

# NÉHÁNY SÍKRUGALMASSÁGTANI ÉRINTKEZÉSI FELADAT MEGOLDÁSA KVADRATIKUS PROGRAMOZÁS SEGÍTSÉGÉVEL

PÁCZELT ISTVÁN\*

NÁDORI FRIGYES\*\*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

és

ECSEDI ISTVÁN\*\*\*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. június 4-én]

Jelen tanulmányban annak feltételezésével, hogy a testek közötti súrlódás elhanyagolható, az alakváltozások pedig kicsinyek, keressük a testek között kialakuló érintkezési nyomást, az érintkezési tartományt, továbbá a merevtestszerű elmozdulással rendelkező test eltolódásának mértékét a terhelő erő függvényében. A vizsgált rugalmas rendszerek alkotó elemei — általánosított síkfeszültségi állapot feltételezésekor — kör, körgyűrű alakú, köralakú furattal gyengített végtelen kiterjedésű tábla (sík), vagy — síkalakváltozáskor — a fenti geometriák által meghatározott keresztmetszetű hengeres test, illetve köralakú furattal gyengített rugalmas tér. A dolgozat a kvadratikus programozási feladat felállításánál jelentkező hatásfüggvények felépítésére a síkrugalmasságtanban használatos Airy-féle feszültségfüggvényt felhasználva módszert javasol, kitérve a számításoknál fellépő problémákra is. Végezetül az elvégzett számítások az érintkezési feladatok megoldásának fent vázolt útját illusztrálják.

## Bevezetés

A gépészmérnöki gyakorlatban számos esetben találkozunk olyan rugalmasnak tekinthető szerkezetekkel, amelyeknek alkotó elemei egymással érintkeznek. Jelen dolgozat olyan érintkezési feladatokkal foglalkozik, melyeknél síkbeli viszonyok tételezhetők fel. Konkrétan vizsgálat tárgya a kör és körgyűrű keresztmetszetű hengeres test érintkezése, valamint ezen testek és a furattal gyengített végtelen tér érintkezése. Az érintkező testek vagy síkalakváltozási (SA), vagy általánosított síkfeszültségi (ÁSF) állapotban vannak. A vizsgálat során feltételezzük, hogy a testek közötti súrlódás elhanyagolható, az alakváltozások és elmozdulások kicsinyek.

Jelen tanulmányban keressük a testek között kialakuló  $p$  érintkezési nyomást, az  $\Omega_0$  érintkezési tartományt, továbbá a merevtestszerű elmozdulással is rendelkező test  $\delta = \delta(F)$  eltolódás-terhelés függvény kapcsolatát.

Mint ismeretes, ha az érintkezési tartomány a testek méretéhez képest nem hanyagolható el, akkor Hertz elmélete már nem alkalmazható.

Az ilyen jellegű érintkezési feladatot először STAERMAN I. Ja. oldotta meg [1]. A [2] alatti tanulmány a gyűrűalakú test és köralakú tárcsa, illetve

\* Dr. Páczelt István,  
\*\* Nándori Frigyes,  
\*\*\* Dr. Ecsedi István,

} Nehézipari Műszaki Egyetem, H-3515 Miskolc, Egyetemváros

furattal gyengített sík érintkezési feladatát azzal a feltételezéssel oldja meg, hogy gyűrűnél a radiális irányú elmozdulás két részből tevődik össze, egyrészt a STAERMAN által a teli táblára levezetett „helyi” deformációból, másrészt a gyűrűnek — mint görbevonalú tartónak — hajlítási deformációjából.

Jelen dolgozatban az elmozdulásokat síkrugalmasságtani megoldásokból nyerjük, ami a kitűzött érintkezési feladat pontosabb megoldását szolgáltatja.

Hengeres héj és rugalmas tér együttdolgozásának kérdéseivel a [3]-as tanulmány foglalkozik.

### 1. Érintkezési feladattal kapcsolatos matematikai programozási feladat megfogalmazása

Annak feltételezésével, hogy az  $R_1$  és az  $R_2$  sugarak (1. ábra) alig különböznek egymástól, az érintkezési feladat a következőképpen fogalmazható meg [1]:

Érintkezés lép fel mindazon pontokban,<sup>1</sup> ahol

$$y \equiv u^{(2)} - u^{(1)} - \delta \cos \varphi + (R_2 - R_1)(1 - \cos \varphi) = 0, \quad p \geq 0 \quad (1)$$

és rés van a testek között, ha

$$y > 0, \quad p = 0. \quad (2)$$

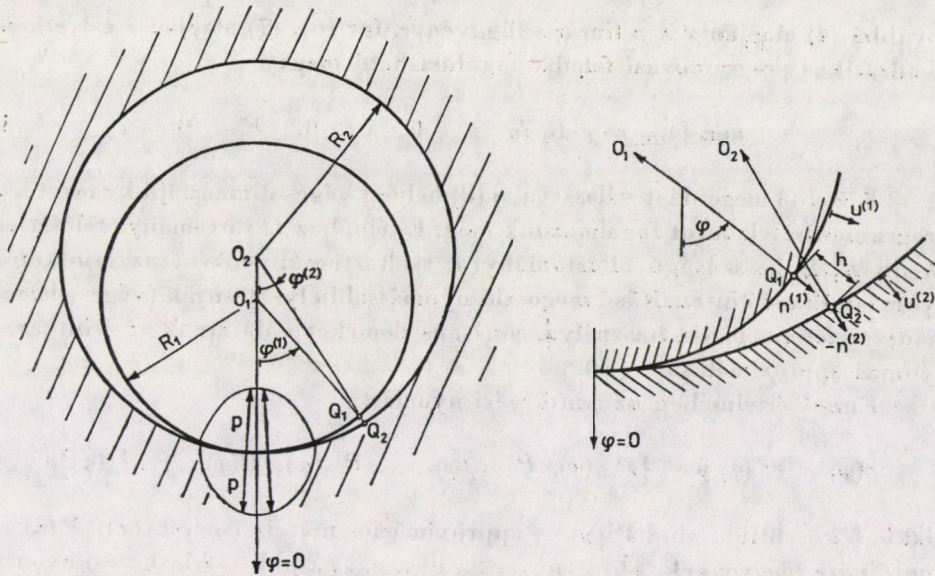
Itt  $u^{(1)} = u^{(1)}(R_1, \varphi)$ ,  $u^{(2)} = u^{(2)}(R_2, \varphi)$  — radiális irányú elmozdulások,  $\delta$  — az 1-es jelű test merevtestszerű eltolódása a  $\varphi = 0$  sugár irányában,  $(R_2 - R_1) \cdot (1 - \cos \varphi)$  — a kezdeti hézag értéke.

A feladat megoldása céljából fejezzük ki az elmozdulásokat a  $p = p(\varphi)$  érintkezési nyomáson keresztül. A  $H^{(1)}(\varphi, \psi)$  és a  $H^{(2)}(\varphi, \psi)$  Green-függvények bevezetésével ( $n^{(1)}(\psi)$ ,  $-n^{(2)}(\psi)$  normális irányú egységnyi terheléshez tartozó radiális irányú elmozdulás az  $R_1$ , illetve  $R_2$  sugarú kör  $\varphi$  helyén) a radiális irányú elmozdulás

$$u^{(b)}(R_b, \varphi) = \int_{(\Omega)} H^{(b)}(\varphi, \psi) p(\psi) R_b d\psi, \quad b = 1, 2, \quad (3)$$

ahol  $\Omega$  — a szóba jöhető érintkezési tartomány.

<sup>1</sup> Az érintkezésválás (rés) feltételét a testek perempontokbeli elmozdulásainak normális irányú vetületeivel fejezzük ki, azaz csak a radiális irányú elmozdulásokat vesszük figyelembe. Az  $R_1$  és  $R_2$  sugarak kicsiny különbségéből adódóan nem teszünk különbséget a  $\varphi^{(1)}$ ,  $\varphi^{(2)}$  szögek között; ezeket  $\varphi$ -vel jelöljük.



1. ábra. Normál érintkezési feladat megfogalmazása

A (3) figyelembevételével az érintkezést—elválást kifejező integrálegyenlet-egyenlőtlenség az alábbi<sup>2</sup>

$$y = \int_{(\Omega)} (H^{(1)}(\varphi, \psi) + H^{(2)}(\varphi, \psi)) p(\psi) R_1 d\psi - \delta \cos \varphi + \\ + (R_2 - R_1)(1 - \cos \varphi) \begin{cases} \geq 0, & p(\varphi) = 0, & \varphi \in \Omega_0, \\ = 0, & p(\varphi) \geq 0, & \varphi \in \Omega_p, \end{cases} \quad (4a, b)$$

ahol  $\Omega_0$ ,  $\Omega_p$  a rés-, illetve az érintkezési tartományokat jelöli,  $\Omega = \Omega_0 + \Omega_p$ .

A (4a, b)-ből követően

$$p \cdot y = 0, \quad \varphi \in \Omega, \quad (5)$$

azaz az érintkezési nyomásnak az  $y$  relatív elmozduláson végzett munkája az  $\Omega$  tartomány minden pontjában zérus. A feladat megoldása során az  $I$ -es jelű testre felírt

$$\tilde{F} = \int_{(\Omega)} p(\varphi) \cos \varphi V R_1 d\varphi - F = 0 \quad (6)$$

egyensúlyi egyenletet is ki kell elégíteni, ahol  $F$  — az  $I$ -es testre ható külső erőrendszer  $\varphi = 0$  sugár irányú eredője;  $V$  — a vizsgált test (tábla) vastagsága.

Mivel az (5) értelmében

$$\int_{(\Omega)} p \cdot y \cdot R_1 d\varphi = 0, \quad p \geq 0, \quad y \geq 0, \quad (7)$$

<sup>2</sup> Az  $R_b$  a  $b = 1,2$  sugarak közeli azonossága miatt

$$R_1 d\varphi \cong R_2 d\psi.$$

továbbá (4) alapján  $y$  a  $p$  lineáris függvénye, így (6), (7) alapján a következő kvadratikus programozási feladat fogalmazható meg:

$$\min \left\{ \int_{(\Omega)} p \cdot y \cdot R_1 d\varphi \mid p \geq 0, y \geq 0, \vec{F} = 0 \right\}. \quad (8)$$

Közelítő megoldást választva, a (8) helyett véges dimenziójú kvadratikus programozási feladatot fogalmazunk meg. E célból az  $\Omega$  tartományt felosztjuk  $2k$  db  $R_1 \Delta\varphi$  hosszúságú altartományra,  $s$  altartományonként az érintkezési nyomást állandó intenzitású megoszló nyomással helyettesítjük (véges elemek módszer terminológiát használva, constans elemeket választunk az érintkezési nyomás approximálására [4]).

Ennek értelmében az érintkezési nyomást

$$p(\varphi) = \mathbf{P}^T(\varphi) \vec{p} = [P_{-k}(\varphi), P_{-k+1}(\varphi), \dots, P_{-1}(\varphi), P_1(\varphi), \dots, P_k(\varphi)] \vec{p} \quad (9)$$

alakban közelítjük, ahol  $\mathbf{P}^T(\varphi)$  — approximációs mátrix (sorvektor),  $P_i(\varphi)$  — koordináta függvények,  $\vec{p}^T = [p_{-k}, \dots, p_{-1}, p_1, \dots, p_k]$  — érintkezési nyomások vektora.

Jelen esetben a  $\varphi = 0$  egyenesre vonatkozó szimmetriából adódóan

$i > 0$  esetében

$$\begin{aligned} P_i(\varphi) &= 0, & \text{ha } 0 \leq \varphi < 2\beta(i-1), \\ P_i(\varphi) &= 1, & \text{ha } 2\beta(i-1) \leq \varphi \leq 2\beta i, \\ P_i(\varphi) &= 0, & \text{ha } 2\beta i < \varphi \leq k \cdot 2\beta = \Phi, \end{aligned} \quad (10a)$$

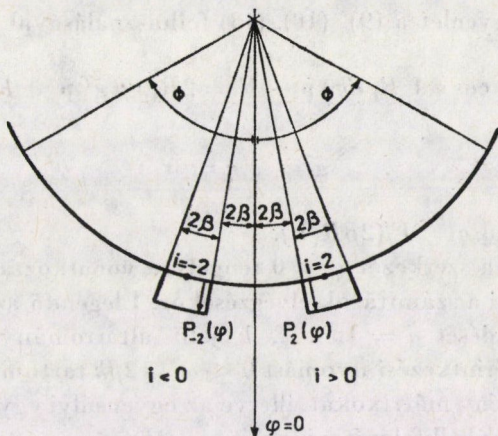
míg  $i < 0$ -nál

$$\begin{aligned} P_i(\varphi) &= 0, & \text{ha } 2\beta(i+1) < \varphi \leq 0, \\ P_i(\varphi) &= 1, & \text{ha } 2\beta i \leq \varphi \leq 2\beta(i+1), \\ P_i(\varphi) &= 0, & \text{ha } -2\beta k \leq \varphi < 2\beta i, \\ k &> 0, \end{aligned} \quad (10b)$$

ahol  $\Phi$  — az érintkezés tekintetében szóba jöhető  $\Omega$  vizsgált tartomány szélső határához tartozó szög értéke,  $2\beta \equiv \Delta\varphi$  (2. ábra).

