l \varrho\, A f^2\, dz\right) \geqslant \\ \geqslant &\left\{\int_0^l AE\frac{db}{dz}\,\frac{df}{dz}\, dz - \omega^2 \int_0^l \varrho\, A b f\, dz\right\}^2 . \end{aligned} \tag{2.5}$$

A (2.5) alatti Schwarz-féle egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő integrált az alábbi módon átalakítjuk:

$$\begin{aligned} &\left\{\int_0^l AE\frac{db}{dz}\,\frac{df}{dz}\, dz - \omega^2 \int_0^l \varrho\, A b f\, dz\right\}^2 = \\ = &\left\{\left[fAE\frac{db}{dz}\right]_{z=0}^{z=l} - \int_0^l \left[\frac{d}{dz}\left(AE\frac{db}{dz}\right) + \omega^2 \varrho\, A b\right] f dz\right\}^2 = [f(l)]^2 . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Az

$$R = \frac{1}{\int_0^l AE\left(\frac{db}{dz}\right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l A\varrho b^2\, dz} \tag{2.7}$$

képlet, a (2.6) és a (2.5) kombinálásával közvetlenül a bizonyítandó (2.3) egyenlőtlenségi relációt nyerjük.

3. Megjegyzések a dinamikus húzási merevséggel kapcsolatban

3.1. Rögzítve a rúd anyagát, alakját, hosszát, a merevség csak a terhelés ω körfrekvenciájának függvénye lesz, vagyis

$$R = R(\omega^2)\,. \tag{3.1}$$

Az $R = R(\omega^2)$ függvény az alábbi tételben rögzített monotonitási tulajdonságú.

Tétel: Legyen

$$\omega_1^2 < \omega_2^2 < \alpha_1^2\,. \tag{3.2}$$

Ebben az esetben azt állítjuk, hogy fennáll az

$$R(\omega_1^2) \geq R(\omega_2^2) \tag{3.3}$$

egyenlőtlenségi reláció.

Bizonyítás: Jelölje az (1.9), (1.10), (1.11) egyenletek által kijelölt kerületérték feladat megoldását

$$b_i = b_i(z), \quad \text{ha} \quad \omega = \omega_i\,.$$

A (2.3) egyenlőtlenségi reláció alapján azt írhatjuk, hogy

$$R(\omega_2^2) \leq \frac{\int_0^l AE\left(\frac{db_1}{dz}\right)^2 dz - \omega_2^2 \int_0^l A\varrho b_1^2\, dz}{[b_1(l)]^2}\,. \tag{3.4}$$

A (3.4) egyenlőtlenségi reláció jobb oldalán szereplő kifejezést átalakítjuk:

$$\frac{\int_0^l AE\left(\frac{db}{dz}\right)^2 dz - \omega_2^2 \int_0^l \varrho Ab_1^2\, dz}{[b_1(l)]^2} = \frac{\int_0^l AE\left(\frac{db_1}{dz}\right)^2 dz - \omega_1^2 \int_0^l \varrho Ab_1^2\, dx}{[b_1(l)]^2} -$$

$$- (\omega_2^2 - \omega_1^2)\,\frac{\int_0^l \varrho Ab_1^2\, dz}{[b_1(l]^2}\,. \tag{3.5}$$

A (3.5) egyenletből kiolvasható, hogy

$$\frac{\int_0^l AE\left(\frac{db_1}{dz}\right)^2 dz = \omega_2^2 \int_0^l \varrho Ab_1^2\, dz}{[b_1(l)]^2} \leq$$

$$\leq \frac{\int_0^l AE\left(\frac{db_1}{dz}\right)^2 dz - \omega_1^2 \int_0^l \varrho Ab_1^2\, dz}{[b_1(l)]^2} = R(\omega_1^2)\,,\ (\omega_1^2 < \omega_2^2)\,. \tag{3.6}$$

A (3.4) és a (3.6) egyenlőtlenségek kombinálásával a bizonyítandó (3.3) egyenlőtlenségi relációt nyerjük.

3.2. Az $\omega^2 = 0$ helyettesítéssel a *statikus* S húzási merevségre jutunk:

$$S = R(0)\,. \tag{3.7}$$

Legyen $\omega^2 < \alpha_1^2$. Ebben az esetben az előbbiekben bizonyított (3.3) egyenlőtlenségi reláció alapján azt írhatjuk, hogy

$$R(\omega^2) < S\,. \tag{3.8}$$

4. Néhány példa felső korlát képzésére

4.1. Az (1.9), (1.10), (1.11) peremérték feladat megoldása az $\omega^2 = 0$ esetben a

$$b(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{A(\zeta)\,E(\zeta)} \tag{4.1}$$

függvény.

Elemi számítással az adódik, hogy

$$S = R(o) = \frac{1}{b(l)} = \frac{1}{\displaystyle\int_0^l \frac{d\tau}{A(\zeta)\,E(\zeta)}}. \tag{4.2}$$

A (3.8) egyenlőtlenségi reláció és a (4.2) képlet kombinálásával azt írhatjuk, hogy

$$R(\omega^2) \le \frac{1}{\displaystyle\int_0^l \frac{d\zeta}{A(\zeta)\,E(\zeta)}}\,,\quad (\omega^2 < \alpha^2)\,, \tag{4.3}$$

4.2. Igen egyszerű szerkezetű felső korlátot kapunk az R mennyiség számára a (2.3) egyenlőtlenségi relációból a

$$f(z) = z \tag{4.4}$$

alakú függvénnyel számolva:

$$R(\omega^2) \le \frac{1}{l^2}\left(\int_0^l AE\,dz - \omega^2 \int_0^l \varrho\, Az^2\, dz\right). \tag{4.5}$$

IRODALOM

1. TONG, KIN. N.: Teorija mehanicseszkih kolebanij. Goszudarsztvennoe naucsno-tehnicseszkoe izdatelszva masinosztroitelnoj literaturi. Moszkva 1963, 219 o.
2. BABAKOV, I. M.: Teorija kolebanij. Izdatelszvo nauka. Glavnaja redakcija. Fiziko-matematicseszkoj literaturi. Moszkva 1968, 233—2530.

An Upper Bound for the Dynamic Tensile Stiffness of a Bar of Variable Cross Section. — A bar of linearly elastic and of isotropic material with a variable cross section is treated. The verification of the inequality relation representing the dynamic tensile stiffness of a bar having a variable cross section and being of inhomogeneous material takes definitely place with the aid of the Schwartz-inequality and by making use of the minimum propriety of the Rayleigh ratio.

Eine obere Grenze für die dynamische Dehnsteife eines Stabes von veränderlichem Querschnitt. — Die Abhandlung bezieht sich auf einen linearelastischen Stab von isotropischem Material und veränderlichem Querschnitt. Die auf die Dehnsteifé des Stabes von veränderlichem Querschnitt und inhomogenem Material wird auf eine entscheidende Weise durch die Benutzung der Schwartzschen Ungleichheit und der Minimumeigenschaft der Rayleighschen Quotient nachgewiesen.