Ekkor a (7) helyett

$$\begin{aligned} \min \int_{(\Omega)} p \cdot y \cdot R_1 d\varphi &\approx \vec{p}^T \int_{(\Omega)} \mathbf{P}(\varphi) [\int_{(\Omega)} (H^{(1)}(\varphi, \psi) + \\ &+ H^{(2)}(\varphi, \psi)) \mathbf{P}^T(\psi) R_1 d\psi \vec{p} - \delta \cos \varphi + \\ &+ (R_2 - R_1) (1 - \cos \varphi)] R_1 d\varphi = \\ &= \vec{p}^T [(\tilde{\mathbf{H}}^{(1)} + \tilde{\mathbf{H}}^{(2)}) \vec{p} - \delta \vec{g} + \vec{h}] R_1 2\beta = \vec{p}^T \vec{y} R_1 2\beta = 0 \end{aligned} \quad (11)$$



2. ábra. Altartományok kijelölése, a  $P_{-2}(\varphi)$ ,  $P_2(\varphi)$  koordinátafüggvény

írható, ahol

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{ij}^{(b)} &= \frac{1}{R_1 2\beta} \mathbf{e}_i^T \int_{(\Omega)} \mathbf{P}(\varphi) \int_{(\Omega)} H^{(b)}(\varphi, \psi) \mathbf{P}^T(\psi) R_1^2 d\psi d\varphi \mathbf{e}_j = \\ &= \frac{1}{2\beta} \int_{(\Omega)} P_i(\varphi) \left( \int_{(\Omega)} H^{(b)}(\varphi, \psi) P_j(\psi) R_1 d\psi \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\beta} \int_{(\Omega)} P_i(\varphi) u_j^{(b)}(\varphi) d\varphi \approx u_j^{(b)}(\varphi_i) . \end{aligned} \tag{12}$$

ha

$$\left. \begin{aligned} i > 0 & \quad 2\beta(i-1) \leq \varphi_i \leq 2\beta i \\ i < 0 & \quad 2\beta i \leq \varphi_i \leq 2\beta(i+1) \end{aligned} \right\} i, j = -k, \dots, k,$$

a  $\tilde{\mathbf{H}}^{(b)}$  hatásfüggvény mátrix  $ij$  eleme.  $u_j^{(b)}(\varphi)$  — a  $j$ -k szakasz felett ható egységnyi intenzitású radiális terhelésből származó radiális irányú elmozdulást jelenti,  $\mathbf{e}_i$  — olyan vektort, melynek  $i$ -ik eleme egységnyi, a többi zérus. A számítógépre történő programozás egyszerűsítése céljából célszerű a  $\varphi_i$  szögek értékét a választott  $i$ -ik altartomány középső pontja által kijelölni, vagyis

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \text{sign}(i) \beta + (i - \text{sign}(i)) 2\beta \\ i &= -k, -k + 1, \dots, -1, 1, \dots, k. \end{aligned}$$

A  $\tilde{\mathbf{g}}, \tilde{\mathbf{h}}$  vektor  $i$ -ik eleme az integrálszámítás középérték tétele értelmében

$$\tilde{g}_i = \frac{1}{2\beta R_1} \int_{(\Omega)} P_i(\varphi) \cos \varphi R_1 d\varphi \approx \cos \varphi_i, \tag{13}$$

$$\tilde{h}_i = \frac{1}{2\beta R_1} \int_{(\Omega)} P_i(\varphi) (R_2 - R_1) (1 - \cos \varphi) R_1 d\varphi = (R_2 - R_1) (1 - \cos \varphi_i) \tag{14}$$

$$i = -k, -k + 1, \dots, -1, 1, \dots, k.$$

A (6) egyensúlyi egyenlet a (9), (10), (13) felhasználásával

$$\left( \int_{(\omega)} \mathbf{p}^T(\varphi) \cos \varphi V R_1 d\varphi \right) \bar{\mathbf{p}} - F = 2R_1 V \beta \bar{\mathbf{g}}^T \bar{\mathbf{p}} - F = 0, \quad (15)$$

illetve

$$\bar{\mathbf{g}}^T \bar{\mathbf{p}} - \bar{q} = 0 \quad (16)$$

alakban írható, ahol  $\bar{q} = F/(2\beta R_1 V)$ .

A terhelés és a szerkezet  $\varphi = 0$  tengelyre vonatkoztatott szimmetriáját érdemes kihasználni a számítások elvégzésekor. Elegendő az érintkezés/elválás feltételének teljesedését  $i = 1, \dots, k$  jelű altartományokban ellenőrizni. Ebből adódóan az érintkezési nyomást  $0 \leq \varphi \leq 2\beta k$  tartományban közelítjük.

A hatásfüggvény mátrixokat, illetve az egyensúlyi egyenletet szimmetria feltétel esetében úgy kell felépíteni, hogy a  $-2k\beta \leq \varphi \leq 0$  tartományon megszóló nyomás hatását is figyelembe vegyünk a  $0 \leq \varphi \leq k2\beta$  tartomány felett. Így egyrészt a hatásfüggvény mátrix elemei

$$H_{ij}^{(b)} = u_j^{(b)}(\varphi_i) + u_{-j}^{(b)}(\varphi_i) \quad (17)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, k; b = 1, 2$$

összefüggéssel számíthatók, másrészt a (16) egyensúlyi egyenlet helyett a

$$\mathbf{g}^T \mathbf{p} - q = 0 \quad (18)$$

egyenletet kapjuk, ahol  $q = F/4\beta R_1 V$ ,  $\mathbf{p}^T = [p_1, p_2, \dots, p_k]$  —  $k$  db altartomány felett kialakuló érintkezési nyomás vektora,  $\mathbf{g}^T = [\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \dots, \cos \varphi_k]$ , továbbá a  $\mathbf{h}$  vektor ( $k \times 1$ ) típusú elemei a (14) összefüggéssel  $i = 1, \dots, k$  értékeknél nyernek meghatározást.

A fentiek figyelembevételével a következő programozási feladat fogalmazható meg:

$$\min \{ \mathbf{p}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \equiv \mathbf{H} \mathbf{p} - \delta \mathbf{g} + \mathbf{h} \geq \mathbf{0}, \mathbf{g}^T \mathbf{p} - q = 0 \}, \quad (19)$$

vagy más formában a megoldandó algebrai egyenlet/egyenlőtlenség

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{g}^T \\ -\mathbf{g} & \mathbf{H} \end{bmatrix}}_{-\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} q \\ -\mathbf{h} \end{bmatrix}}_{-\mathbf{b}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} = \mathbf{0}, \quad (20)$$

$$\delta > 0, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p}^T \mathbf{y} = 0.$$

A  $\delta$  pozitív értékűsége az érintkezési feladat felállításából következik, ugyanis a merevtestszerű mozgást végző test a kialakuló alakváltozások hatására a  $\varphi = 0$  tengely irányába fog elmozdulni.

Mivel a  $-A$  mátrix pozitív szemidefinit [5], így a feladat megoldására alkalmazni lehet a Dantzig-féle algoritmust [6], Frank—Wolfe módszerét [7], vagy annak modifikált változatát [8].

Tehát a (20) alapján megfogalmazható kvadratikus programozási feladat<sup>3</sup>

$$\min \{ \mathbf{x}^T \mathbf{z} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax} \geq \mathbf{0} \}. \quad (21)$$


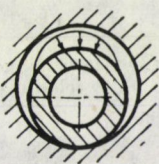
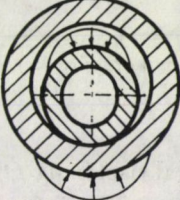


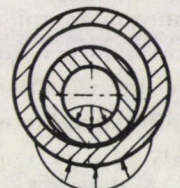
Bizonyítható, hogy (20) alatti egyenletek, egyenlőtlenségek az  $\int_{(\Omega)} phR_1 d\varphi$  integrállal módosított kiegészítő munkára vonatkozó extrémális elvből is lezármasztathatók [4].

## 2. A hatásfüggvény mátrix előállításának kérdései

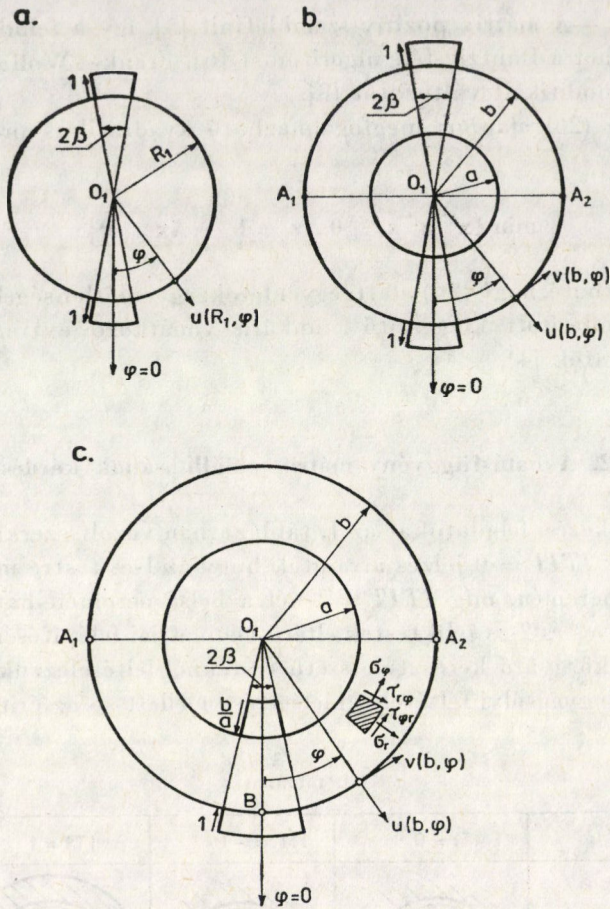
Az érintkezési feladatokat az 1. táblázatban vázolt szerkezetekre fogjuk megoldani. Az  $ITIT = 0$  jelzés arra utal, hogy az 1-es testre működő terhelés a test külső peremén, míg  $ITIT = 1$ -nél a belső peremén hat. Az  $ITI = 0, -1, 1$  jel az 1-es és 2-es jelű testek eltérő geometriai felépítésére utal.

A kör-, körgyűrű keresztmetszetű testeknél feltételezzük, hogy a külső terhelés — az egyensúlyi feltételek kielégítése mellett — az érintkezési feladat

1. táblázat

	$ITI = 0$	$ITI = -1$	$ITI = 1$
$ITIT = 0$			
$ITIT = 1$			

<sup>3</sup> Általános esetben, amikor a merevtestszerű elmozdulás eltolódásból és elfordulásból tevődik össze, az érintkezési feladat úgyszintén a (21)-el formailag megegyező kvadratikus programozási feladathoz vezethető [4].



3. ábra. Kör- és körgyűrű keresztmetszetű hengeres testek terhelése a hatásfüggvény mátrix felépítéséhez

megoldásával tisztázott  $\Omega_p$  érintkezési tartomány által meghatározott ívszakaszon oszlik meg. E miatt elégséges lesz az elmozdulásokat a 3. ábrán vázolt terheléseknél meghatározni, s a (17) alatti hatásmátrix együtthatóit egyszerű koordinátatranszformációval képezni.

A 3a. ábrán vázolt testnél a merevtestszerű eltolódás alatt  $O_1$  pontjának, míg 3b, c ábrákhoz tartozó testeknél az  $O_1$  ponton átmenő vízszintes sík és a külső kör ( $A_1, A_2$ ) metszéspontjainak függőleges irányú elmozdulását fogjuk érteni. Amennyiben a 3c. ábrán vázolt test merevtestszerű elmozdulást nem végez, úgy a  $\varphi = 0$  sugárnak a külső körrel kapott metszéspontját tekintjük állandónak ( $B$  pont).

A 3. ábrán vázolt terhelésekhez tartozó elmozdulásokat feszültségfüggvény meghatározásán keresztül fogjuk előállítani. Az  $r, \varphi, z$  polárkoordináta-



rendszerben értelmezett feszültségek az  $U = U(r, \varphi)$  feszültségfüggvényből a

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}; & \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (22a-c)$$

összefüggéssel számíthatók. Értelmezésüket a 3c ábra besraffozott részén tüntetjük fel. Sík alakváltozás (SA) esetében az A alakváltozási tenzor koordinátáit az

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{2G} (\sigma_r - \nu (\sigma_r + \sigma_\varphi)), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2G} (\sigma_\varphi - \nu (\sigma_r + \sigma_\varphi)), \\ \gamma_{r\varphi} &= \tau_{r\varphi}/G \end{aligned} \quad (23a-c)$$

egyenletekből képezzük, ahol  $G$  — a csúsztató rugalmassági tényező,  $\nu$  — a Poisson-féle szám.

A 3b, c ábrákon vázolt testek elmozdulásmezéjét a következőképpen határozhatjuk meg:

Mint ismeretes, az elmozdulásvektor növekménye [9]

$$d\vec{u} = \mathbf{A} \cdot d\vec{r} + \vec{\omega} \times d\vec{r}, \quad (24)$$

illetve

$$d\vec{a} = \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\vec{r}, \quad (25)$$

ahol

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u}, \quad \vec{u} = u \vec{e}_R + v \vec{e}_\varphi.$$

Figyelembe véve, hogy az alakváltozásnak a  $\varphi = 0$  tengelyre vonatkozó szimmetriája miatt

$$\left. \begin{aligned} v(r, \varphi = 0) &\equiv 0 \\ \vec{\omega}(r, \varphi = 0) &= \vec{0} \end{aligned} \right\} a \leq r \leq b,$$

így az  $r = R$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \varphi$  egyenletű peremgörbe mentén való integrálással azt kapjuk, hogy

$$\vec{\omega} = \omega(\varphi) \vec{k},$$

ahol

$$\omega(\varphi) = \int_{\vartheta=0}^{\varphi} \left[ \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r} \cdot r + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right] \Big|_{r=R} d\vartheta, \quad (26)$$

illetve a (24) alapján a radiális irányú elmozdulás

$$\begin{aligned}
 u(R, \varphi) = & u(R, 0) \cos \varphi - R \cos \varphi \int_{\vartheta=0}^{\varphi} \left[ \omega(\vartheta) - \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi} \right] \cos \vartheta + \\
 & + \varepsilon_{\varphi}(\vartheta) \sin \vartheta \Big|_{r=R} d\vartheta + R \sin \varphi \int_{\vartheta=0}^{\varphi} \left[ \omega(\vartheta) - \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi} \right] \sin \vartheta - \\
 & - \varepsilon_{\varphi}(\vartheta) \cos \vartheta \Big|_{r=R} d\vartheta = u(R, 0) \cos \varphi + \check{u}(R, \varphi), \quad (27)
 \end{aligned}$$

a tangenciális irányú elmozdulás pedig

$$\begin{aligned}
 v = v(R, \varphi) = & -u(R, 0) \sin \varphi - R \cos \varphi \int_{\vartheta=0}^{\varphi} \left[ \omega(\vartheta) - \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi} \right] \sin \vartheta - \\
 & - \varepsilon_{\varphi}(\vartheta) \cos \vartheta \Big|_{r=R} d\vartheta - R \sin \varphi \int_{\vartheta=0}^{\varphi} \left[ \omega(\vartheta) - \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi} \right] \cos \vartheta + \\
 & + \varepsilon_{\varphi}(\vartheta) \sin \vartheta \Big|_{r=R} d\vartheta = -u(R, 0) \sin \varphi + \check{v}(R, \varphi). \quad (28)
 \end{aligned}$$

Olyankor, amikor a 3c. ábrán vázolt test merevtestszerű mozgást végez,

$$u(R, 0) = \check{v}(R, \pi/2), \quad R = b, \quad (29)$$

mivel az  $R = b, \varphi = \pi/2$  pont függőleges elmozdulása zérus.

Rögzített esetben

$$u(b, 0) = v(b, 0) = 0, \quad (30a)$$

továbbá az  $r = a$  sugarú körön levő elmozdulások számításakor a  $\varphi = 0, a \leq r \leq b$  szakasz összenyomódása jelenti az  $u(a, 0)$  értéket. Így

$$u(a, 0) = \int_b^a \varepsilon_r(r, 0) dr. \quad (30b)$$

Köralakú testnél (3a. ábra) a radiális irányú elmozdulás egyszerűbb úton is meghatározható. Ugyanis ilyenkor a test peremének radiális elmozdulását az  $O_1$  középponthez képest az  $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\varrho, \varphi)$  radiális irányú fajlagos nyúlás  $\varphi$  sugármenti integrálásából képezhetjük:

$$u(\varphi) = R_1 \int_0^1 \varepsilon_r(\varrho, \varphi) d\varrho, \quad (31)$$

ahol  $\varrho = r/R_1, 0 \leq \varrho \leq 1$ .

Amennyiben a fenti összefüggésekben  $\nu$ -t  $\nu/(1 + \nu)$ -re módosítjuk, úgy az általánosított síkfeszültségi állapot (ÁSF) feltételezése melletti eredményeket nyerjük.

2.1 *A körkeresztmetszetű hengeres testen fellépő radiális irányú elmozdulások meghatározása, a hatásfüggvény mátrix felépítése*

A 3a. ábrán vázolt, a  $\varphi = 0$  és  $\varphi = \pi$  környezetében az  $R_1 2\beta$  ív mentén megoszló terhelést Fourier sorba fejtve azt kapjuk, hogy

$$p = \check{p}_0 + \sum_{n=2,4,6,\dots} \check{p}_n \cos n\varphi, \tag{32a}$$

ahol

$$\check{p}_0 = \frac{2\beta}{\pi}, \quad \check{p}_n = \frac{4}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n}. \tag{23b-c}$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a (32) figyelembevételével választott

$$U = c_0 r^2 + \sum_{n=2,4,6,\dots} (c_n r^n + d_n r^{n+2}) \cos n\varphi \tag{33}$$

feszültségfüggvényből a (22a—c) szerint származtatott feszültségek kielégítik az  $r = R_1$  peremen levő feltételeket

$$\sigma_r = \begin{cases} 0 & \beta < \varphi < \pi - \beta, \pi + \beta < \varphi < 2\pi - \beta \\ 1 \text{ N/mm}^2 & -\beta \leq \varphi \leq \beta, \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi + \beta \end{cases} \tag{34a}$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \tag{34b}$$

ha a (33) alatti sorbafejtés állandói

$$c_0 = \frac{\beta}{\pi}, \quad c_n = -\frac{2}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n(n-1)} R_1^{n+2}, \tag{35a-c}$$

$$d_n = \frac{2}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n(n+1)} R_1^{-n} \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

értékűek.

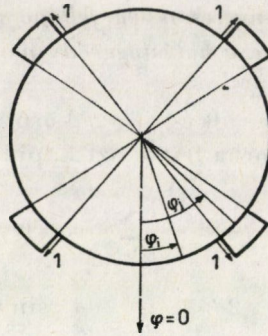
A kapott állandókat felhasználva, egyrészt a feszültségekre a

$$\sigma_r = \frac{2}{\pi} \left[ \beta + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{\sin n\beta}{n} \varrho^n (2 - n + n\varrho^{-2}) \cos n\varphi \right], \tag{36a-c}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2}{\pi} \left[ \beta + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{\sin n\beta}{n} \varrho^n (2 + n - n\varrho^{-2}) \cos n\varphi \right],$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots} \sin n\beta \varrho^n (1 - \varrho^{-2}) \sin n\varphi ;$$

( $\varrho = r/R_1$ )



4. ábra. Terhelések megoszlása körkeresztmetszetű hengeres testnél a hatásfüggvény mátrix  $H_{ij}^{(1)}$  elemének előállításához

másrészt (23a), (31) alapján a radiális irányú elmozdulásra az

$$u(R_1, \varphi) = \frac{2R_1}{\pi G} \left[ \beta \left( \frac{1}{2} - \nu \right) + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{\sin n\beta}{n} \frac{2n-1-2\nu(n-1)}{n^2-1} \cos n\varphi \right] \quad (37)$$

összefüggés vezethető le.

Az  $u$  értékeket a test peremén  $\varphi = 0, 2\beta, 4\beta, \dots, 2k\beta$  helyeken meghatározva, és az érintkezési feladatnál jelentkező szimmetria tulajdonságokat figyelembe véve, (17) alapján a hatásfüggvény mátrixának elemei az alábbi összefüggés segítségével számolhatók (lásd 4. ábra):

$$H_{ij}^{(1)} = u(R_1, \varphi_i - \varphi_j) - u(R_1, \varphi_i + \varphi_j) \quad (38)$$

$$i, j = 1, \dots, k; \varphi_i = \beta + (i-1)2\beta.$$

## 2.2 A külső peremén véges szakaszokon terhelt körgyűrű hatásfüggvény mátrixa

A 3b. ábrán vázolt  $z$  tengelyű hengeres test  $r = b$  sugarú körén az alábbi egyensúlyi erőrendszer hat:

$$\sigma_r = \begin{cases} 0, & \beta < \varphi < \pi - \beta, \quad \pi + \beta < \varphi < 2\pi - \beta, \\ 1 \text{ [N/mm}^2\text{]}, & -\beta \leq \varphi \leq \beta, \quad \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi + \beta, \end{cases} \quad (39a-b)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (39c)$$

Az  $r = a$  sugarú palást terheletlen, így

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (40a-b)$$

A feladat feszültségfüggvénye:

$$U = U(r, \varphi) = c_0 \ln r + d_0 r^2 + \sum_{n=2,4,\dots} (c_n r^n + d_n r^{n+2} + c'_n r^{-n} + d'_n r^{-n+2}) \cos n\varphi. \quad (41)$$

A  $\varphi = 0, \varphi = \pi$  környezetében megoszló állandó intenzitású terhelés Fourier-sora megegyezik a (32) alattival.

A feszültségekre a (22a—c) alapján az alábbi összefüggések vezethetők le.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{r\varphi} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_0(r) \mathbf{c}_0 + \sum_{n=2,4,\dots} \Lambda_n(\varphi) \mathbf{F}_n(r) \mathbf{c}_n, \quad (42a)$$

ahol

$$\mathbf{F}_0(r) = \begin{bmatrix} r^{-2} & 2 \\ -r^{-2} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_n(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos n\varphi & & \\ & \cos n\varphi & \\ & & \sin n\varphi \end{bmatrix} \quad (42b-c)$$

$$\mathbf{c}_0^T = [c_0 \ d_0], \quad \mathbf{c}_n^T = [c_n \ d_n \ c'_n \ d'_n] \quad (42e-f)$$

$$\mathbf{F}_n(r) = \begin{bmatrix} (n-n^2)r^{n-2} & (n+2-n^2)r^n & -(n+n^2)r^{-n+2} & (2-n-n^2)r^{-n} \\ -(n-n^2)r^{n-2} & (n^2+3n+2)r^n & (n+n^2)r^{-n+2} & (n^2-3n+2)r^{-n} \\ (n^2-n)r^{n-2} & (n^2+n)r^n & -(n+n^2)r^{-n+2} & (n-n^2)r^{-n} \end{bmatrix}, \quad (3 \times 4)$$

illetve tömörebb felírással (42g)

(42g)

$$\mathbf{F}_n(r) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{+,n}^{(1)} & \mathbf{F}_{-,n}^{(1)} \\ \mathbf{F}_{+,n}^{(2)} & \mathbf{F}_{-,n}^{(2)} \\ \mathbf{F}_{+,n}^{(3)} & \mathbf{F}_{-,n}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (42h)$$

(1×2) (1×2)

A  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_n$  ( $n = 2, 4, \dots$ ) ismeretlen állandók meghatározására a (39a—c), (40a—b) peremfeltételek, továbbá a (32) alatti sorbafejtés segítségével az alábbi algebrai lineáris egyenletrendszereket nyerjük:

$$\begin{bmatrix} a^{-2} & 2 \\ b^2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\beta/\pi \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_0 \mathbf{c}_0 = \check{\mathbf{f}}_0(\beta) \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{+,n}^{(1)}(b) & \mathbf{F}_{-,n}^{(1)}(b) \\ \mathbf{F}_{+,n}^{(3)}(b) & \mathbf{F}_{-,n}^{(3)}(b) \\ \mathbf{F}_{+,n}^{(1)}(a) & \mathbf{F}_{-,n}^{(1)}(a) \\ \mathbf{F}_{+,n}^{(3)}(a) & \mathbf{F}_{-,n}^{(3)}(a) \end{bmatrix} \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} \frac{4}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_n \mathbf{c}_n = \check{\mathbf{f}}_n(\beta) \quad (44)$$

Felhasználva a (42), (23a—c) kifejezéseket, továbbá a (43), (44) egyenletrendszerek megoldását, az  $r = R = b$  sugarú körön fellépő radiális és tangen-

ciális irányú elmozdulásokra a (27)—(28) alattiak figyelembevételével az alábbi összefüggések vezethetők le:

$$\begin{aligned} u(b, \varphi) &= u(b, 0) \cos \varphi + \frac{b}{2G} S (1 - \cos \varphi) + \\ &+ \frac{b}{2G} \sum_{n=2,4,\dots} \frac{S_n - nL_n}{n^2 - 1} (\cos \varphi - \cos n\varphi) = \\ &= u(b, 0) \cos \varphi + \check{u}(b, \varphi); \end{aligned} \quad (45)$$

$$\check{v}(b, \varphi) = \frac{b}{2G} \left[ S \sin \varphi + \sum_{n=2,4,\dots} \left( \frac{n S_n - L_n}{n^2 - 1} \sin n\varphi + \frac{n L_n - S_n}{n^2 - 1} \sin \varphi \right) \right], \quad (46)$$

ahol

$$\begin{aligned} S &= c_0 b^{-2} + d_0 (2 - 4\nu), \\ S_n &= c_n (n^2 - n) b^{n-2} + d_n (n + 1) (n + 2 - 4\nu) b^n + \\ &+ c'_n (n^2 + n) b^{-n-2} + d'_n (n - 1) (n - 2 + 4\nu) b^{-n}, \\ L_n &= c_n (n^2 - n) b^{n-2} + d_n (n + 1) (n + 4 - 4\nu) b^n - \\ &- c'_n (n^2 + n) b^{-n-2} + d'_n (n - 1) (4 - n - 4\nu) b^{-n}. \end{aligned} \quad (47a-c)$$

Amennyiben  $u(b, 0) = \check{v}(b, \pi/2)$ , úgy a (45), (46) képletek a 3b. ábrán vázolt terhelés okozta elmozdulásokat jelentik.

Ezekután rátérhetünk az érintkezési feladat megoldásához szükséges (17) alatt definiált  $H^{(1)}$  hatásfüggvény mátrix tagjainak meghatározására.

Mivel a gyűrű középpontján átmenő vízszintes sík és a gyűrű külső perem metszéspontjának ( $R = b, \varphi = \pm \pi/2$ ) függőleges elmozdulását tekintjük zérusnak, így a 4. ábrán vázolt terhelés alapján a hatásfüggvény mátrix elemei

$$\begin{aligned} H_{ij}^{(1)} &= \check{u}(b, \varphi_i - \varphi_j) + \check{u}(b, \varphi_i + \varphi_j) + \\ &+ [\check{v}(b, \pi/2 - \varphi_j) + \check{v}(b, \pi/2 + \varphi_j)] \cos \varphi_i \end{aligned} \quad (48)$$

$i, j = 1, 2, \dots, k,$

hiszen a  $\pm \varphi_j$  szög kis környezetében ( $2b\beta$  ívszakaszon) működő terhelésektől nem  $90^\circ$ -ra helyezkedik el az a pont, amelynek függőleges elmozdulását zérusnak tekintjük, hanem  $\pi/2 \mp \varphi_j$  szögre. Megjegyezzük, hogy az alakváltozás szimmetriájából következően

$$\check{v}(b, \pi/2 - \varphi_j) = \check{v}(b, \pi/2 + \varphi_j). \quad (49)$$

### 2.3 A belső és külső peremén véges szakaszon terhelt körgyűrű hatásfüggvény mátrixa

A 3c. ábrán vázolt testet az alábbi egyensúlyi erőrendszer terheli:  
az  $r = a$  sugarú körön

$$\sigma_r = \begin{cases} 0 & , \quad \beta < \varphi < 2\pi - \beta \\ -\frac{b}{a} [N/mm^2] & , \quad -\beta \leq \varphi \leq \beta \end{cases} \quad (50a-b)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi ; \quad (50c)$$

míg az  $r = b$  sugarú körön

$$\sigma_r = \begin{cases} 0 & \beta < \varphi < 2\pi - \beta \\ -1 [N/mm^2] & -\beta \leq \varphi \leq \beta \end{cases} \quad (51a-b)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\beta. \quad (51c)$$

A — radiális irányú  $p(r)$  nyomás — terheléseket Fourier-sorba fejtve, azt kapjuk, hogy

$$p(a) = \hat{p}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{p}_m \cos m\varphi = \sigma_r(a), \quad (52a)$$

$$p(b) = \check{p}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \check{p}_m \cos m\varphi = \sigma_r(b), \quad (52b)$$

ahol az együtthatók rendre

$$\hat{p}_0 = -\frac{\beta}{\pi} \frac{b}{a}, \quad \check{p}_0 = -\frac{\beta}{\pi}, \quad (53a-b)$$

$$\hat{p}_m = -\frac{b}{a} \frac{2}{\pi} \frac{\sin m\beta}{m}, \quad (53c)$$

$$\check{p}_m = -\frac{2}{\pi} \frac{\sin m\beta}{m}. \quad (53d)$$

Kiindulva az elmozdulásmező egyértékűségét biztosító

$$\begin{aligned} U = U(r, \varphi) = & c_0 \ln r + d_0 r^2 + \frac{2d'_1}{\nu-1} r\varphi \sin \varphi + \\ & + (c_1 r + d_1 r^3 + c'_1 r^{-1} + d'_1 r \ln r) \cos \varphi + \\ & + \sum_{m=2,3,\dots} (c_m r^m + d_m r^{m+2} + c'_m r^{-m} + b'_m r^{-m+2}) \cos m\varphi \end{aligned} \quad (54)$$

feszültségfüggvényből, a (22a—c) felhasználásával a feszültségekből a (42a) szerint összeállított  $\sigma$  feszültségvektorra az alábbi kifejezést nyerjük:

$$\sigma = \mathbf{F}_0(r) \mathbf{c}_0 + \Lambda_1(\varphi) \mathbf{F}_1(r) \mathbf{c}_1 + \sum_{m=2,3,\dots} \Lambda_m(\varphi) \mathbf{F}_m(r) \mathbf{c}_m, \quad (55)$$

ahol  $\mathbf{F}_0$ ,  $\Lambda_m(\varphi)$ ,  $\mathbf{F}_m(r)$ ,  $\mathbf{c}_0$ ,  $\mathbf{c}_m$  a (42b—g) alatt definiált mátrixok és vektorok ( $m \leftrightarrow n$ ),

$$\mathbf{c}_1^T = [d_1 \ c'_1 \ d'_1], \quad (56)$$

$$\mathbf{F}_1(r) = \begin{bmatrix} 2r & -2r^{-3} & \frac{1+\nu}{1-\nu} r^{-1} \\ 6r & 2r^{-3} & r^{-1} \\ 2r & -2r^{-3} & r^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{(1)}(r) \\ \mathbf{F}_1^{(2)}(r) \\ \mathbf{F}_1^{(3)}(r) \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Az (50a—c), (51a—c) peremfeltételekből egyrészt az (52a—b), (53a—d) alatti sorbafejtések, másrészt az (55)—(57) alatti feszültségek felhasználásával az ismeretlen együtthatók meghatározására az alábbi egyenletek vezethetők le:

$$\begin{bmatrix} a^{-2} & 2 \\ b^{-2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\pi} \frac{b}{a} \\ -\frac{\beta}{\pi} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_0 \mathbf{c}_0 = \mathbf{f}_0(\beta) \quad (58)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{(1)}(b) \\ \mathbf{F}_1^{(3)}(b) \\ \mathbf{F}_1^{(1)}(a) \\ \mathbf{F}_1^{(3)}(a) \end{bmatrix} \mathbf{c}_1 = \mathbf{f}_1(\beta) \Rightarrow \mathbf{B}_1 \mathbf{c}_1 = \mathbf{f}_1(\beta) \quad (59)$$

(4×3)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{+,m}^{(1)}(b) & \mathbf{F}_{-,m}^{(1)}(b) \\ \mathbf{F}_{+,m}^{(3)}(b) & \mathbf{F}_{-,m}^{(3)}(b) \\ \mathbf{F}_{+,m}^{(1)}(a) & \mathbf{F}_{-,m}^{(1)}(a) \\ \mathbf{F}_{+,m}^{(3)}(a) & \mathbf{F}_{-,m}^{(3)}(a) \end{bmatrix} \mathbf{c}_m = \mathbf{f}_m(\beta) \Rightarrow \mathbf{B}_m \mathbf{c}_m = \mathbf{f}_m(\beta), \quad (60)$$

ahol

$$\mathbf{f}_j^T(\beta) = \left[ -\frac{2}{\pi j} \sin j\beta, 0, -\frac{b}{a} \frac{2}{\pi j} \sin j\beta, 0 \right].$$

Az (59) egyenletrendszerből  $\mathbf{c}_1$  egyértelműen meghatározható, mivel a homogén egyenletrendszernek nincs triviálistól különböző megoldása, s a jobb oldallal bővített együttható mátrix rangja három.



A radiális és tangenciális irányú elmozdulások meghatározására szolgáló (27), (28) összefüggésekben szereplő integrálok kiszámításához — felhasználva az (55)—(57), a (42b—g), illetve a (23a—c) kifejezéseket, továbbá az (58)—(60) algebrai egyenletrendszerek megoldásait — a következő kifejezésekhez jutunk:

$$u(R, \varphi) = u(R, 0) \cos \varphi + \frac{R}{2G} S (1 - \cos \varphi) + \frac{R}{4G} (S_1 - L_1) \varphi \sin \varphi + \\ + \frac{R}{2G} \sum_{m=2,3,\dots} \frac{S_m - mL_m}{m^2 - 1} (\cos \varphi - \cos m\varphi) = \quad (61) \\ = u(R, 0) \cos \varphi + \dot{u}(R, \varphi),$$

$$\dot{v} = \dot{v}(R, \varphi) = \frac{R}{2G} S \sin \varphi + \\ + \frac{R}{4G} [(S_1 - L_1) \varphi \cos \varphi + (L_1 + S_1) \sin \varphi] + \quad (62) \\ + \frac{R}{2G} \sum_{m=2,3,\dots} \left[ \frac{m S_m - L_m}{m^2 - 1} \sin m\varphi + \frac{m L_m - S_m}{m^2 - 1} \sin \varphi \right],$$

ahol

$$L_1 = d_1 (10 - 8\nu) R - c'_1 2R^{-3} - d'_1 R^{-1}, \\ S_1 = d_1 (6 - 8\nu) R + c'_1 2 R^{-3} - d'_1 \frac{1 - 3\nu}{1 - \nu} R^{-1},$$

míg  $S$ ,  $S_m$ ,  $L_m$  a (47a—c) képletekben  $b$ -nek  $R$ -re, illetve  $n$ -nek  $m$ -re történő cseréjével számítható ki.

A hatásfüggvény felépítése szempontjából két esetet fogunk megkülönböztetni:

1. A vizsgált test  $A_1$  és  $A_2$  pontjainak függőleges irányú elmozdulása zérus ( $R = b$ ,  $\varphi = \pm\pi/2$ ).

2. A test külső körének  $\varphi = 0$  egyenessel történő metszéspontjában az elmozdulás zérus ( $R = b$ ,  $\varphi = 0$ ).

Az első esetben az érintkezési feladat vonatkozásában a merevtestszerű elmozdulással rendelkező  $1$  jelű testről van szó, míg az utóbbi esetben a merevtestszerű mozgást nem végző  $2$ -es jelű testről.

Az első esetben a hatásfüggvény mátrixot a fenti megtámasztásoknak megfelelően az  $R = a$  külső körön, míg a második esetben az  $R = a$  belső körön kell kiszámítani.

Tehát az  $1$ -jelű testnél, ha az elmozdulásokat az  $R = b$  sugarú körön számítjuk ( $\dot{u}(b, \varphi)$ ,  $\dot{v}(b, \varphi)$ ) a (61) és (62) szerint, akkor a hatásfüggvény mátrix elemei a (48) szerint állíthatók elő.

Ha a test a 2-es jelű, akkor a számítás valamelyest bonyolultabbá válik, abból adódóan, hogy az  $(R = b, \varphi = 0)$  pont a rögzített és a szóban forgó mátrixot a belső körön kell előállítani.

Az  $R = a$  sugarú körön levő elmozdulás számításakor jelentse  $u(a, 0)$  — a (30b) alatti falvastagság-változást.

A (23a—b), (55)—(60) összefüggések felhasználásával  $u(b, 0) = 0$  mellett

$$\begin{aligned}
 u(a, 0) = \int_b^a \varepsilon_r(r, 0) dr = \frac{1}{2G} & \left\{ c_0 \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) + d_0 (2 - 4\nu) (a - b) + \right. \\
 & + d_1 (1 - 4\nu) (a^2 - b^2) + d'_1 \ln a/b + c'_1 (a^{-2} - b^{-2}) + \\
 & + \sum_{m=2,3,\dots} [c_m (b^{m-1} - a^{m-1}) m + d_m (m - 2 + 4\nu) (b^{m+1} - a^{m+1}) + \\
 & \left. + c'_m (a^{-m-1} - b^{-m-1}) m + d'_m (m + 2 - 4\nu) (a^{-m+1} - b^{-m+1}) \right\}. \quad (63)
 \end{aligned}$$

Vagyis az  $\check{u}(b, \varphi)$  olyan elmozdulásmezőt jelent, amelyen  $\varphi = 0$  környezetében  $\pm\beta$  intervallumban hat a terhelés, és az  $R = b, \varphi = 0$  pont elmozdulása zérus. Az  $u(a, \varphi)$  az ugyanezen terhelésnél és megtámasztásnál fellépő radiális elmozdulást jelenti, ha  $u(a, 0)$  a (63) alapján meghatározott érték.

Ezek után a  $\mathbf{H}^{(2)}$  mátrix elemeinek kiszámítási képlete — a terhelés  $\varphi = 0$  tengelyre vonatkozó szimmetriájából adódóan — egyszerű geometriai megfontolásból nyerhető:

$$\begin{aligned}
 H_{ij}^{(2)} = (u(a, \varphi_i - \varphi_j) + u(a, \varphi_i + \varphi_j) - 2\check{u}(b, \varphi_j) \cos \varphi_i) a/b, \quad (64) \\
 i, j = 1, \dots, k,
 \end{aligned}$$

ahol az  $a/b$  hányadossal való szorzás az  $r = a$  sugarú körön elhelyezendő egységnyi intenzitású terhelésre utal. (Az elmozdulás számítására levezetett összefüggések a 3c. ábrán vázolt terhelésre vonatkoztak!)

#### 2.4 A kör alakú furattal gyengített tér hatásfüggvény mátrixának felépítése

Az  $R_2$  sugarú furat peremén (4. ábra) radiális irányú  $2R_2\beta$  ív mentén megszóló, egységnyi intenzitású  $[N/mm^2]$  terhelés a  $\varphi = 0$  pontban

$$\begin{aligned}
 u(R_2, 0) = \frac{R_2\beta}{2\pi G} & \left[ 1 + \kappa \frac{\sin \beta}{\beta} + \frac{(1 - \kappa)(1 - \cos \beta)(\pi - \beta)}{2\beta} - \right. \\
 & \left. - (1 + \kappa) \frac{\sin \beta}{\beta} \ln \left( 2 \sin \frac{\beta}{2} \right) \right], \quad (65a)
 \end{aligned}$$

míg a  $\varphi = 0$ -tól különböző pontokban

$$u(R_2, \varphi) = -\frac{R_2 \beta}{2\pi G} \left[ (1 + \kappa) \cos \varphi \ln \left( 2 \sin \frac{|\varphi|}{2} \right) - \frac{(1 - \kappa)(\pi - \varphi)}{2} \sin \varphi \right] \quad (65b)$$

radiális irányú elmozdulást hoz létre ([10], 251. oldal), ahol  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  ÁSF,  $\kappa = 3 - 4\nu$  SA esetében.

A  $H^{(2)}$  mátrix elemei a (65a, b) összefüggésekkel előállított  $u(R_2, \varphi)$  segítségével, a (38) értelemszerű felhasználásával számíthatók ki.

### 2.5 A H mátrix kiszámításának numerikus problémái

A H előállításához szükséges (37), (45), (46) és (61), (62), (63)-ban szereplő végtelen soroknál a sorbafejtés legnagyobb indexét a  $\sigma_r$ -re vonatkozó peremfeltételek  $\varphi = 0$  helyen történő teljesezésének mértékével határozzuk meg. Amennyiben a 3a, b, c ábrákon vázolt terheléseknél, a  $\sigma_r$  feszültség hibája 1% alatt van, vagy pedig, ha a sorbafejtés tagjainak a növelése a számítási és kerekítési hibák miatti pontatlanságból adódóan a  $\sigma_r$  értékét rontaná, a sorbafejtéssel megállunk.

Számítástechnikailag nem kis problémát okoz a (44), (60) algebrai egyenletrendszerek megoldása nagy  $n$ , illetve  $m$  esetén.

Amennyiben az egyenletrendszer együttható mátrixában szereplő  $F_{+,n}^{(\alpha)}(R)$  vektorban szereplő mennyiségek jóval nagyobbak az  $F_{-,n}^{(\alpha)}(R)$ -ben szereplőknél ( $\alpha = 1, 3$ ;  $R = b, a$ ;  $n \leftrightarrow m$ ), úgy gépi számítás szempontjából a  $B_n$ , illetve  $B_m$  mátrix determinánusa zérussá válik. Ez fizikailag azt jelenti, hogy a magas felharmónikusoknál a gyűrű külső és belső pereme „végtelen távol” van egymástól, azaz a  $c_n, d_n, c'_n, d'_n$  ( $n \leftrightarrow m$ ) állandókat egymástól függetlenül lehet meghatározni.

A 3c. ábrán vázolt terhelésnél a (60)-ból az említett fizikai tény miatt  $c_m, d_m$ -re az

$$\begin{bmatrix} F_{+,m}^{(1)}(b) \\ F_{+,m}^{(3)}(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_m \\ d_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\pi} \frac{\sin m\beta}{m} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (66)$$

míg  $c'_m, d'_m$ -re az

$$\begin{bmatrix} F_{-,m}^{(1)}(a) \\ F_{-,m}^{(3)}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_m \\ d'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} \frac{2}{\pi} \frac{\sin m\beta}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

egyenletrendszerek írhatók fel. Megoldásuk rendre

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin m\beta}{m(m-1)} b^{-m+2}; & d_m &= -\frac{1}{\pi} \frac{\sin m\beta}{m(m+1)} b^{-m}; \\ c'_m &= -\frac{b}{a\pi} \frac{\sin m\beta}{m(m+1)} a^{m+2}; & d'_m &= \frac{b}{a\pi} \frac{\sin m\beta}{m(m-1)} a^m. \end{aligned} \quad (68a-d)$$

A kapott megoldásokat behelyettesítve az eredeti (60) egyenletrendszerbe, egyenletenként a hiba mértéke a következő:

$$\begin{aligned} 0_1 &= 0_1 \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^{m-2} \right], & 0_2 &= 0_2 \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^{m-1} \right], \\ 0_3 &= 0_3 \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^{m-2} \right], & 0_4 &= 0_4 \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^{m-1} \right], \end{aligned} \quad (69a-d)$$

vagyis a legnagyobb hiba mértéke  $(a/b)^{m-1}$ -el arányos, mivel  $a/b < 1$ .

A 3b. ábrán vázolt terhelésnél  $n \gg 2$  esetében (44)-ből hasonlóan állíthatók elő a  $c_n, d_n, c'_n, d'_n$  állandók meghatározására szolgáló egyenletrendszerek.

Az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{+,n}^{(1)}(b) \\ \mathbf{F}_{+,n}^{(3)}(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

egyenletből

$$c_n = -\frac{2}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n(n-1)} b^{-n+2}, \quad (71a)$$

$$d_n = \frac{2}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n(n+1)} b^{-n} \quad (n \text{ páros}) \quad (71b)$$

míg

$$c'_n = d'_n = 0, \quad (71c)$$

mivel a (67)-hez hasonló egyenletrendszer homogén, együtthatómátrixának determinánsa zérustól különböző. (Nyilvánvalóan a (71a, b) alatti  $c_n, d_n$  értékeknek meg kell egyezniük a (35b, c) alatti  $a_n, b_n$  állandók értékével, hiszen az  $r = a$  sugarú furat hatásával  $n \gg 2$  nem számolunk, mintha furat nélküli testről volna szó.)

A (71a, d) megoldásoknak a (44) egyenletekbe történő behelyettesítésével meggyőződhetünk arról, hogy a hiba maximális értéke  $(a/b)^{n-2}$ -vel arányos. Így látható, hogy mindkét terhelési típusnál (3b, c ábrák)  $\left\{ \frac{n}{m} \right\} \rightarrow \infty$  esetében a hiba zérushoz tart.

### 3. A $\delta = \delta(F)$ függvénykapcsolat előállítása

A gyakorlati problémák (pl. szerszámgép körvezetékek [12]) mechanikai modelljének előállításakor igényként merülhet fel a 2. fejezetben vizsgált rugalmas rendszer  $l$ -jelű alkotó elemére vonatkozó merevtestszerű eltolódás mértékének ismerete az  $F$  terhelő erő függvényében. A kérdéses  $\delta = \delta(F)$  „rugó karakterisztikát” a következő megfontolások alapján tudjuk előállítani:

A diszkrét  $F_i$  terhelés mellett kapott  $\delta_i$  eltolódásokat ( $i = 1, \dots, NST$ ) a

$$\delta = \sum_{j=1}^{JF} \alpha_j (F)^j \quad (72)$$

polinommal közelítjük. (A zárójel melletti felső index hatványozást jelöl.)

Az  $\alpha_j$  állandók a hibanégyzet minimuma elve alapján határozhatók meg. Ezen elv értelmében keressük az

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NST} \left( \sum_{j=1}^{JF} \alpha_j (F_i)^j - \delta_i \right)^2$$

funkcionál minimumát, azaz az algebrai egyenletrendszer

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_l} = 0, \quad l = 1, \dots, JF,$$

ami részletesebben

$$\sum_{j=1}^{JF} \alpha_j \sum_{i=1}^{NST} (F_i)^j (F_i)^l = \sum_{i=1}^{NST} \delta_i \cdot (F_i)^l, \quad l = 1, \dots, JF \quad (73)$$

alakot ölti.

A  $\delta = \delta(F)$  függvény nem-linearitásának mértéke az  $F$  terhelés mértékétől függ. Ezért célszerű az NST számú terhelésnél (teherlépcsőnél) kapott pontokra ültetett polinom  $\alpha_j$  tényezőinek maximális számát ( $JF$ ) valamilyen hiba mértékkel megállapítani, pl.

$$r_l = \left| \delta_i - \sum_{j=1}^{JF} \alpha_j (F_i)^j \right| \leq 0,05 \delta_i. \quad (74)$$

Nem érdektelen hangsúlyozni, hogy a hibanégyzet elv alapján meghatározott „rugókarakterisztikát” csak azon terhelési intervallum felett alkalmazhatjuk, amely felett az  $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, JF$ ) állandók meghatározást nyertek.

### 4. Számítási eredmények

A fentiekben ismertetett módszerrel az 1. táblázatban foglalt (ITI, ITIT) állandókkal jellemzett eseteket vizsgáltuk SA és ÁSF állapot feltételezése mellett.

A rugalmas testek geometriai méretei:

Az 1-jelű test belső és külső sugara  $R_0 = 20$  mm,  $R_1 = 40$  mm; a 2-jelű test belső és külső sugara  $R_2 = 40,01425$  mm,  $R_3 = 55$  mm, továbbá vastagságuk  $V = 20$  mm; a testek anyaga azonos, a csúsztató rugalmassági tényező  $G = 0,73575 \cdot 10^5$  N/mm<sup>2</sup>, a Poisson-féle tényező  $\nu = 0,3$ .

Az  $F$  terhelés az 1. táblázat szerinti helyen hat a  $V$  vastagságú rendszerre. A terhelés maximális értéke  $F_{\max} = 10$  kN, melyet 10 db teherlépcsőben viszünk fel. Az érintkezési feladat felállításánál az altartományok (elemek) osztásszöge  $2\beta = 3^\circ$ ; ily módon a számításokhoz maximálisan  $k = 20$  db altartomány felvétele elegendőnek bizonyul.

Az (ITI, ITIT) = (0,0) illetve (ITI, ITIT) = (0,1) esetekben ÁSF állapot feltételezésével elvégzett számítások eredményeit a 2. és 3. táblázatok tartalmazzák, továbbá a 6. és 7. ábrákon az  $F = 5$  kN és  $F = 10$  kN terhelésnél kialakuló érintkezési nyomás megoszlását láthatjuk a  $\varphi$  szög függvényében. Az említett ábrák tartalmazzák a Hertz-elmélet alapján [11]

2. táblázat

ÁSF állapot ITI = 0, ITIT = 0		$V = 20$ mm, $R_1 = 40$ mm			
Teherlépcső kN	1	2	3	4	
Max. érintkezési nyomás N/mm <sup>2</sup>	3,724	5,365	6,670	7,828	
1-jelű test elmozdulása $\delta_i \cdot 10^3$ mm	0,856	1,492	2,049	2,557	
Érintkező altartományok száma $\varphi > 0$ intervallumon	4	6	7	8	
Rugókarakterisztika állandói	$\alpha_1 = 0,92285270 \cdot 10^{-6}$ mm/N $\alpha_2 = -1,0606171 \cdot 10^{-10}$ mm/N <sup>2</sup> ,				
Rugókarakterisztika hibája $r_i \cdot 10^3$ mm	0,029	-0,007	-0,016	-0,008	

3. táblázat

ÁSF állapot ITI = 0, ITIT = 1		$V = 20$ mm, $R_1 = 40$ mm			
Teherlépcső kN	1	2	3	4	
Max. érintkezési nyomás N/mm <sup>2</sup>	3,737	5,823	7,657	9,255	
1-jelű test elmozdulása $\delta_i \cdot 10^3$ mm	0,590	0,989	1,334	1,649	
Érintkező altartományok száma $\varphi > 0$ intervallumon	4	5	6	7	
Rugókarakterisztika állandói	$\alpha_1 = 0,63878141 \cdot 10^{-6}$ mm/N, $\alpha_2 = -0,87291444 \cdot 10^{-10}$ mm/N <sup>2</sup> ,				
Rugókarakterisztika hibája $r_i \cdot 10^3$ mm	0,029	-0,006	-0,016	-0,008	

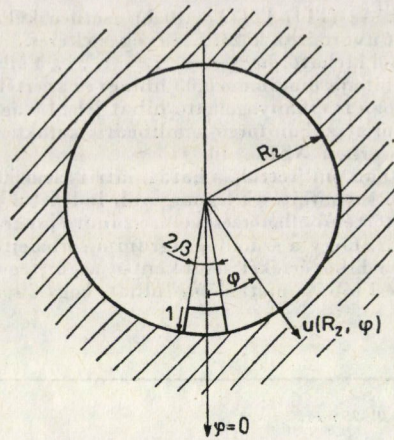
kapott nyomás értékeket is. Az (ITI, ITIT) = (0,1) esetben különösen jól látható a Hertz-elmélet és az általunk kapott nyomások közötti lényeges eltérés.

A 2. és 3. táblázatokból látható, hogy az  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  állandókkal képzett (72) alatti nem-lineáris karakterisztika hibája maximum  $0,03 \mu\text{m}$ , és ez az érték az 1-jelű test  $\delta_1$  eltolódásához képest  $\%$ -os viszonyításban is elhanyagolható hibát jelent, vagyis a hibanégyzet minimum elvét sikerrel lehet alkalmazni a szóban forgó nemlineáris karakterisztikák előállítására. Jelen esetben a (73) egyenletrendszerben NST = 10, JF = 4.

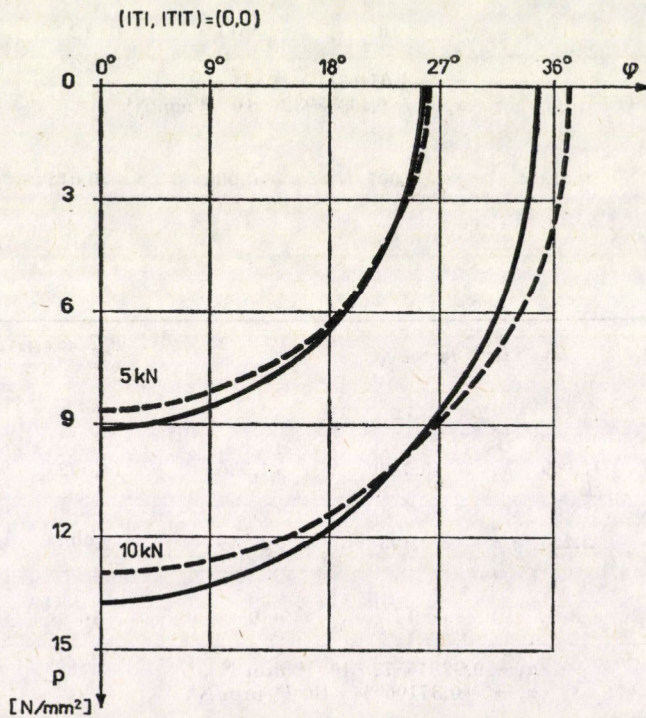
Amint már a 2.5 pontban említettük, a hatásmátrix elemeinek meghatározásakor használatos (37), (61)–(64) alatti sorbafejtések legnagyobb indexét a  $\sigma_i$ -re vonatkozó peremfeltétellel  $\varphi = 0$  helyen (helyeken) történő ellenőrzésével a számítógép automatikusan állapítja meg. Olyan megoldással élünk, hogy a számítógép a sorbafejtés tagjainak 20-szal történő növelése után megvizsgálja a hiba értékét: csökkent-e az új tagok belépésével, avagy nem. Ugyanis számítási és kerekítési hibák miatt előfordulhat, hogy a sorbafejtés tagjainak belépése

$R_1 = 40,01425 \text{ mm}, 2\beta = 3^\circ,$						$G = 7,3575 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2,$ $\nu = 0,3, k = 20$					
5	6	7	8	9	10	5	6	7	8	9	10
8,878	9,863	10,806	11,709	12,596	13,436	8,878	9,863	10,806	11,709	12,596	13,436
3,031	3,480	3,908	4,314	4,713	5,092	3,031	3,480	3,908	4,314	4,713	5,092
9	10	10	11	12	12	9	10	10	11	12	12
$\alpha_3 = 1,0546311 \cdot 10^{-14} \text{ mm/N}^3,$ $\alpha_4 = -0,40835932 \cdot 10^{-18} \text{ mm/N}^4.$											
0,005	0,013	0,007	-0,008	-0,011	0,007	0,005	0,013	0,007	-0,008	-0,011	0,007

$G = 7,3575 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2,$						$R_1 = 40,01425 \text{ mm},$ $2\beta = 3^\circ, \nu = 0,3, k = 20$					
5	6	7	8	9	10	5	6	7	8	9	10
10,730	12,069	13,388	14,536	14,692	16,782	10,730	12,069	13,388	14,536	14,692	16,782
1,947	2,226	2,493	2,749	2,998	3,236	1,947	2,226	2,493	2,749	2,998	3,236
8	8	9	9	10	10	8	8	9	9	10	10
$\alpha_3 = 0,92816577 \cdot 10^{-14} \text{ mm/N}^3,$ $\alpha_4 = -0,37106934 \cdot 10^{-18} \text{ mm/N}^4.$											
0,007	0,011	0,006	-0,006	0,011	0,007	0,007	0,011	0,006	-0,006	0,011	0,007

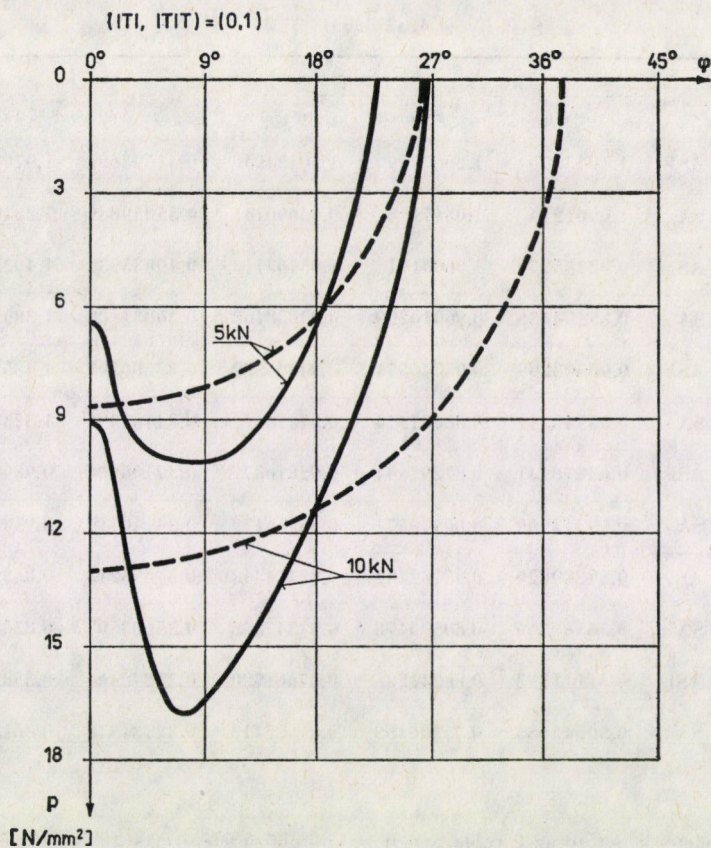


5. ábra. Az  $u(R_2, \varphi)$  radiális irányú elmozdulás meghatározására szolgáló terhelés, furattal gyengített tér esetében



6. ábra. Az érintkezési nyomás eloszlása (0,0) típusú szerkezetnél  $F = 5, 10$  kN terhelés esetében, —: constans elem használatakor, - - -: a Hertz-elmélet alapján





7. ábra. Az érintkezési nyomás eloszlása (0,1) típusú szerkezetnél  $F = 5, 10$  kN terhelés esetében  
 —: constans elem használatakor, — —: a Hertz-elmélet alapján

nem csökkenti, hanem növeli a hibát. Ebben az esetben a számítóprogram a sorbafejtés tagjainak számát nem növeli, hanem a pontosabban kielégített peremfeltételt adó sorbafejtési tagokkal számolja ki az elmozdulásokat.

Az általunk vizsgált esetben teli táblánál a hiba  $\sigma_H^{(1)} = 1 - \sigma_r(\varphi = 0, R = R_1) = -0,0145$  N/mm<sup>2</sup>, azaz abszolút értékét tekintve, 1,5%-nál kisebb; gyűrűnél [lásd (50b) – (51b) alatti peremfeltételeket]

$$\sigma_H^{(1)} = -\frac{R_3}{R_2} + \sigma_r(\varphi = 0, R = R_2) = -0,0093 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_H^{(2)} = -1 + \sigma_r(\varphi = 0, R = R_3) = 0,0093 \text{ N/mm}^2,$$

míg a sorbafejtés legnagyobb indexe 180.

Az 1. táblázatban felsorolt többi szerkezeti megoldásoknál is hasonló nagyságrendű hibákat kapunk, amelyek jól mutatják a sorbafejtés pontosságát.

A 4. táblázat a 6 fajta szerkezetnél — SA és ÁSF állapotoknál — elvégzett számítási eredményekből kiragadott  $\alpha_i$   $i = 1, \dots, 4$  rugókarakterisztika állandókat, továbbá az 1-es test általunk kiválasztott pontjainak  $(\varphi = \begin{cases} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{cases}; R = R_1)$   $F = 2$  kN és 4 kN terheléseknél kapott függőleges  $\delta$  elmozdulását tartalmazza. Szerkezet típusokként az utóbbiak összevetéséből jól látható a nemlinearitás.

4. táblázat

Típus	Állapot	A rúgókarakterisztika állandói				$\delta_{\text{m}} \mu\text{m}$	
		$\alpha_1 \cdot 10^6 \text{ mm/N}$	$-\alpha_2 \cdot 10^{10} \text{ mm/N}^2$	$\alpha_3 \cdot 10^6 \text{ mm/N}^3$	$-\alpha_4 \cdot 10^8 \text{ mm/N}^4$	F = 2 kN	F = 4 kN
ITI = -1	ÁSF	1,1943376	1,2067079	1,1043494	0,41598684	1,9791	3,4396
ITIT = 0	SA	1,0961214	1,0617148	0,94690141	0,35039889	1,8310	3,1959
ITI = 0	ÁSF	0,92285270	1,0606171	1,0546311	0,40835932	1,4921	2,5575
ITIT = 0	SA	0,85294536	0,96010299	0,94058468	0,36031108	1,3865	2,3777
ITI = 1	ÁSF	0,90308299	0,95746571	0,94305882	0,37286593	1,4851	2,2850
ITIT = 0	SA	0,83545211	0,88857474	0,87478172	0,34467396	1,3733	2,3845
ITI = 0	ÁSF	0,63878141	0,87291444	0,92816577	0,37106934	0,9899	1,6491
ITIT = 1	SA	0,59313669	0,80970571	0,85564179	0,34140719	0,9183	1,5300
ITI = -1	ÁSF	0,59289829	0,95782491	0,97454443	0,37893213	0,8682	1,3581
ITIT = 1	SA	0,56588260	0,89590478	0,91347363	0,35603505	0,8358	1,3180
ITI = 1	ÁSF	0,31111393	0,80241235	0,87601720	0,35242464	0,3583	0,4249
ITIT = 1	SA	0,30543655	0,75306459	0,81622418	0,32731346	0,3618	0,4519

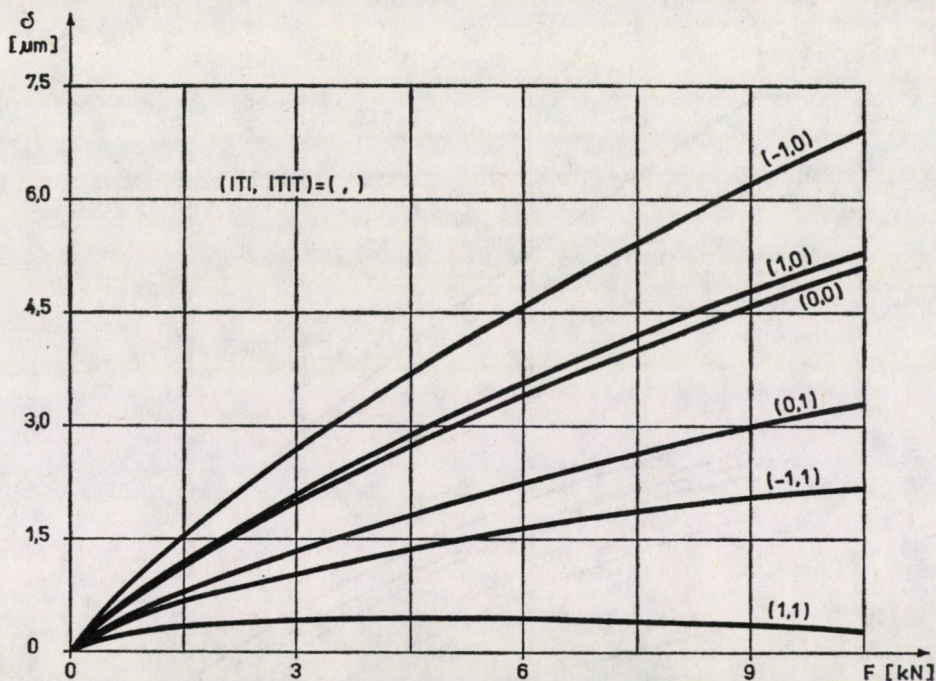
Szemléletes képet ad az 1. táblázatbeli — különböző felépítettségű és terhelésű — rugalmas rendszerek merevségéről a 8. ábra, amely a  $\delta = \delta(F)$  függvénykapcsolatot. „rúgókarakterisztikát” szemlélteti. Leglágább (ITI, ITIT) = (-1,0) rendszer s legmerevebb az (1,1) típusú. Ez könnyen magyarázható. A (-1,0) típusnál az ismert terhelés az 1-jelű gyűrűre a külső peremen, míg az (1,1)-nél a belső peremen hat, továbbá a (-1,0)-nál a 2-jelű test a végtelen távoli pontban, míg a másiknál a ( $\varphi = 0, R = R_3$ ) pontban van megfogva; a terheléssel egyensúlyt tartó reakcióerők a végtelenben, illetve a 2-jelű gyűrű külső peremén az érintkezési tartomány által meghatározott sugár által kijelölt ív mentén működnek. Az is világos, hogy a terhelés és a rendszer felépítettségéből adódóan páronként a (-1,0) típustól az (1,0), továbbá a (0,0)-tól a (0,1), s végezetül a (-1,1)-től az (1,1) típusnak kell merevebbnek lennie. Ezt a tényt a  $\delta = \delta(F)$  függvények is jól érzékeltetik.

Külön figyelmet érdemlő az (1,1) típusnál a ( $\varphi = \pi/2, R = R_1$ ) pont  $\delta$  függőleges elmozdulásának változása az  $F$  terhelőerő függvényében. A gyűrűalakú testek bonyolult deformációinak következtében — amire a 7. ábrán vázolthoz hasonló jellegű  $p$  érintkezési nyomáseloszlás is utal — a  $\delta = \delta(F)$  függvény egy bizonyos  $F$  értékén túl „lágyló” karakterisztikával rendelkezik.

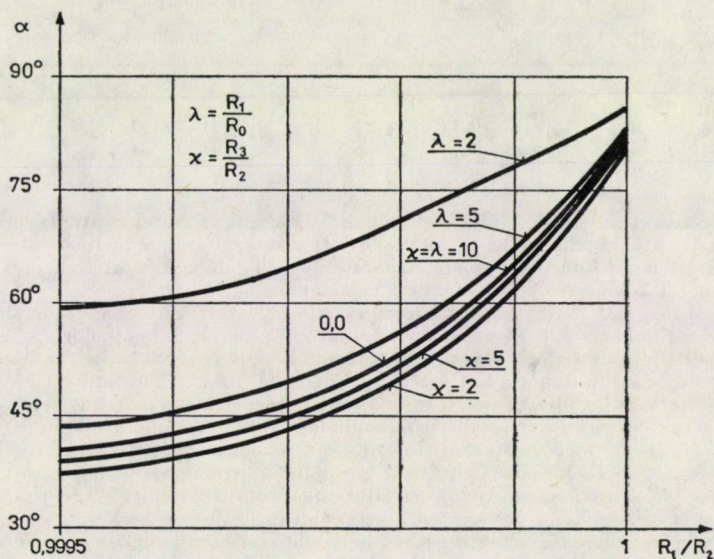
Megjegyzendő, hogy a 6. ábrán vázolt alakú  $p$  függvényt a (0,0)-n kívül a (-1,0), (-1,1) típusoknál, míg a 7. ábrán vázolt alakút a (0,1) és az (1,1) típusokon kívül a (1,0)-nál is találunk.

Természetesen a 8. ábrán vázolt  $\delta = \delta(F)$  függvénytől eltéréket kapunk akkor, ha az 1-es test merevtestszerű elmozdulását a jelen számításban szereplő  $\left(\varphi = \begin{cases} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{cases}, R = R_1\right)$  pontok helyett pl. a ( $\varphi = 0, R = R_1$ ) vagy ( $\varphi = \pi, R = R_1$ ) pontokat választjuk. Ezekbe az esetekben a hatásfüggvénymátrix elemeit a 2. pontban leírtak értelemszerű módosításával lehet kiszámolni. Ettől a dolgozat jelenlegi keretein belül eltekintünk.

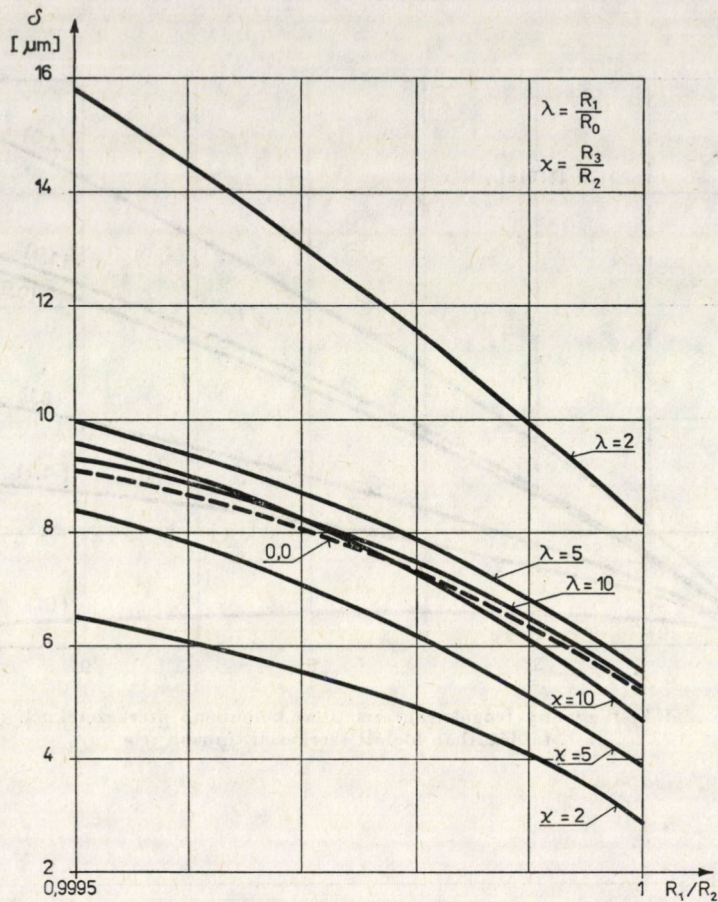
Az alábbiakban a (-1,0) és a (0,1) típusú feladatokat különböző  $\lambda = R_1/R_0, \chi = R_3/R_2$  értékeknél fogjuk vizsgálni az  $R_1/R_2$  függvényében. A terhelés mindegyik esetben  $F = 10 \text{ kN}$ ,



8. ábra. A  $\delta = \delta(F)$  függvény (rugókarakterisztika) különböző szerkezeteknél.  $(IT_I, IT_{IT})$  az 1. táblázatban foglalt szerkezeti típusok jele



9. ábra. Az érintkezési tartomány felének átfogási szöge az  $R_1/R_2$  függvényében  $(-1,0)$  és  $(0,1)$  szerkezet típusnál különböző  $\lambda = R_1/R_0$ ,  $\chi = R_3/R_2$  értékeknél



10. ábra.  $\delta = \delta\left(R_1/R_2, \begin{cases} \lambda = \text{áll.} \\ \chi = \text{áll.} \end{cases}\right)$  eltolódás függvénye a  $\begin{Bmatrix} (-1,0) \\ (-0,1) \end{Bmatrix}$  szerkezet típusoknál

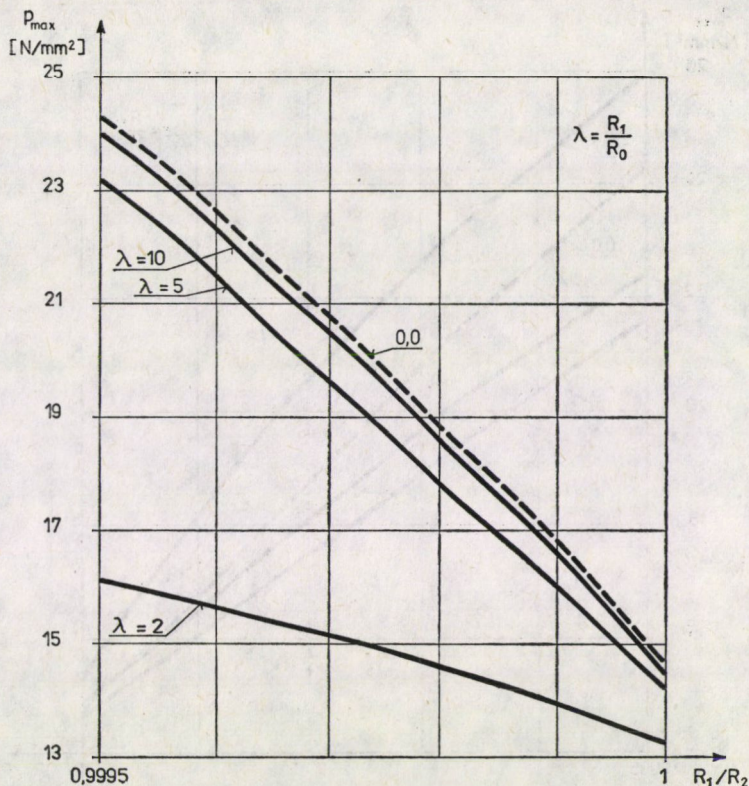
az 1- és 2-jelű testek anyagállandói a korábbiakkal azonosak; a testek vastagsága  $V = 10$  mm, a bennük kialakuló feszültségállapot általánosított síkfeszültséghez tartozó.

Rögzített  $R_1$  és  $R_2$  értékek mellett  $\lambda \rightarrow \infty$ -nél az 1-jelű test furatának sugara zérushoz, míg  $\chi \rightarrow \infty$ -nél a 2-jelű test külső sugara a végtelenhez tart.

A 9. ábra az  $\Omega_p$  érintkezési tartomány felének  $\alpha$  átfogási szögét tartalmazza  $R_1/R_2$  függvényében, különböző  $\lambda$  és  $\chi$  értékeknél. Jól látható, hogy a  $\lambda = \text{áll.}$  görbék felülről, míg a  $\chi = \text{áll.}$  görbék alulról közelítik meg a (0,0) típusnál kapott görbét. A diagramban felvitt pontok az elvégzett számításokból nyert értékeknek felelnek meg. A feltüntetett görbék jól érzékeltek, hogy terheletlen állapotban, a testek közötti hézag értéke erőteljes befolyást gyakorol az  $\alpha$  értékére, továbbá az  $\alpha$  maximális értéke minden esetben  $90^\circ$ -nál kisebb.

A 10. ábrán a  $\delta$  merevtestszerű elmozdulás értékeit szemléltetjük az  $R_1/R_2$  függvényeken különböző  $\lambda, \chi$  értékek mellett. A  $\lambda = 2$  görbe fut a legmagasabban, a  $\chi = 2$  pedig a legalacsonyabban. Első esetben az 1-jelű test falvastagsága a legkisebb (-1,0) típusú szerkezet, második esetben a 2-jelű test úgyszintén a legkisebb (0,1) típusú szerkezet. Az elmozdulások közti különbség nyilvánvaló: az első esetben az 1-jelű test igen hajlékony, második esetben a 2-jelű test ( $\varphi = 0, R = R_3$ ) pontja nem mozdul el, továbbá  $\delta$  a 2-jelű test  $\varphi = 0$  sugárirányú falvastagságváltozásából és az 1-jelű test  $\varphi = 0$  sugárirányú összenyomódásából tevődik össze.

A  $\lambda \rightarrow \infty$  felülről közelíti meg a (0,0)-nál kapott görbét, jóllehet az  $R_0 \rightarrow 0$  átmenetnél nem kapjuk meg a teli táblához tartozó feszültségmezőt (a gyűrűhöz tartozó megoldás  $R = R_0$



11. ábra. A  $(-1,0)$  szerkezet típusnál  $\varphi = 0$ -nál ébredő  $p_{\max}$  maximális érintkezési nyomás változása az  $R_1/R_2$  függvényében különböző  $\lambda = R_1/R_0$  értékeknél

sugarú körön  $\sigma_r = 0$ ,  $\tau_{r\varphi} = 0$  peremfeltételt elégít ki, míg a teli táblánál az  $R = 0$  helyen  $\sigma_r = \sigma_\varphi \neq 0$ ; lásd (36a, b) képletet). Gyakorlatilag a feszültségmezők különbsége az  $R = R_1$  sugarú perem elmozdulására már nem gyakorol észlelhető befolyást.

A  $\chi \rightarrow \infty$  alulról „nem tisztán” közelíti a  $(0,0)$  jelű görbét, amit a gyűrűre és a furattal gyengített síkra vonatkozó megoldások felépítésének különbségével lehet magyarázni. A gyűrűnél a külső peremnek csak az érintkezési tartomány által meghatározott szakaszán hat normálirányú feszültség, míg a furattal gyengített síknál a végtelenben „mindenütt” ébrednek feszültségek.

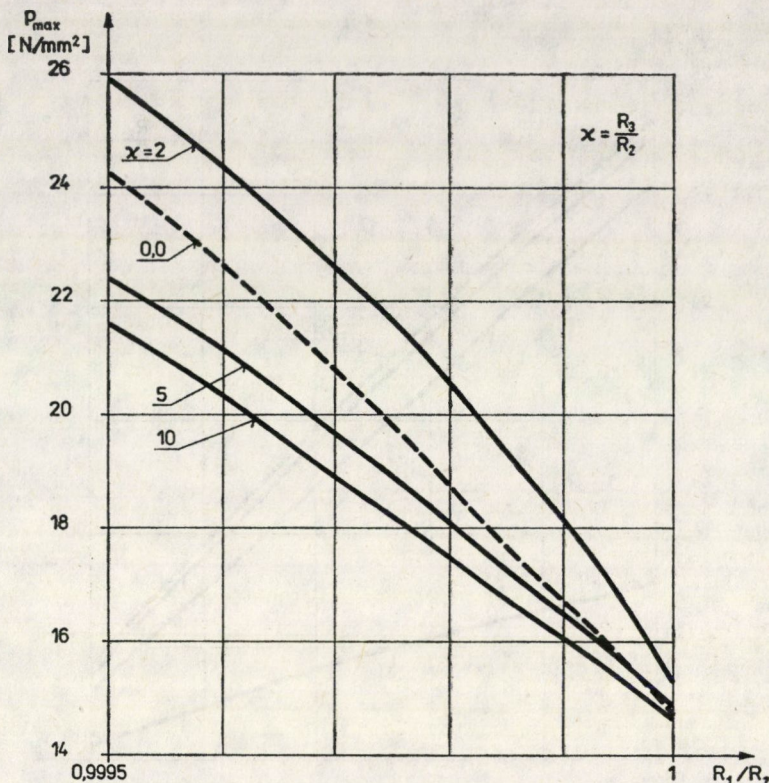
Végezetül a 11. és 12. ábrán vázolt diagramok a maximális érintkezési feszültségeket tüntetik fel. A  $\lambda = \text{áll.}$  görbéknel a  $p_{\max}$  a  $\varphi = 0$  helyen ébred, míg a  $\chi = \text{áll.}$  görbéknel  $\varphi = 0$ -tól különböző helyeken. Mivel a  $\lambda = 2$ -nél volt az  $\alpha$  a legnagyobb, így nincs mit csodálkoznunk azon, hogy ennél a geometriánál kapjuk a legkisebb értékű maximális érintkezési nyomást. A növekvő értékű  $\lambda$  görbék alulról közelítik meg a  $(0,0)$  jelűt. Ennek fordítottja a 12. ábrán vázolt  $\chi = \text{áll.}$  görbéknel már nem áll fenn a korábban vázolt (7. ábra) nyomásnak a  $(0,0)$ -nál kapottól (6. ábra) eltérő megoszlásából adódóan.

Az

$$\alpha = \alpha \left( R_1/R_2, \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \chi \end{matrix} \right\} \right) \quad \text{és} \quad p_{\max} = p_{\max} \left( R_1/R_2, \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \chi \end{matrix} \right\} \right)$$

görbék összhangjára utal az is, hogy növekvő  $R_1/R_2$ -nél  $\alpha$  nő,  $p_{\max}$  csökken. Érdekes tényként említhetjük meg, hogy a diszkrét  $\lambda$  és  $\chi$  görbék közötti különbség  $R_1/R_2$  növekedésével szintén csökken.

\* \* \*



12. ábra. A (0,1) szerkezet típusnál keletkező  $p_{\max} = p_{\max}(R_1/R_0, \chi = \text{áll.})$  függvény

A jelen dolgozat megszületését elősegítette a Szerszámgépipari Művek Fejlesztő Intézete megbízásából a Nehézipari Műszaki Egyetem Mechanikai Tanszéke által elkészített Sam. 159-XXVIII-3/1975. számú szerződéses munka.

#### IRODALOM

1. Штаерман, И. Я.: Контактная задача теории упругости, Гостехиздат М. Л. 1946
2. Косов, М. Г.: Некоторые контактные задачи теории упругости применительно к телам повышенной изгибной податливости Сб. «Валновые передачи» Московский станкоинструментальный институт М. 1970
3. Божкова, Л. В., Паненкова, Т. П.: О контактом взаимодействии цилиндрической оболочки упругого основания. Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, Днепропетровск 1969, издательство «Наука» М. 1970
4. PÁCZELT, I.: Some Remarks on the Approximate Solution of Frictionless Elastic Contact Problems. *Acta Techn. Scien. Hung.* **83** (1976), 337—355
5. PÁCZELT, I.: Solution of Elastic Contact Problems by the Finite Element Displacement Method. *Acta Techn. Scien. Hung.* **82** (1976), 353—375
6. DANTZIG, G. B.: Linear Programming and Extensions. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1963
7. KÜNZI, H. P.—KRELLE, W.: Nichtlineare Programmierung, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962
8. PÁCZELT, I.: Some Remarks to the Solution of Quadratic Programming Problems. *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry, Miskolc, Series D. Natural Sci.* **33** (1979), 137—156

9. Лурье, А. И.: Теория упругости, издательство «Наука», М., 1970  
 10. Вайнберг, Д. В.: Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин  
 Издательство «Будивельник», Киев 1973  
 11. Расчёты на прочность в машиностроении, издательство «МАШГИЗ», Москва 1958  
 12. Левина, З. М.— Решетов, Д. Н.: Контактная жёсткость машин, издательство «Машиностроение», Москва 1971

**Solution of Some of the Theories of Plane Elasticity Contact Problems.** — By assuming that the friction between bodies may be neglected and the deformations are small, the contact pressure developed resulting between the bodies, the region of contact, further, the degree of displacement of a body possessing a rigid-body-like displacement are looked for depending on the loading force. In case of assuming a generalized plane stress pattern, the parts of the elastic systems investigated are circle, annular, a plane of infinite extension weakened by a circular hole or, in case of a plane deformation, a cylindrical body defined by the above geometries or an elastic space weakened by a circular hole. For the establishment of the action functions presenting themselves in building up the quadratic programming problem, by making use of the Airy stress function a suggestion is made also including the problem occurring in the calculations. Finally, the calculations demonstrate the way of solving the contact problems outlined above.

**Lösung einiger Kontaktprobleme der Planelastizitätslehre mit Hilfe der quadratischen Programmierung.** — Mit der Annahme, daß die zwischen den Körpern auftretende Reibung vernachlässigt werden kann und die Verformungen klein sind, werden der Kontaktdruck, der Kontaktbereich, weiters die Größe der Versetzung des eine starrkörperartige Verschiebung besitzenden Körpers in Abhängigkeit der Belastungskraft gesucht. Die Teile der untersuchten elastischen Systeme sind bei Voraussetzung von einem ebenen Spannungszustand — eine kreisförmige, kreisringförmige, mit einem kreisförmigen Loch abgeschwächte Scheibe von unendlicher Ausdehnung — oder im Fall von ebener Verformung, ein zylindrischer Körper mit durch die obenerwähnten Geometrien definiertem Querschnitt bzw. durch ein Kreisloch abgeschwächter elastischer Raum. Zum Aufbau bei der Aufstellung der Programmierungsaufgabe vorkommender Wirkungsfunktion schlagen die Autoren eine Methode bei Anwendung der Airyschen Spannungsfunktion vor, die bei den Berechnungen angewendet werden können. Schließlich demonstrieren die durchgeführten Berechnungen die obengeschilderte Art der Lösung der Kontaktprobleme.